

Об устойчивости упругопластических оболочек при пропорциональных докритических процессах комбинированного нагружения

д.т.н. проф. Охлопков Н.Л., Нигоматулин Ф.В., к.т.н. Соколов С.А., Черемных С.В.

Тверской государственный технический университет

8 (920) 696-49-95, Fedor.nigomatulin@mail.ru

8 (4822) 52-63-63, kafsm@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача бифуркации тонкостенной круговой цилиндрической оболочки при пропорциональном докритическом нагружении осевой сжимающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина $\Xi^{(3)}$. Связь напряжений и деформаций принята в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности. Для определяющих функций пластичности использованы аппроксимации В.Г. Зубчанинова [1].

Ключевые слова: пластичность, устойчивость, сложное нагружение, оболочка.

Решается задача бифуркации круговой цилиндрической оболочки при пропорциональном (простом) докритическом нагружении осевой сжимающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением в девиаторном пространстве деформаций А.А.Ильюшина $\Xi^{(3)}$ (рисунок 1). Ориентация траектории деформаций определяется полярными углами α_1 и α_2 .

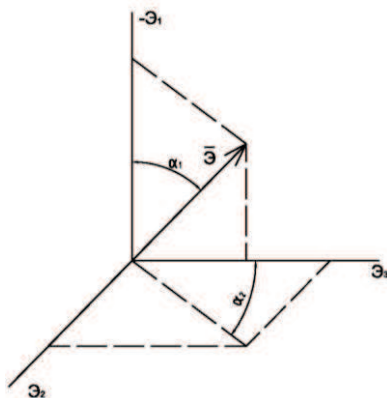


Рисунок 1. Траектории деформирования

Решение задачи строится на основе теории устойчивости неупругих систем при сложном нагружении В.Г. Зубчанинова [1]. Используются уравнения теории пологих оболочек, условие несжимаемости материала и условие однородности напряженного состояния в оболочке до момента потери устойчивости. Задача решается в геометрически линейной постановке.

При нагружении тонкостенной оболочки осевой сжимающей силой, крутящим моментом, внутренним или внешним давлением в ней реализуется плоское напряженное состояние. Уравнения связи напряжений и деформаций в момент потери устойчивости оболочки принимаются в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности, которые в скоростях имеют вид:

$$\dot{S}_{ij} = N\dot{\Xi}_{ij} + (\sigma' - N\tau)\dot{S} \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где: $\sigma' = d\sigma/dS = P\tau$; $\tau = \cos \vartheta_1$; $\Xi_{ij} = e_{ij}$.

Здесь S_{ij} – компоненты тензора-девиатора напряжений; Ξ_{ij} – компоненты тензора-

девиатора деформаций, $d\sigma/dS$, N – определяющие функции пластичности, ϑ_1 – угол сближения ($\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1$), S – длина дуги траектории деформации. Символ с точкой наверху означает дифференцирование по обобщенному параметру времени $d/dt = d/dS \cdot dS/dt$.

Оболочку принимаем «длинной», шарнирно подкрепленной по торцам. В результате дифференциальные уравнения равновесия элемента цилиндрической оболочки, потерявшей устойчивость, и уравнения совместности деформаций приводим к системе алгебраических уравнений задачи о собственных числах:

$$\begin{cases} -\sigma K_* i^2 / (g_1 E) + i \Omega_1^{**} / (2 g_1 S_*) = \lambda_m^2 \left[\theta + 3 K_* (\Omega_2^{**} - \Omega_1^{**} N_2^* / N_1^*) / (4 g_1) \right], \\ e = -2i / (S_* \lambda_m^2) - (\theta_1 \Omega_1^{**} + N_2^* K_*) / N_1^* \end{cases}, \quad (2)$$

где:

$$K_* = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* r^2 - 2 \sigma_{12}^* r, \quad S_* = S_{11}^* r^2 + S_{22}^* + 2 S_{12}^* r, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma}, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad r = \frac{n}{\lambda_m},$$

$$g_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{2} \left(N_3^* - \frac{N_2^{*2}}{N_1^*} \right), \quad \theta = (1 + r^2)^2 - K_*^2 / 2, \quad \theta_1 = 2(1 + r^2)^2 / (3 S_*^2) - 1, \quad (3)$$

$$2G \cdot N_m^* = \int_{-1}^1 N(z^*)^{m-1} dz^*, \quad 2G \cdot \Omega_m^{**} = \int_{-1}^1 \sigma' \dot{S}^*(z^*)^{m-1} dz^*, \quad z^* = 2z/h,$$

$i = 3R/h$ – гибкость оболочки, R – радиус срединной поверхности, h – толщина стенки оболочки.

