

**Результаты приложения теории аналитических функций  
к высокоточному расчёту напряжённо-деформированного состояния  
зубьев зубчатых передач**

д.т.н. проф. Дорофеев В.Л.

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова  
+7 (495) 361-19-51, vld@ciam.ru

*Аннотация.* В отличие от метода конечных элементов рассматриваемый в статье метод комплексных аналитических функций (МКАФ) позволяет разделить вычислительные процедуры на две части. Первая не содержит описания формы граничных элементов и вычисляется аналитически. Вторая часть включает описание границ области и вычисляется численно. Наибольшее влияние на точность расчёта напряжений в деталях машин имеет первая часть. С помощью МКАФ достигается высокая точность расчёта. Представлены результаты расчётов в виде графиков, удобных для выполнения расчётов прочности зубчатых передач.

*Ключевые слова:* метод комплексных аналитических функций, коэффициенты формы зубьев, напряжения, относительные перемещения

### **Введение**

В настоящее время для расчёта элементов конструкций все чаще находят применение численные методы теории упругости, такие как метод конечных или граничных элементов. Эти методы обладают неоспоримым преимуществом, позволяют определять не только величину, но и форму нагруженной детали. Однако результаты расчёта содержат только итоговую сумму всех компонентов перемещений. Это является недостатком, поскольку пока невозможно выполнить полный расчёт всех деталей машины одновременно, с учётом контактного взаимодействия деталей в стыках, динамических процессов, погрешностей изготовления. Поэтому еще долгое время численные методы будут дополняться традиционными методами расчёта, основанными на раздельном учёте деформаций кручения, сдвига, сжатия, изгиба и т.д. Большое значение в таких методах расчёта имеют методы расчёта контактных напряжений и контактной жесткости. Однако в расчётную практику еще не приняты современные достижения в этой области. Имеется в виду то, что численные методы теории упругости можно преобразовать так, что суммарный результат будет состоять из аналитической и численной частей, а это повышает точность расчётов и открывает путь к познанию протекающих процессов в деформируемой конструкции. Аналитические расчёты выполняются в тех процедурах, которые не требуют дискретного представления расчётной области: границы, поверхности или всего объёма детали; численные – требуют. Недостаточное изучение современных методов расчёта приводит к необходимости применения существенно упрощённых формул, не обеспечивающих потребности силового расчёта конструкций. Например, в работе [1] приводится десять существенно расходящихся по конечным результатам различных формул, применяемых для расчёта контактной жесткости деталей машин. При этом для инженера остаётся неясным является ли достаточно строгим разделение напряжений и деформаций на контактные и изгибные, и не является ли раздельный учёт контактных и изгибных перемещений умозрительным.

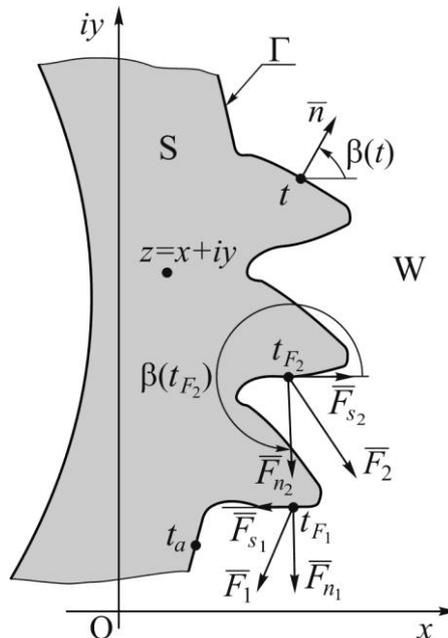
В основе излагаемого ниже метода лежит анализ функций, на основе которых выполняется расчёт напряжений, деформаций и прогибов деталей машин.

Для конкретизации метод рассмотрим на примере расчёта напряжений в зубьях зубчатых передач. Для этого на плоскости  $Ox$  поместим область  $S$ , которая соответствует искомому телу. На схеме, показанной на рисунке 1, граница и область вне тела обозначена символами  $\Gamma$  и  $W$ . Остальные параметры будем описывать по ходу изложения.

Исходный алгоритм расчёта напряжений основан на применении функций Г.В. Колосова [2]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Phi(z), \tag{1}$$

где:  $z = x + iy$  – точка внутри контура;  $i = \sqrt{-1}$  – символ мнимой части;  $\Phi(z)$  – функция напряжений.



