

*Аннотация.* Представлены результаты применения метода конечных элементов для оценки динамических напряжений в зубчатых передачах. С помощью численного моделирования зацепления различных типов зубчатых колес получено подробное распределение контактных и изгибных напряжений, функции жесткости зацепления в зависимости в течение фазы зацепления, статической и динамической кинематических погрешностей. Исследовано поведение передачи, имеющей дефекты, а именно, зарождающуюся трещину у ножки зуба. Результаты исследования могут быть использованы для разработки диагностических признаков трансмиссий в обеспечении эксплуатации ответственных изделий по техническому состоянию.

*Ключевые слова:* зубчатое колесо, динамическая модель, метод конечных элементов

### **Введение**

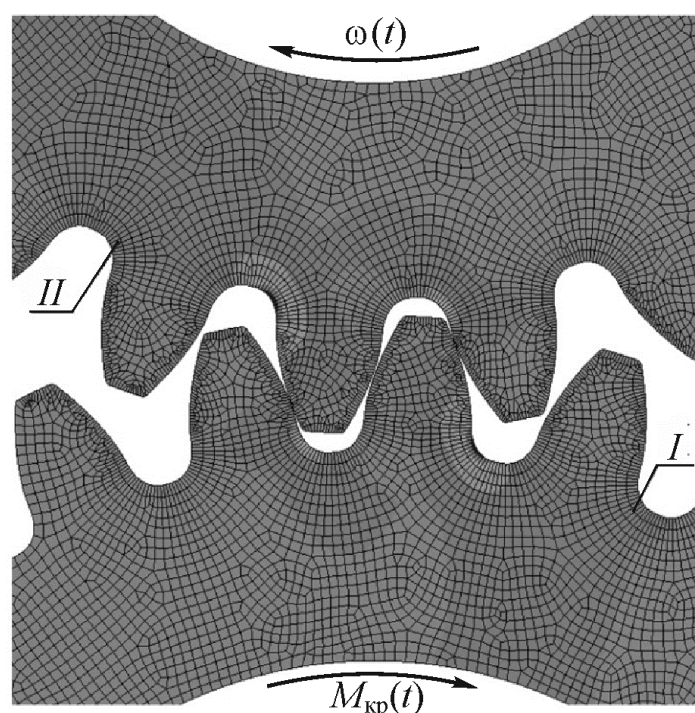
Определение динамических нагрузок в зубчатых передачах необходимо при создании высокомоментных планетарных редукторов привода вентилятора в авиационных двигателях. Для качественной оценки динамического состояния зубчатых передач требуется разработка математических моделей зацепления колес, позволяющих оценивать динамические процессы в зацеплении с учетом геометрических параметров профиля, погрешности монтажа деталей, податливости опор и элементов конструкции и других факторов, влияющих на возбуждение крутильных колебаний в трансмиссиях.

В аналитических моделях зубчатые колеса обычно рассматриваются как жесткие тела, соединенные упруго-демпфирующей связью, эквивалентной жесткости зубьев в зацеплении. В качестве источников возбуждения колебаний в системе рассматриваются ударные процессы при входе зубьев в зацепление, погрешность зацепления, переменная жесткость зубьев. В ударном методе оценки динамических нагрузок, предложенном А.И. Петрусевичем и М.Д. Генкиным [1, 4] и далее развитым Б.Ф. Шорром [2, 5], а также используемым в нормативных документах, процесс зацепления рассматривается как два независимых явления – кромочный и срединный удары, что характерно для передач с относительно небольшими скоростями вращения. Вибрационный метод расчета динамических нагрузок в зацеплении, развитый в работах Н.А. Ковалева [3], предполагает в качестве основного источника возбуждения периодическое изменение жесткости зацепления в процессе пересопряжения зубьев и вследствие наличия кинематической погрешности зубьев шестерен. В зарубежных работах рассматриваются динамические модели с сосредоточенными параметрами и описанием периодической функции жесткости зацепления в виде пульсирующего сигнала [6–9].

Экспериментальная оценка динамического состояния обычно проводится на основе анализа записи вибраций опор редуктора или проведении тензометрирования зубчатых колес. Экспериментальных данных с тензометрированием зубчатых колес в настоящее время недостаточно для верификации моделей. При этом контактные напряжения в течение фазы зацепления, воздействие нерасчетного входа в зацепление вершины зуба и другие процессы в зацеплении не могут быть определены экспериментально, либо оцениваются косвенным путем. В результате уровень точности аналитических моделей динамики зацепления и их верификация являются ограниченными и зависящими от ряда факторов, требующих более точного описания. Для подробного моделирования динамических процессов в зацеплении предлагается использовать численные методы решения задач теории упругости, например, метод конечных элементов в динамической постановке.