В предлагаемом варианте решения задачи для функции пластичности N и $d\sigma/dS$ используем аппроксимации В.Г. Зубчанинова [2]:

$$N = 2G_p + [2G - 2G_p^0] \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \right)^p,$$

$$\frac{d\sigma}{dS} = 2G_k - [2G + 2G_k^0] \left(\frac{1 - \cos \vartheta_1}{2} \right)^q, \quad (4)$$

где: G, G_k, G_p – модуль сдвига, касательный и секущий модули сдвига материала соответственно, p и q – материальные параметры аппроксимаций, определяемые из экспериментов по плоскому вееру двузвенных траекторий.

Согласно принятым аппроксимациям, функции пластичности изменяются непрерывно, в зависимости от τ и z . Координату границы раздела зон определять нет необходимости, интегралы Ω_m^{**} и N_m^* в (3) определяются численно по методу Симпсона. При этом оболочка по толщине разбивается на 20 слоев. В качестве нулевого приближения на каждом этапе нагружения оболочки используется решение при чистопластической бифуркации, когда излом траектории при потере устойчивости не учитывается. Методика реализации итерационного процесса приведена в [3].

В расчетах по теории устойчивости А.А. Ильюшина, в которой используются определяющие соотношения теории квазипростых процессов, система разрешающих алгебраических уравнений приводится к виду [2]:

$$i^2 \frac{\sigma}{E g_1} \left[-K_* - \frac{E N_1^*}{2 \sigma v \lambda_m^2} \right] + i \frac{3 N_1^* \Phi^*}{2 g_1 v} K_* S_* = \lambda_m^2 \left[(1 + r^2)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{g_2}{g_1} \right) K_*^2 + \frac{9 N_1^* \Phi^{*2}}{8 g_1 v} K_*^2 S_*^2 \right],$$

$$c v = \frac{N_1^*}{2 \lambda_m^2} - \frac{3}{4} \frac{N_1^* \Phi^*}{i} K_* S_*, \quad v = (1 + r^2)^2 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{N_1^*}{P_1^*} \right) S_*^2. \quad (5)$$

Интегралы N_m^* и P_m^* принимают вид:

$$\begin{aligned}
N_m^* &= \frac{1}{m} [1 - (-1)^m - \omega(1 - z_p^{*m})], \\
P_m^* &= \frac{1}{m} [1 - (-1)^m - \lambda(1 - z_p^{*m})], (m = 1, 2, 3), \\
\Phi &= \frac{P_2^*}{P_1^*} - \frac{N_2^*}{N_1^*},
\end{aligned} \tag{6}$$

где: ω – параметр пластичности А.А. Ильюшина, λ – параметр разупрочнения.

При этом полагаем, что в зоне пластической догрузки $\mathcal{A}_1 = 0^\circ (\tau = 1)$, в зоне упругой разгрузки $\mathcal{A}_1 = 180^\circ (\tau = -1)$ и необходимо определять координату z_p^* , границы раздела данных зон, для чего имеем уравнение [1]:

$$P_1^* z_p^* - P_2^* = 2cS_* i K_*^{-1}. \tag{7}$$

Выражения для безразмерных напряжений, входящие в уравнения (3) и (5), в соответствии с обозначениями на рисунке 1, принимают вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2), \\ \sigma_{22}^* = \sqrt{2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \\ \sigma_{12}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{11}^* = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos \alpha_1, \\ S_{22}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \alpha_1, \\ S_{12}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{cases} \tag{8}$$

Решение бифуркационной задачи позволяет для заданной комбинации полуволн m , n вычислить критическую гибкость оболочки i в зависимости от значения модуля вектора напряжений σ в момент потери устойчивости.

В расчетах значения n варьировались в диапазоне от 0 до 30 и значения m в диапазоне от 1 до 30. В качестве материала оболочек принимаем сталь 40Х [3].