**Рисунок 1. Схема сил и геометрические параметры области**

Остальные обозначения и определения соответствуют книге [3]. Для сокращения объема статьи все выражения будем приводить для первой функции Г.В. Колосова, как более простой, а результаты компьютерного моделирования, показанные ниже – для второй функции, поскольку их легче сопоставить с результатами поляризационно-оптических экспериментов.

Метод определения граничных значений функции напряжений  $\Phi(t)$  известен и описан в работе [4], поэтому остановимся на определении функции  $\Phi(z)$  по заданным значениям функции  $\Phi(t)$ .

Формально функцию  $\Phi(z)$  можно найти, подставив функцию  $\Phi(t)$  в формулу Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(t) dt}{t - z}. \tag{2}$$

Формула (2) справедлива только в том случае, когда функция  $\Phi(z)$  аналитическая. В реальных условиях это не так. Причиной являются внешние силы, определяемые функцией  $a(t)$ , приложенные к границе. Представим функцию напряжений на границе в виде:  $\Phi(t) = \Xi(t) + a(t)$ .

Функция  $\Phi(t)$  в точках приложения силы имеет разрывы, что нарушает её аналитичность. Такие же разрывы имеет и функция  $a(t)$ , определяющая воздействие от внешней силы [3]. Однако, как показала практика, разностная функция  $\Xi(t) = \Phi(t) - a(t)$  разрывов не имеет, а функция  $\Xi(z)$  является аналитической.

Представим функцию  $a(t)$  в виде [3]:

$$a(t) = \frac{1}{2} P(t) + \frac{1}{2i\pi} \frac{d\bar{t}}{dt} \int_{\Gamma} \frac{P(\tau) d\tau}{\tau - t}, \tag{3}$$

где:  $P(t)$  – комплексная функция, выражающая проекции контактного давления от внешних сил на координатные оси.

Разностная функция  $\Xi(t)$  – гладкая функция и остается гладкой даже тогда, когда

функция  $P(t)$  сосредоточена в точке. Поэтому поле напряжения можно вычислять на основе следующей формулы:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{4 X(t) + a(t) dt}{t - z}. \quad (4)$$

Важная особенность функции (4) заключается в том, что интеграл можно разделить на две части, а часть, содержащую нерегулярную функцию  $a(t)$ , вычислить аналитически.

Опуская описание соответствующих преобразований, приведем формулы расчёта напряжений в окончательном виде:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} 4X(t) d(\ln(t - z)) + 2 \operatorname{Re} \frac{F \exp(i\beta(t_F))}{\pi(t_F - z)}, \quad (5)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} =$$

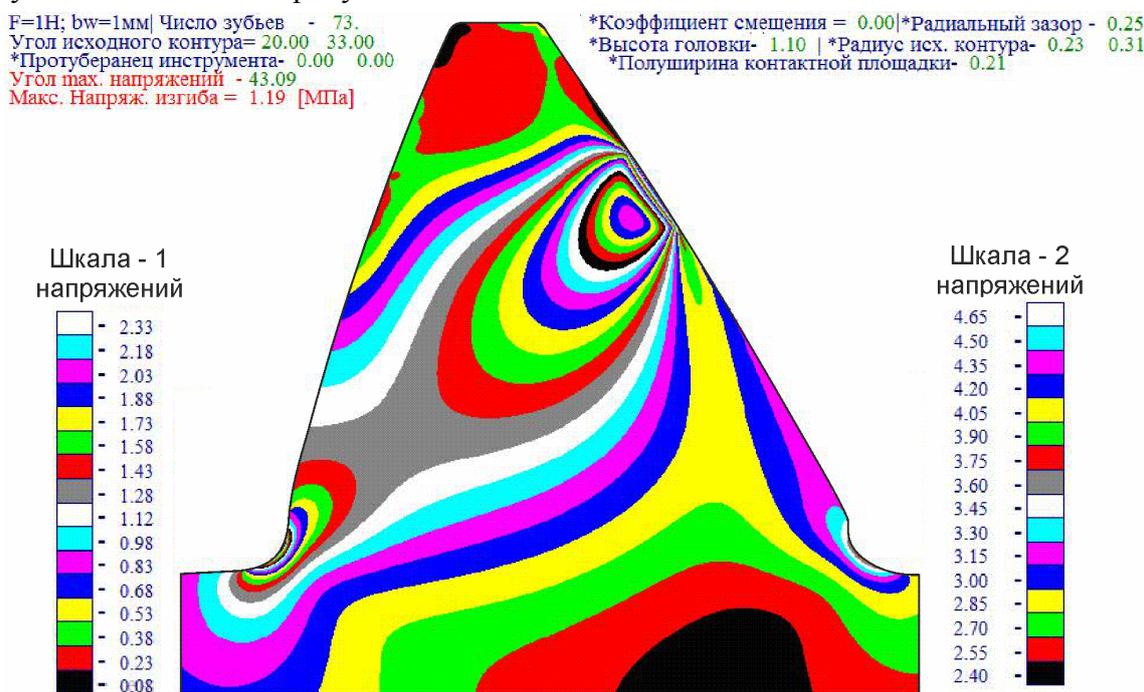
$$= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} X(t) d \frac{\overline{t-z}}{t-z} - \frac{2}{\pi i} \int_{\Gamma} \operatorname{Re} X(t) \frac{\overline{dt}}{dt} d(\ln(t - z)) - \frac{\overline{F} \exp(-i\beta(t_F))}{\pi(t_F - z)} \left[ 1 + \frac{F \exp(i\beta(t_F)) \overline{(t_F - z)}}{F \exp(-i\beta(t_F)) (t_F - z)} \right], \quad (6)$$