## 1. Динамическая модель

Применение метода конечных элементов (МКЭ) для оценки динамического состояния зубчатых колес актуально как для подробной оценки изменения напряженного состояния на различных режимах работы передачи, так и для верификации аналитических моделей зацепления в качестве численного эксперимента. В настоящей работе динамическая модель зацепления создана с помощью конечно-элементного программного комплекса в модуле динамического анализа, использующем метод Ньюмарка. Рассматривалась трехмерная модель двух цилиндрических зубчатых колес в объемной постановке (рисунок 1). Конечно-элементная модель построена с использованием объемных 20-узловых элементов и контактных элементов [12] с размером грани 0,8 мм. Для зубчатых колес разрешены только угловые перемещения, путем задания на внутренних цилиндрических поверхностях шарниров вращения. Нагрузка задается в виде крутящего момента, приложенного к внутренней цилиндрической поверхности ведомой шестерни. На ведущую шестерню нагрузка передается через зацепление в зубьях. Контактными поверхностями объявляются все боковые поверхности зубьев, тип контактного взаимодействия – контакт с трением (коэффициент трения  $f_{\text{тр}} = 0,02$ ). Для ведущей шестерни задается закон движения путем установления значения частоты вращения для каждого момента времени. Система приводится в движение с плавным нагружением и разгоном ведущей шестерни для устранения влияния динамических факторов при разгоне из положения покоя. Временной шаг интегрирования выбирался в диапазоне  $1 \cdot 10^{-5} \dots 5 \cdot 10^{-5}$  с.

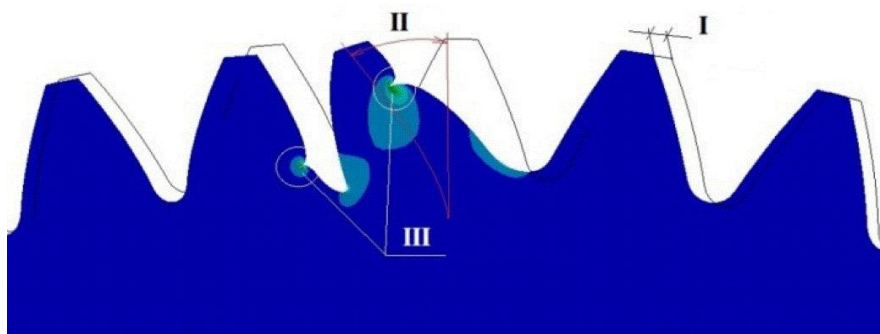


**Рисунок 1. Конечно-элементная модель зацепления пары зубчатых колес:  
I – ведомая шестерня; II – ведущая шестерня**

Частота вращения шестерен зависит от типа исследуемой задачи. При исследовании распределения изгибных и контактных напряжений в зубьях колес используется квазистатическая постановка, при которой скорость вращения колес выбирается малой, для устранения влияния динамической составляющей сил в зацеплении. При оценке динамического поведения системы частота вращения плавно увеличивается с проходом через резонансную и кратные ей частоты. Рассматриваются как крутильные колебания тел колес, так и динамические процессы, связанные непосредственно с контактом рабочих поверхностей зубьев, входом и выходом зубьев из зацепления.

## 2. Результаты моделирования. Жесткость зацепления

На основе решения контактной задачи зацепления зубьев методом конечных элементов определены распределения контактных и изгибных напряжений в течение фазы зацепления, а также функции жесткости и статической кинематической погрешности. На рисунке 2 показана картина распределения эквивалентных напряжений, выполненная для наглядности в масштабе деформаций 400:1 (показано только одно колесо). Угловое перемещение точек колеса зависит от деформации в площадке контакта зубьев, изгиба зуба под действием силы в зацеплении и частичной деформации тела шестерни. Как видно из рисунка 2, отношение величин изгибной и контактной деформации зависит от точки приложения усилия к зубу, а также от присутствия кромочного контакта (в данном случае напряженное состояние в зоне контакта не определяется с помощью формулы Герца). В результате этого на двух соседних зубьях имеем различное соотношение  $k_{zB}/k_{zC}$ , в то время как податливость диафрагмы практически постоянна по углу поворота колеса.



**Рисунок 2. Деформация зубьев в зацеплении: I – деформации тела шестерни; II – деформация изгиба зуба; III – контактная деформация**

Таким образом, общая жесткость  $k_{z\Sigma}$  зацепления может быть представлена через компоненты: изгибную жесткость зубьев  $k_{zB}$ , контактную жесткость  $k_{zC}$  и крутильную жесткость диафрагмы и венца  $k_{zT}$ :

$$\frac{1}{k_{z\Sigma}} = \frac{1}{k_{zT}} + \frac{1}{k_{zC}} + \frac{1}{k_{zB}}. \quad (1)$$