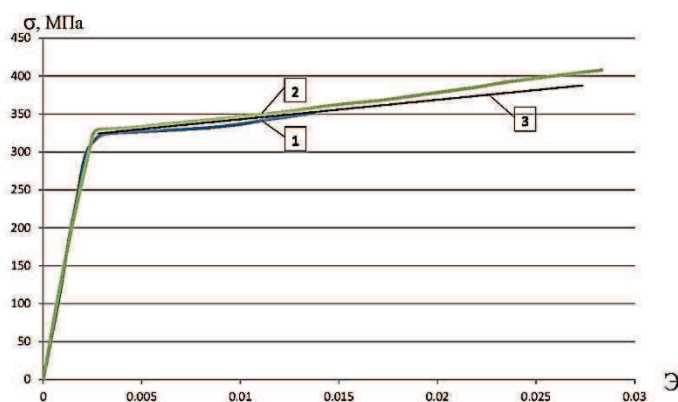


Рисунок 2. Диаграммы деформирования стали 40Х

На рисунке 2 приведены экспериментальные диаграммы деформирования материала при простых процессах (сжатие – кривая 1 и кручение – кривая 2) и линейная в зоне упрочнения аппроксимация диаграмм (график 3). Как видно из рисунка, материал является

начально изотропным.

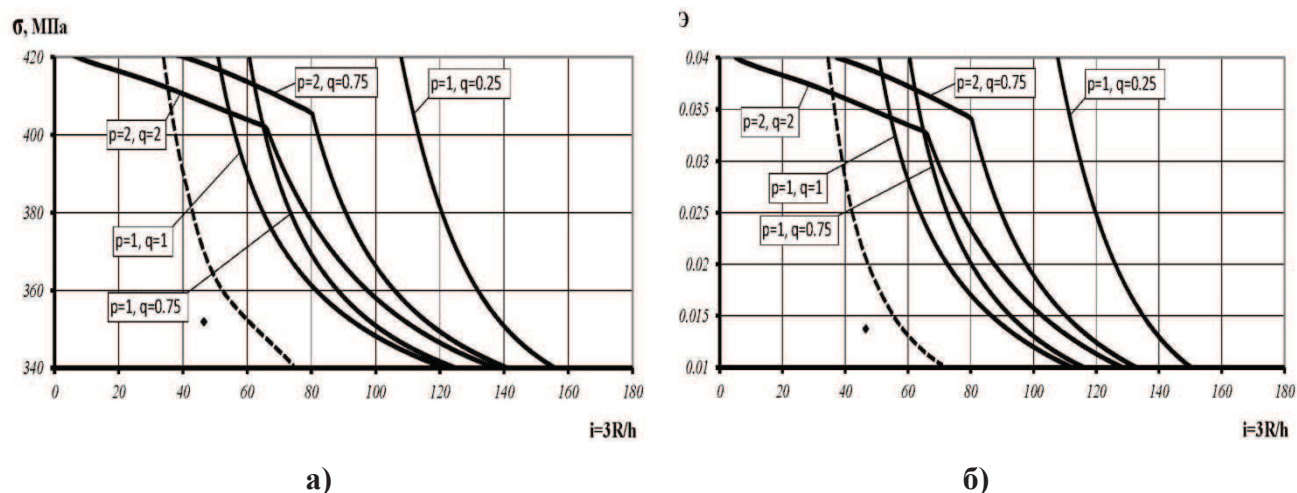


Рисунок 3. Огибающие кривых устойчивости при $\alpha_1=0^\circ$, $\alpha_2=0^\circ$

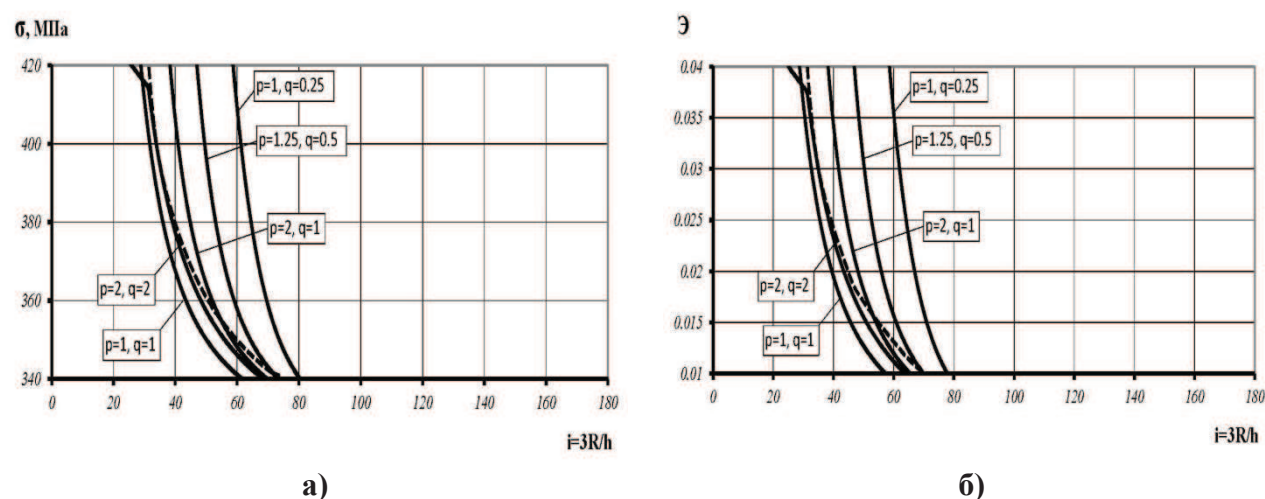


Рисунок 4. Огибающие кривых устойчивости при $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=0^\circ$