где:  $\beta_F$  – угол наклона внешней нормали в точке приложения к контуру сосредоточенной силы;  $t_F$  – координата точки приложения сосредоточенной силы

$$F = F(t_F) = \int_{\Gamma} P(t) ds = \int_{\Gamma} -P(t) \exp(-i\beta_F) dt.$$

Формулы (5) и (6) записаны для случая одной сосредоточенной силы. Если сил несколько или нагрузка является распределенной, можно применить суперпозицию решений.

Полученные формулы были положены в программу расчёта полей напряжений. Один из результатов показан на рисунке 2.



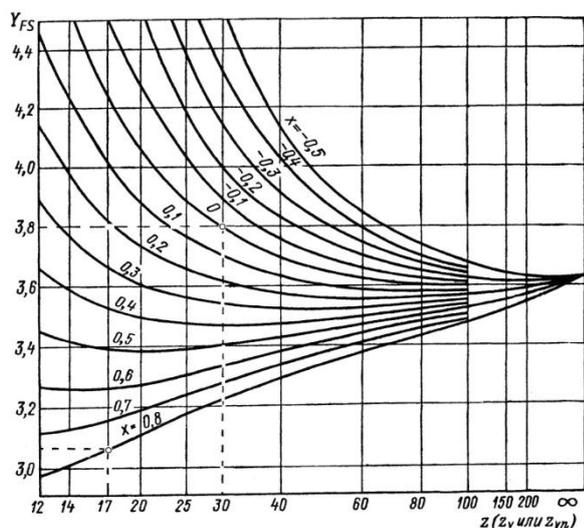
Разность главных напряжений - изохромы

**Рисунок 2. Напряженное состояние зубьев с несимметричным исходным контуром**

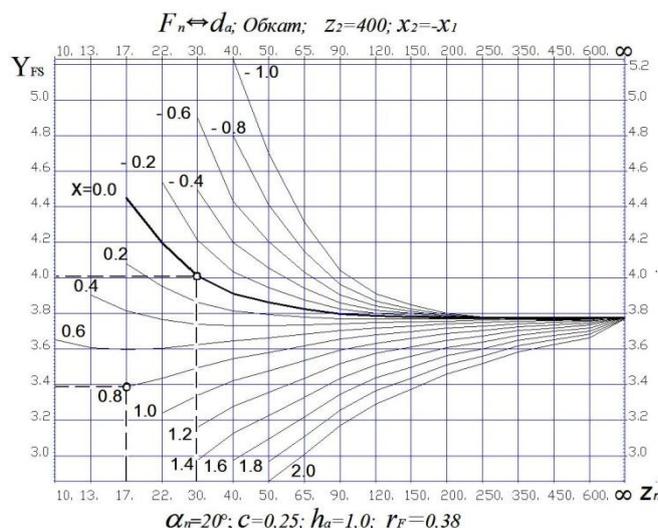
Метод комплексных аналитических функций был применен для развития инженерных методов расчёта изгибных напряжений на зубьях зубчатых передач.