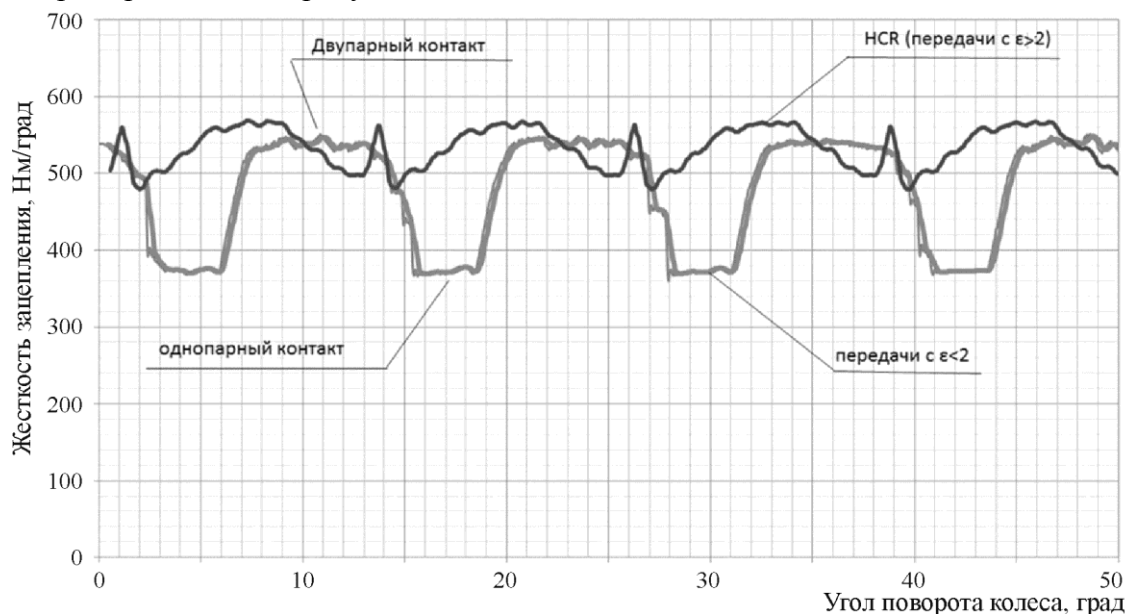
В зависимости от фазы зацепления в каждой точке соотношение компонент жесткостей  $k_{zT}$ ,  $k_{zC}$  и  $k_{zB}$  будет различным. Для оценки влияния параметров геометрии зацепления на динамические нагрузки необходимо вычисление характеристик жесткости или статической кинематической погрешности, например, для различных вариантов профильной модификации зубьев или коэффициентов перекрытия передачи. Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы в аналитических моделях динамики зацепления [10].

На рисунке 3 показаны графики зависимости жесткости зацепления от угла поворота для зубчатых передач с коэффициентами перекрытия  $\varepsilon=1,68$  (стандартный профиль) и  $\varepsilon=2,07$  (HCR), полученные моделированием зацепления двух зубчатых колес с частотой вращения ведущей шестерни 5 об/мин.

Как видно из рисунка 3, передачи с высоким коэффициентом перекрытия  $\varepsilon>2$  имеют меньший размах колебаний функции жесткости, а закон изменения – близкий к гармоническому, в отличие от пульсирующего у передач с  $\varepsilon<2$ . Переменная составляющая жесткости зацепления для передач с коэффициентом перекрытия  $\varepsilon<2$  составляет 22-38%, для передач HCR 9-17%, что определяет снижение уровня динамических нагрузок в зацеплении на 30-45%, подтвержденное экспериментом [1, 11].

Другим способом снижения динамических нагрузок и уровней вибраций в прямозубых цилиндрических передачах является применение профильной модификации зубьев, которая

представляет собой преднамеренное отклонение от эвольвенты профиля у вершин или ножки зубьев и уменьшает силы удара, связанные с деформацией зубьев и ошибками основного шага. Для оценки влияния профильной модификации зубьев на динамическое состояние передачи необходимо определить ее влияние на характеристику жесткости зацепления (характерный пример показан на рисунке 4).



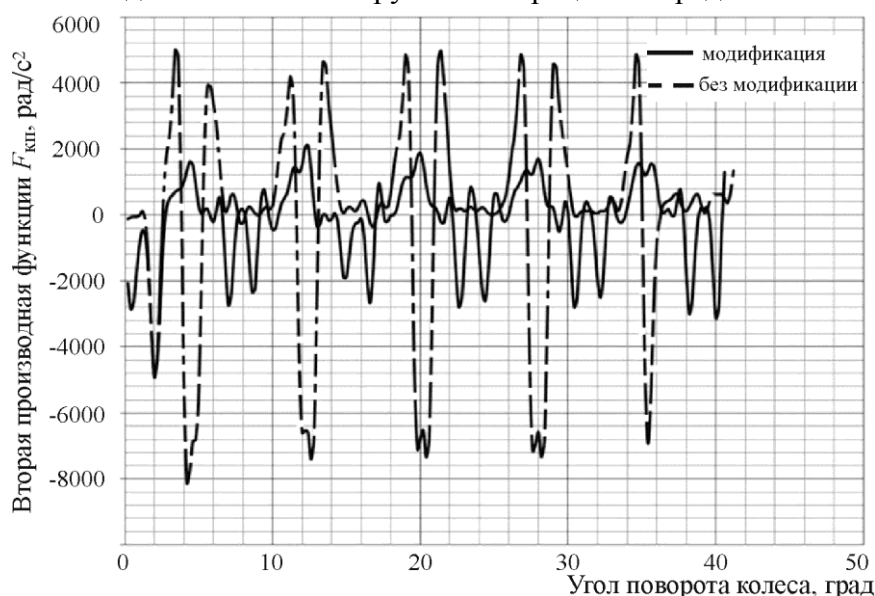
**Рисунок 3. Характеристики жесткости зацепления для передач с различными коэффициентами перекрытия**