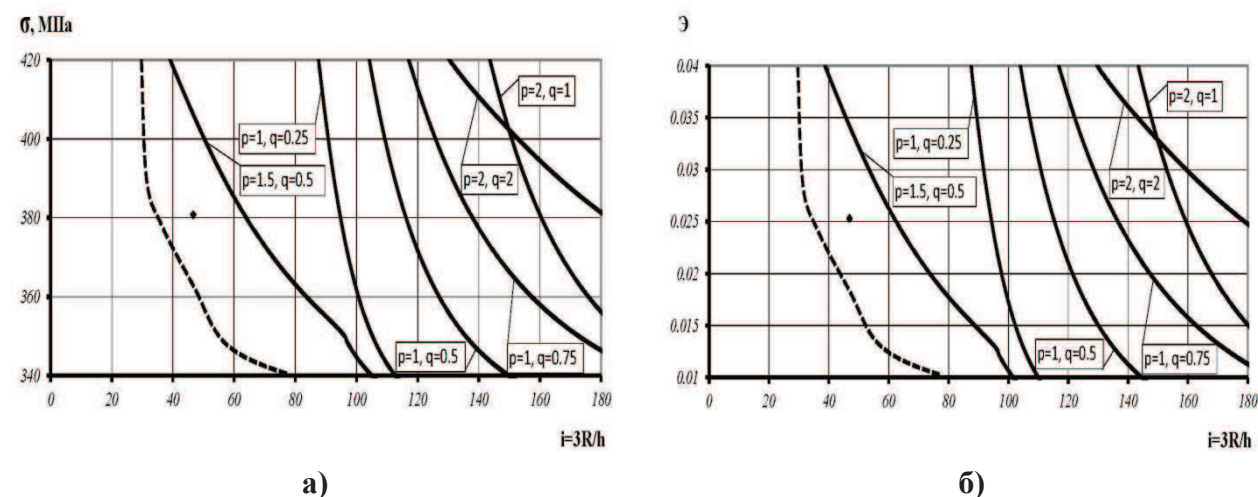


Рисунок 5. Огибающие кривых устойчивости при $\alpha_1=60^\circ$, $\alpha_2=0^\circ$

На рисунках 3 – 6 для четырех пропорциональных докритических процессов, реализованных в плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$, показаны графики устойчивых состояний оболочек, построенные как огибающие кривых устойчивости, полученных для различных комбинаций параметров волнообразования m и n . Пунктирными линиями отображены результаты, полученные на основе теории устойчивости А.А. Ильющина с учетом разгрузки материала.

Сплошными линиями показаны результаты решения задачи, полученные при использовании аппроксимаций (4) при различных значениях материальных параметров p и q . Условными символами показаны экспериментальные точки. Экспериментальные данные взяты из опытов выполненных В.Г. Зубчаниновым и Н.Л. Охлопковым [3]. Представлены как критические параметры напряжений, так и деформаций.