В ГОСТ 21354-87 графики коэффициентов формы зубьев были получены методом конформных отображений. Этот аналитически строгий метод требует, однако, сложного поиска конформно-отображающих функций. МКАФ свободен от этого недостатка.

На рисунках 3-5 показаны два результата расчёта коэффициента формы зубьев. Результаты на рисунке 3 получены методом конформных отображений [3]; результаты на рисунке 4 – методом комплексных аналитических функций для зубчатых колес, изготовленным методом обката.



**Рисунок 3. Результат расчёта коэффициентов формы зубьев, полученный методом конформных отображений**



**Рисунок 4. График коэффициентов формы зубьев, изготовленных методом обката, полученный методом комплексных аналитических функций**

Расчётные значения (таблица 1) коэффициентов формы зубьев, полученные методом комплексных аналитических функций, больше значений по ГОСТ 21354-87, полученных методом конформных отображений, на 5-10%, а по сравнению с данными ISO 6336-3 и DIN 3990, полученными методом ломаных сечений, они меньше на 3-10%.

Таблица 1

**Сопоставление результатов расчёта коэффициентов формы зубьев, полученных методом комплексных аналитических функций, с результатами расчёта по стандартам ГОСТ 21354-87, ISO 6336 и DIN3990**

Параметры зубьев	МКАФ	ГОСТ 21354-87	ISO 6336-3	DIN3990 ч.3
Z=30; x=0	4.02	3,8	4,1	4,14
Z=17; x=0,8	3,4	3,07	3,72	3,7

Представленные на рисунке 3 и рисунке 4 результаты соответствуют формообразованию зубьев, называемому метод обката. В настоящее время все чаще начинает применяться метод копирования, с помощью которого существенно упрощается производство колес с модифицированным профилем зубьев. Часто изготовители станков не сообщают пользователям метод формирования переходных кривых. По этой причине было выполнено исследование формы этих кривых. Результат показал, что переходные кривые наиболее часто описываются окружностью, которая имеет меньший радиус по сравнению с трохойдой, формируемой методом обката.

Для расчёта колес, зубья которых образованы методом копирования, были построены графики коэффициентов формы зубьев, один из которых, соответствующий исходному контуру по ГОСТ 13755-81, представлен на рисунке 5.

Используя формулы Колосова Г.В. и метод разделения решения на численную и аналитическую часть, была получена формула для расчёта упругих перемещений:

$$2G(u(t) + iv(t)) = (\kappa + 1) \int_{t_a}^t X(t) dt + (\kappa + 1) \int_{t_a}^t a(t) dt - \frac{i}{2G} \int_{t_a}^t \sigma_{ns}(t) ds, \quad (7)$$

где:  $u(t)$  и  $v(t)$  – составляющие перемещений по координатным осям;

$G = E/(2(1 + \nu))$  – модуль сдвига, для стали  $G = 80770$  [Н/мм<sup>2</sup>];

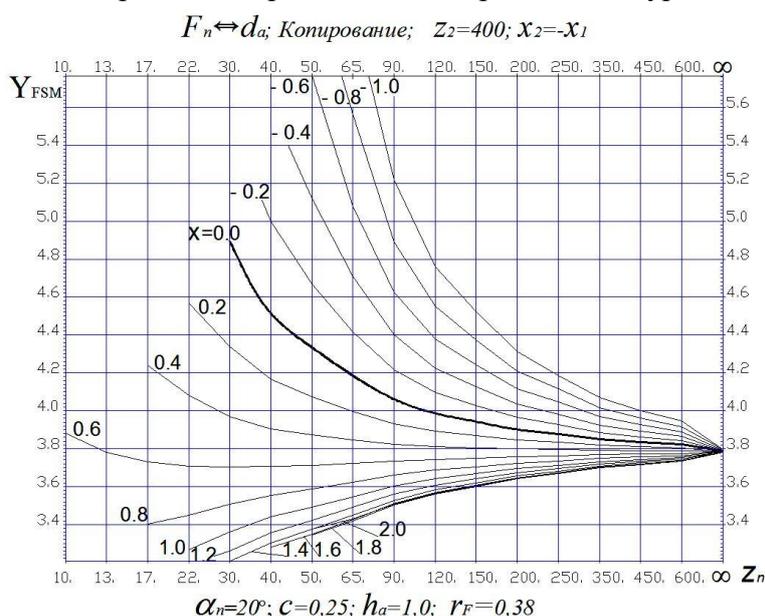
$E$  – модуль упругости, для стали при температуре 20°C  $E = 2,1 \cdot 10^5$  [Н/мм<sup>2</sup>];