**Рисунок 4. Характеристики жесткости зацепления для передач без модификации и с модификацией профиля зуба**

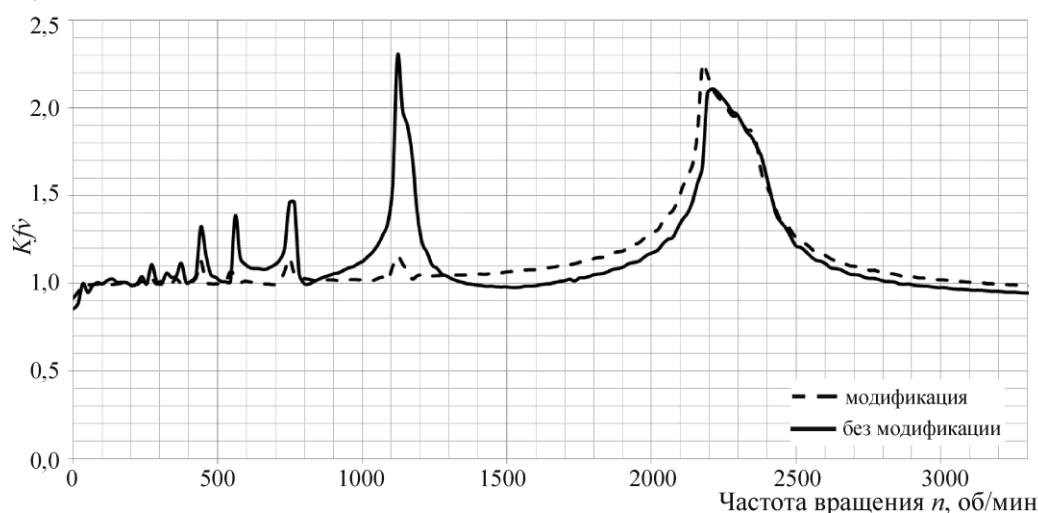
Как видно из рисунка 4, вход и выход из зацепления зубьев сопровождается более плавным изменением жесткости с однопарного зацепления на двухпарное, т.е. зацепление с фланкированными зубьями (рассматривался вариант модификации только вершины зуба) имеет меньшее значение первой и второй производных от функции статической кинематической погрешности (рисунок 5). Максимальное значение амплитуды второй производной от статической кинематической погрешности является объективным критерием оценки возбуждающего воздействия в зацеплении. Таким образом, решение задачи зацепления в квазистатической постановке может служить инструментом для оценки динамического состояния

зубчатой передачи на основе вычисления функции статической кинематической погрешности и ее второй производной. Анализ характера кинематической погрешности в зависимости от геометрии профильной части зубьев позволяет выбирать оптимальные параметры модификации для снижения динамических нагрузок и вибраций в передаче.



**Рисунок 5. Вторые производные от функции статической кинематической погрешности зацепления для передач без модификации и с модификацией профиля зуба**

Однако прямая связь между динамическими напряжениями в зубьях колес и вибрациями, обуславливаемыми кинематической погрешностью в зацеплении, отсутствует. Сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) двух передач – без модификации профиля и с модификацией, показывает незначительное различие в уровне динамических напряжений в ножке зуба на всем диапазоне частот вращения. На рисунке 6 показано сравнение коэффициентов динамичности для двух передач с идентичными геометрическими параметрами за исключением профильной модификации зуба, полученные с помощью аналитической модели с сосредоточенными параметрами [10] на основе зависимостей жесткости от фазы зацепления (рисунок 4).



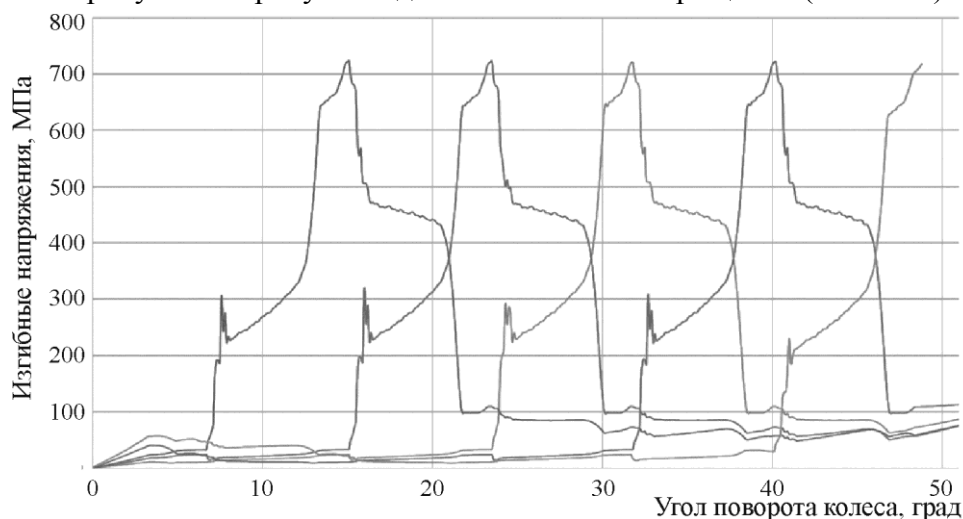
**Рисунок 6. АЧХ зубчатых передач без модификации и с модификацией профиля зуба**