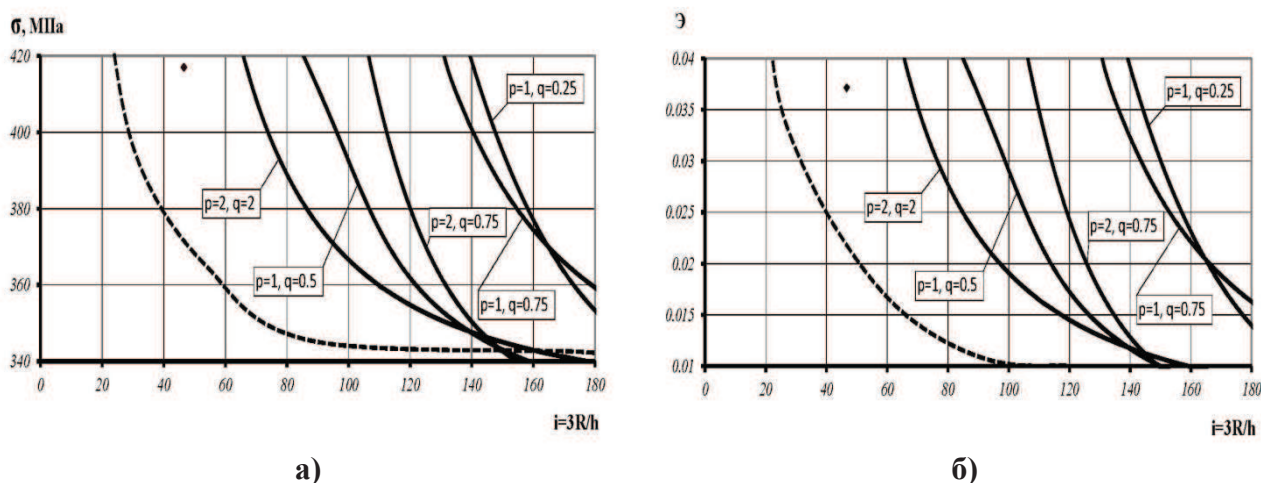


Рисунок 6. Огибающие кривых устойчивости при $\alpha_1=90^\circ$, $\alpha_2=0^\circ$

Как видно из рисунков, варьирование параметров p и q приводит к существенному изменению результатов расчетов. Причем для представленных процессов пропорционального нагружения наилучшее приближение расчетов к экспериментальным данным реализуется при различных значениях p и q .

Таблица 1.

| Нагружение | Теор. Ильюшина с разгрузкой | | | Сложное нагружение | | | Экспериментальные данные σ , МПа |
|----------------------------|-----------------------------|-------------|-------------|--------------------|-------------|-------------|--|
| | σ , МПа | S_1 , МПа | S_3 , МПа | σ , МПа | S_1 , МПа | S_3 , МПа | |
| Сжатие | 368 | 368 | 0 | 408.4 | 408.4 | 0 | 351.3 |
| Сж. + Кр. $\alpha_1=30$ | 365 | -316.1 | 182.5 | 355.6 | 308 | 177.8 | |
| Сж. + Кр. $\alpha_1=60$ | 363 | -181.5 | 314.37 | 406.4 | 203.2 | 351.95 | 380.02 |
| Кручение | 371 | 0 | 371 | 526.4 | 0 | 526.4 | 416.3 |

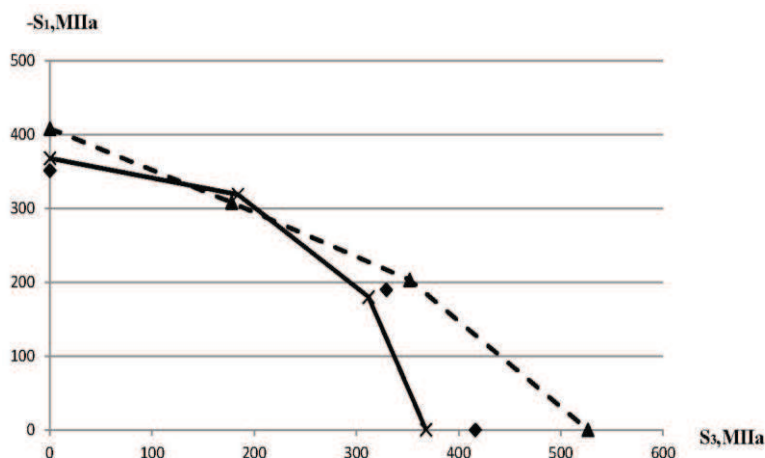


Рисунок 7. Область устойчивых состояний оболочки в плоскости $S_1 - S_3$

На рисунке 7 в плоскости $S_1 - S_3$ показана область устойчивых состояний оболочек с гибкостью $3i = 46,5$ (соответствует гибкости оболочек, на которых выполнены эксперименты).

Графики построены на основе данных, представленных на рисунках 3 – 6 и приведенных в таблице 1. Условные обозначения на всех рисунках одинаковы.

Как следует из представленных результатов, наибольшее различие расчетных параметров, полученных по двум теориям, наблюдается при реализации чистого кручения оболочки. При этом отклонение от экспериментальных данных, в целом, сопоставимо. Таким образом, для рассматриваемых траекторий, при решении задачи бифуркации оболочки, можно ограничиться теорией устойчивости А.А.Ильюшина, как наиболее простой математически и при реализации процесса счета и, одновременно, физически достоверной.

Литература

1. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 448 с.
2. Зубчанинов, В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.
3. Зубчанинов, В.Г. Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гаранников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.