$\nu$  – коэффициент Пуассона, для стали  $\nu = 0,3$ ;

$\kappa$  – коэффициент вида напряженного состояния: для плоского деформированного состояния (широкие тела)  $\kappa = 3 - 4\nu$ , для плоского напряженного состояния (узкие тела)  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ ;

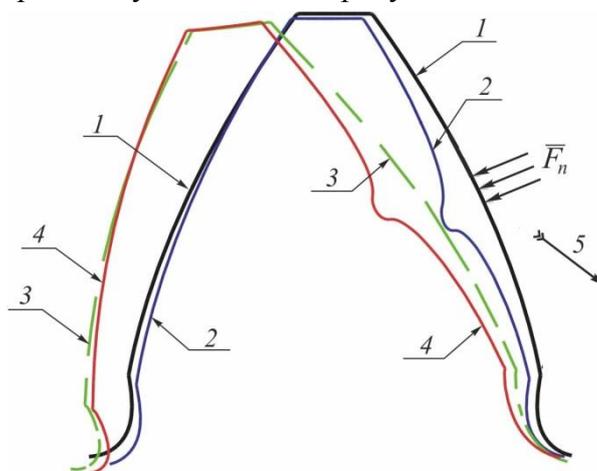
$t_a$  – точка на контуре, принимаемая за неподвижную;

$\sigma_{ns}(t)$  – контактное напряжение, приложенное к границе контура.



**Рисунок 5. График коэффициентов формы зубьев, изготовленных методом копирования**

Результат расчёта прогиба зуба показан на рисунке 6.



**Рисунок 6. Результаты расчёта перемещений контура зуба  $z_1 = 20$ :**

- 1** – контур зуба; **2** – контактное перемещение от функции  $a(t)$ ; **3** – изгибное перемещение от функции  $X(t)$ ; **4** – суммарное перемещение контура (контактное плюс изгибное); **5** – направление на точку, принимаемую за неподвижную

---

### Выводы

1. Как следует из полученных формул (5) и (6), алгоритм расчёта напряжений методом комплексных аналитических функций разделяется на две части. Одна часть вычисляется аналитически точно по формуле (6), а вторая вычисляется приближенно по формуле (5).
2. Разделение алгоритма расчёта на аналитическую и численную часть повышает точность расчёта. При этом в аналитических выражениях содержатся разрывные функции, а в численных выражениях только гладкие функции – это есть дополнительный фактор повышения точности расчёта.
3. Из рисунка 2 видно, что максимальные контактные напряжения сосредоточены внутри тела. Получить такой результат методом конечных элементов весьма сложно.
4. Сравнение с решениями, полученными Мухелишвили Н.И. [3], аналитическую часть расчётов можно классифицировать как расчёт контактных напряжений.
5. Коэффициенты формы зубьев, приведенные в ГОСТ 21354-87, можно рекомендовать для расчёта колес, обработанных методом обката. Данные в ISO6336 и DIN 3990 можно рекомендовать для расчета колес, обработанных методом копирования.
6. Как следует из формулы (7), прогиб деталей и, соответственно, жесткость – это относительная величина, определяемая положением точки, принимаемой за неподвижную. Так, если рассчитывается распределение нагрузки между зубьями зубчатого колеса, то положение этой точки будет определяться основным шагом, а если выполняется расчёт колебаний колес, то положение точки, принимаемой за неподвижную, будет определяться радиусом кривизны эвольвенты в точке приложения силы.
7. Разделение суммарных перемещений на контактные и изгибные имеет строгое математическое обоснование.

### Литература

1. Решетов Д.Н., Иванов А.С., Пулькач С.Ю. Справочные данные по контактной жесткости для контактов в точке и по линии // Вестник машиностроения, №11, 2002. С. 46-50.
2. Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. – Юрьев, 1909. – 187 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 768 с.
4. Кудрявцев В.Н. Зубчатые передачи. – М.-Л.: МАШГИЗ, 1957. – 264 с.