Как видно из рисунка 6, уровни максимальных динамических напряжений на резонансе для двух передач идентичны. Однако на субрезонансах по гармоникам, кратным зубцовой, динамические напряжения для передач с модификацией профиля значительно ниже. Фактически, представленная АЧХ отражает изменение спектрального состава вибраций в переда-

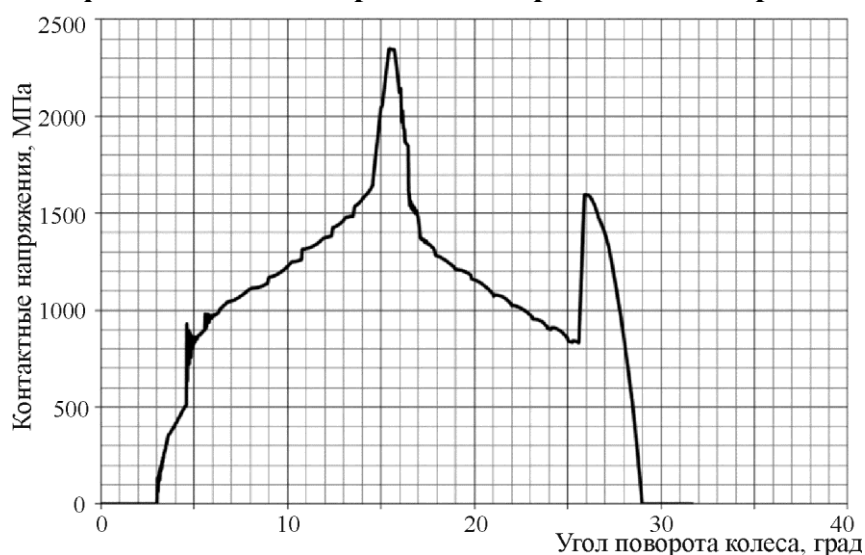
чах с модификацией, для которых уровень динамического возбуждения по основной зубцовой гармонике остается неизменным, но снижаются уровни кратных гармоник. Такие передачи являются менее виброактивными и более тихими в сравнении с передачами без модификации, однако максимальный уровень динамических напряжений в зоне основного резонанса остается схожим.

### 3. Результаты моделирования. Динамические напряжения

Для более точного расчета усталостной прочности зубчатых передач на всех режимах работы необходимо знать распределение контактных и изгибных напряжений в зубьях в течение всей фазы зацепления. Результаты решения динамической задачи зацепления МКЭ представлены на рисунке 7 и рисунке 8 для малой частоты вращения (5 об/мин).



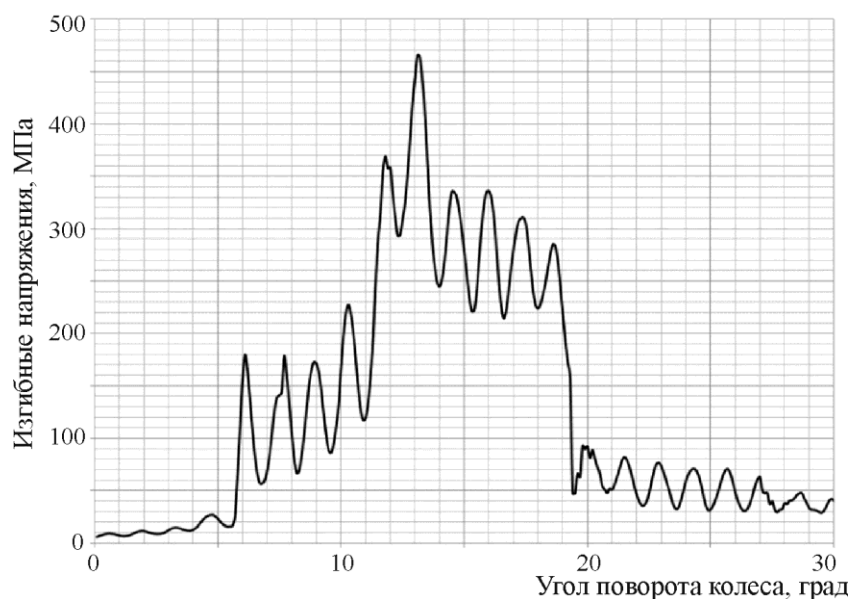
**Рисунок 7. Распределение изгибных напряжений во впадине зубьев в течение фазы зацепления при частоте вращения шестерни 5 об/мин**



**Рисунок 8. Распределение контактных напряжений во впадине зубьев в течение фазы зацепления при частоте вращения шестерни 5 об/мин**

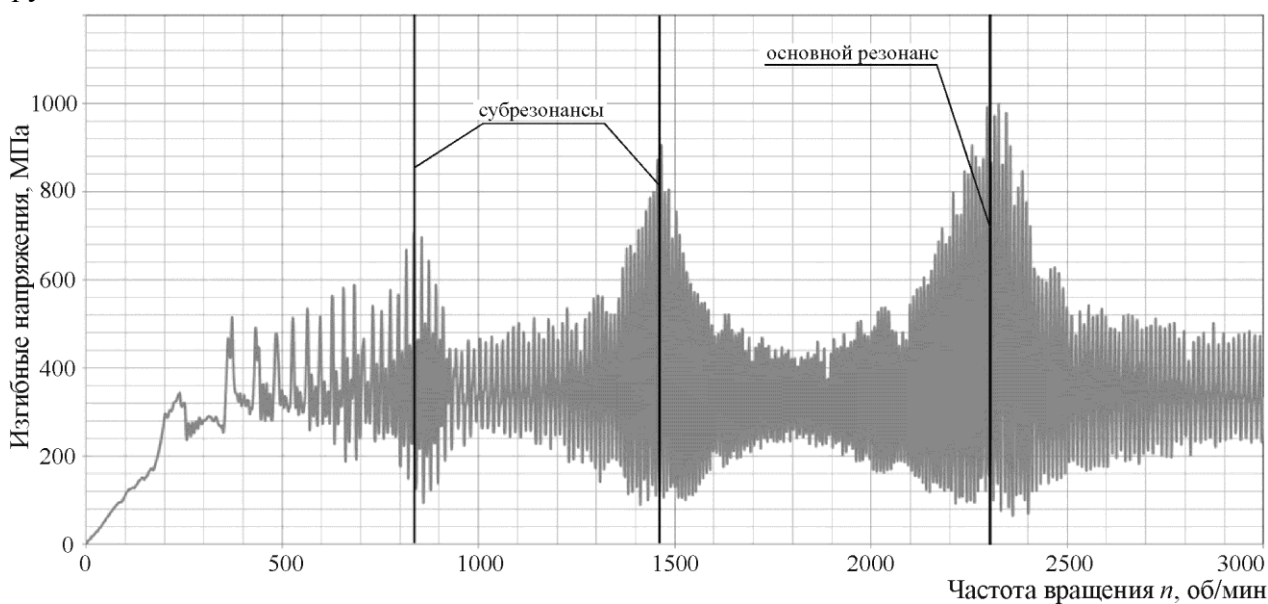
На рисунке 7 показаны графики изменения изгибных напряжений по впадинам соседних пяти зубьев в реальном времени. Данный результат представляет интерес при оценке как статической, так и усталостной прочности зубьев, поскольку существующие методы оценки напряжений позволяют получить только усредненное значение за цикл зацепления зуба, а результаты тензометрирования не дают высокой точности при высоких частотах вращения. На графиках хорошо видны зоны однопарного зацепления, соответствующие пиковым пло-

щадкам, и зоны двухпарного зацепления с нарастанием напряжения при входе в зацепление и убыванием при выходе в результате перераспределения нагрузки между зубьями. Кроме того, даже при небольшой скорости зубьев заметны пики на графиках напряжений, соответствующие входу новых зубьев в зацепление с ударом в результате отклонения профиля зуба от теоретического под действием нагрузки.



**Рисунок 9. Распределение изгибных напряжений во впадине зубьев в течение фазы зацепления при частоте вращения шестерни 400 об/мин**

На рисунке 9 показано изменение распределения изгибных напряжений при добавлении динамической составляющей нагрузки в зацеплении с увеличением частоты вращения передачи до 400 об/мин. Как видно, общий вид кривой изгибных напряжений представляет собой наложение графика изгибных напряжений (рисунок 7) во впадине зуба при статическом нагружении и динамической составляющей напряжений, определяемой присутствием крутильных колебаний в системе.



**Рисунок 10. Результаты моделирования: изгибные напряжения во впадине зубьев при проходе системы через резонанс с нарастанием скорости**

Более универсальное и информативное решение задачи динамики зацепления может быть получено за счет моделирования зацепления на всем рабочем диапазоне частот с полу-

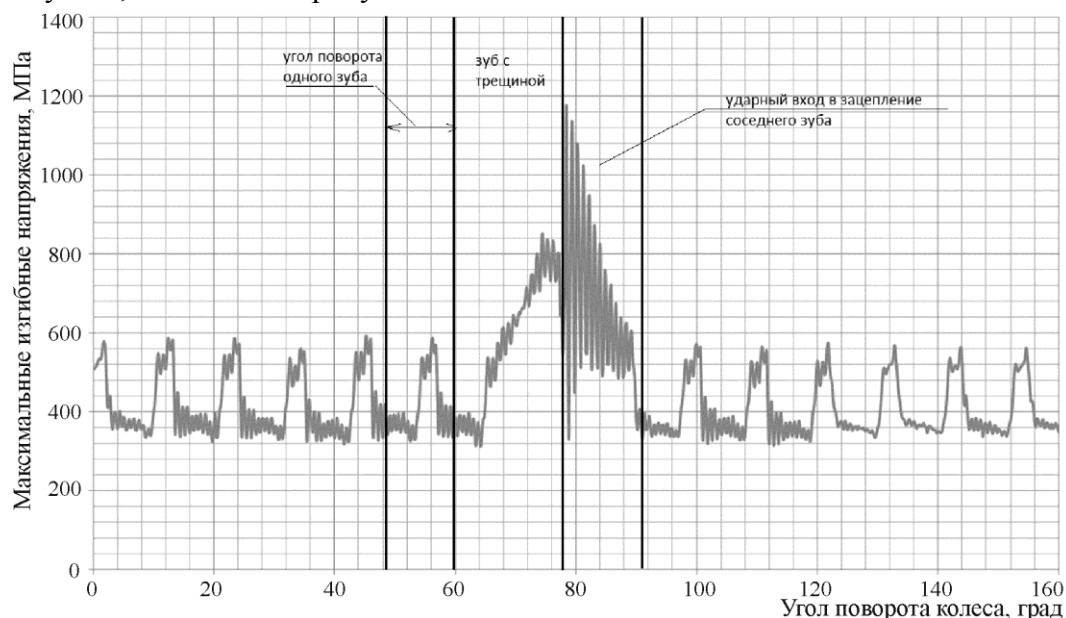
чением амплитудно-частотных характеристик. Моделирование зацепления двух зубчатых колес проводится с разгоном из положения равновесия до рабочих частот вращения, последующим останом и проходом в обратную сторону со снижением частоты вращения. Первоначально задается преднагрузка крутящим моментом для ведомой шестерни и далее используется плавное увеличение частоты вращения, обеспечивающее исключение динамической составляющей инерционной нагрузки от разгона. Важно отметить, что процесс выхода на рабочую частоту вращения модели зубчатой передачи требует значительного времени моделирования, т.е. данный тип расчета следует применять при проверочных расчетах, но не на этапе проектирования и выбора оптимальных параметров передачи.

На рисунке 10 представлены результаты моделирования изгибных напряжений для цилиндрической прямозубой передачи с проходом через резонансные частоты. Как видно, результаты моделирования зацепления методом конечных элементов в динамической постановке согласуются с АЧХ для коэффициента динамичности передачи  $Kfv$ , полученной полуаналитическим методом и представленной на рисунке 6.

#### 4. Моделирование зацепления зубьев с дефектом

Важным преимуществом моделирования зацепления МКЭ является возможность наглядной оценки нестационарных процессов в зацеплении, например, контакт зубьев, в одном из которых присутствует трещина в ножке зуба (наиболее распространенный и опасный дефект), на высокой окружной скорости.

Проход в зацеплении зуба с трещиной представляет собой процесс резкого снижения жесткости в зацеплении с нерасчетным ударом при входе в зацепление следующей пары зубьев с нормальной жесткостью. Интерес представляет оценка уровня динамических напряжений во впадине в момент прохода в зацеплении зубьев с трещиной, которая позволит спрогнозировать время от начала развития трещины до поломки колеса и выявить косвенные признаки зарождения дефекта. С помощью МКЭ смоделирован процесс зацепления таких зубчатых колес при частоте вращения ведущей шестерни 500 об/мин. Результаты вычисления максимальных растягивающих напряжений в колесе, имеющем введенную трещину в одном из зубьев, показаны на рисунке 11.

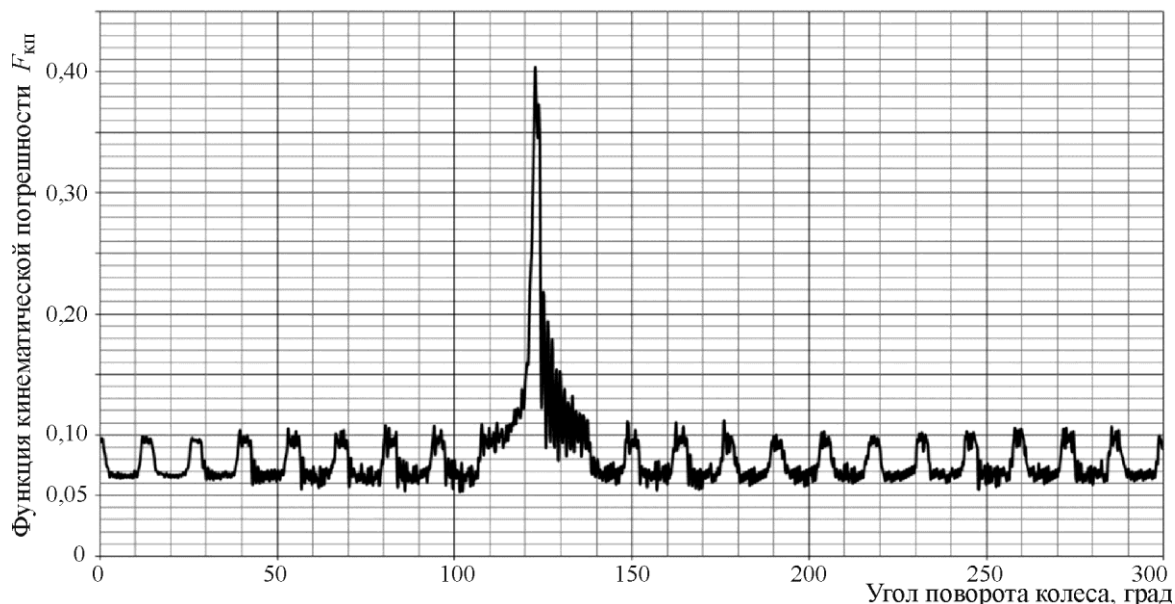


**Рисунок 11. Запись максимальных первых главных напряжений в колесе с трещиной у ножки зуба при частоте вращения 500 об/мин**

Как видно из рисунка 11, максимальный уровень напряжений имеет впадина зуба, следующего за зубом с трещиной у ножки, и значение изгибных напряжений близко к пределу прочности для сталей зубчатых колес. То есть после начала зарождения трещины в одном из



зубьев, с каждым следующим оборотом соседние зубья будут испытывать предельные динамические нагрузки, которые могут привести к их разрушению. Данный результат довольно близко описывает картину разрушения зубьев на экспериментальных колесах [11], при поломках которых за короткий промежуток времени разрушались все зубья. При этом всего несколько изломов зубьев имели чисто усталостный характер поломки, а остальные разрушились от высоких ударных нагрузок со значительными пластическими деформациями.



**Рисунок 12. Кинематическая погрешность передачи с проходом через зацепление зуба с трещиной у ножки**

На рисунке 12 показана запись сигнала кинематической погрешности передачи при проходе через зацепление зуба с внесенной трещиной. Как видно из записи, амплитуда кинематической погрешности возрастает в 4 раза. Фактически такой уровень изменения сигнала кинематической погрешности может быть успешно диагностирован на работающей зубчатой передаче с помощью датчиков угла поворота и соответствующей аппаратуры.

### Выводы

Применение метода конечных элементов для моделирования динамических процессов в зацеплении зубчатых колес позволяет эффективно определять точные зависимости характеристик жесткости и статической кинематической погрешности с подробной оценкой влияния геометрии профиля зубьев и выбора оптимальных параметров модификации. Применение полученных характеристик жесткости зубчатых передач с различными геометрическими параметрами в составе аналитических моделей динамики зацепления позволяет оценивать изменение динамических нагрузок в зацеплении, а также распределение изгибных и контактных напряжений в течение фазы зацепления. Показано влияние модификации профиля прямозубых передач на уровни динамических нагрузок во всем диапазоне частот. Возможности моделирования процесса зацепления на рабочих частотах вращения неявными методами динамики позволяют оценить реальное поведение передачи при возникновении дефектов или проходе через резонансные режимы, что затруднительно оценить экспериментальным путем. Показано, что при зарождении трещины у ножки зуба, максимальные динамические напряжения испытывают зубья, соседние к дефектному, из-за ударного входа в контакт, обусловленного резким снижением жесткости пары зубьев с трещиной.

### Литература

1. Петрусевиц А.И., Генкин М.Д., Гринкевич В.К. Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колесами. М.: Изд-во ИМАШ АН СССР, 1956.

2. Шорр Б.Ф. К расчету динамических нагрузок на зубьях прямозубых цилиндрических колёс // «Прочность и динамика авиационных двигателей», вып. 5, 1969. М.: Машиностроение. С. 127-162.
3. Ковалев Н.А. Колебания зубчатых передач при ступенчатом изменении жесткости и постоянной ошибке шага зацепления // Изв. АН СССР. ОНТЮ Механика и машиностроение, 1961 № 2, с. 92-101.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. /Ред. В.Н. Челомей. М.: Машиностроение, 1980 – Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов/ Под ред. Ф. Диментерберга и К.С. Колесникова.
5. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979.
6. Kahraman A., Blankenship G.W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters // ASME Appl. Mech., 64(1), 1997. pp. 217-226.
7. Parker R.G. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons // Journal of Sound and Vibration 273(3), 2000, pp. 435-455.
8. Kahraman A., Lim J., Ding H. A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction // 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June18-21, 2007.
9. Singh R., Houser D.E. Non-Linear Dynamic Analysis of Geared Systems // Technical Report 90-C-020 AVSCOM, NASA, 1991.
10. Kalinin D.V., Temis Y.M. Non-linear dynamic of geared system // Materials of Int. conference MSM-2014, Opole, Poland, 2014.
11. Kalinin D.V., Kozharinov E.V., Panov S.A. Experimental search of bifurcation in aviation gears // Abstract collection of International forum "Engine 2014", Moscow, 2014.
12. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.