Колебания систем с дискретным числом степеней свободы с сухим трением

д.т.н. проф. Пожалостин А.А., к.ф.-м.н. доц. Паншина А.В., д.т.н. проф. Кокушкин В.В.
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
8-(499)-263-63-75 panalv@mail.ru

Аннотация. Разработан приближенный аналитический метод решения задач о вынужденных колебаниях механических систем с дискретным числом степеней свободы с учетом сил сухого трения. Сухое трение заменяется эквивалентным вязким сопротивлением. С этой целью используется метод собственных функций для систем с дискретным числом степеней свободы, что позволяет заменить исходную систему некоторой эквивалентной системой. При этом постулируется равенство частот исходной и приведенной систем. Предлагаемый метод иллюстрируется на примере колебательной системы с двумя степенями свободы.

Ключевые слова: малые колебания, нормальные координаты, вынужденные колебания, форма колебаний, сухое кулоново трение.

Цель работы – разработка метода расчета вынужденных колебаний механических систем с дискретным числом степеней свободы с сухим трением.

Приняты основные допущения:

- вынужденные колебания полагаются малыми;
- сухое трение предполагается небольшим.

Разработан приближенный аналитический метод решения задач о вынужденных колебаниях систем с дискретным числом степеней свободы. Действие сил сухого трения заменяется эквивалентным вязким сопротивлением. Такая замена используется в полной мере после приведения исходной системы к нормальным координатам. После этого получаются дифференциальные уравнения, каждое из которых аналогично уравнению вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, но для нормальной координаты. Далее для каждого уравнения в отдельности применяется подход, изложенный в [1].

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примере колебательной системы с двумя степенями свободы (рисунок 1).

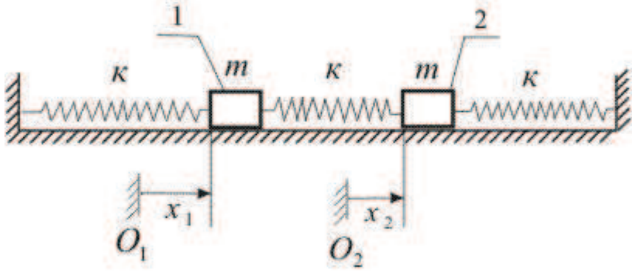

Рисунок 1. Колебательная система с двумя степенями свободы

Система представляет собой цепочку упруго-массовых элементов (рисунок 1). Здесь m – массы двух одинаковых грузов, κ – коэффициент линейной жесткости невесомых пружин. На первый груз действует сила сухого трения $F_{тр}$ и вынуждающая сила $F(t) = F_o \cos pt$, изменяющаяся по гармоническому закону. Здесь F_o – амплитуда возмущающего воздействия, p – частота возмущающего воздействия, t – время. На второй груз сила трения не действует. Введем обобщенные координаты x_1 и x_2 (рисунок 1).

Изобразим отдельно грузы и действующие на них силы (рисунок 2).

Запишем дифференциальные уравнения движения системы [2]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -F_{упр1} - F_{упр2} - F_{тр} + F(t), \\ m\ddot{x}_2 = F'_{упр2} - F_{упр3}, \end{cases} \tag{1}$$

где: $F_{упр1} = \kappa x_1$, $F_{упр2} = F'_{упр2} = \kappa(x_1 - x_2)$, $F_{упр3} = \kappa x_2$.

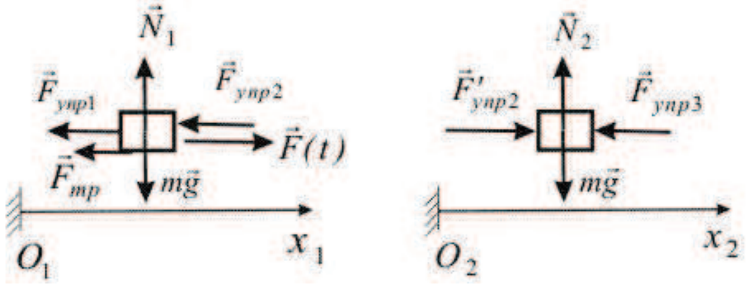

Рисунок 2. Грузы и действующие на них силы

Перепишем уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2\kappa x_1 - \kappa x_2 = -F_{тр} + F_o \cos pt, \\ m\ddot{x}_2 - \kappa x_1 + 2\kappa x_2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решения соответствующих однородных уравнений системы (2) ищем в виде [2, 3]:

$$x_1 = A\cos(\omega t + \alpha), \quad x_2 = B\cos(\omega t + \alpha).$$

Введем безразмерную частоту колебаний $\overline{\omega}^2 = \omega^2 \dfrac{m}{\kappa}$.

Частотное уравнение системы (2) имеет вид [2, 3]:

$$\overline{\omega}^4 - 4\overline{\omega}^2 + 3 = 0.$$

Решая его, получим собственные частоты колебаний:

$$\overline{\omega}_{1,2}^2 = 2 \pm 1, \quad \overline{\omega}_1^2 = 1, \quad \overline{\omega}_2^2 = 3.$$

Вычислим коэффициенты формы колебаний $\left(\dfrac{B}{A}\right)_i = \lambda_i \ (i = 1,2)$ [2, 3]:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Введем нормальные координаты ξ и η с учетом форм колебаний:

$$x_1 = \xi + \eta, \quad x_2 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta = \xi - \eta. \qquad (3)$$

Подставим соотношения (3) в дифференциальные уравнения движения системы (2):

$$m\ddot{\xi} + m\ddot{\eta} + \kappa\xi + 3\kappa\eta = -F_{тр} + F_o \cos pt, \qquad (4)$$

$$m\ddot{\xi} - m\ddot{\eta} + \kappa\xi - 3\kappa\eta = 0. \qquad (5)$$

Складывая уравнения (4) и (5) и вычитая из уравнения (4) уравнение (5), получим дифференциальные уравнения колебаний системы в нормальных координатах:

$$2m\ddot{\xi} + 2\kappa\xi = -F_{тр} + F_o \cos pt, \qquad (6)$$

$$2m\ddot{\eta} + 6\kappa\eta = -F_{тр} + F_o \cos pt. \qquad (7)$$

Рассмотрим уравнение (6), то есть ограничимся колебаниями системы только по первому тону с частотой $\overline{\omega}_1^2 = 1$.

Ищем частное решение (вынужденные колебания) в следующем виде:

$$\xi^* = D\cos(pt - \alpha). \qquad (8)$$

Заменим силу сухого трения эквивалентным вязким сопротивлением. Для этого вычислим коэффициент эквивалентного вязкого сопротивления аналогично [1, 4].

Найдем работу силы трения $\vec{F}_{тр}$ за время периода вынужденных колебаний системы $T_в = \dfrac{2\pi}{p}$:

$$A(\vec{F}_{тр}) = 4DF_{тр}.$$

Найдем работу сил вязкого сопротивления с коэффициентом μ_1:

$$A_\mu = \int_0^{T_в} \mu_1 (\dot{\xi}^*)^2 dt = \mu_1 \int_0^{T_в} D^2 p^2 \sin^2(pt-\alpha)\, dt = \mu_1 D^2 p^2 \frac{T_в}{2} = \mu_1 D^2 p^2 \frac{2\pi}{2p} = \mu_1 \pi D^2 p.$$

Приравняв работу силы трения $A(\vec{F}_{тр})$ за время периода вынужденных колебаний системы работе сил вязкого сопротивления A_μ за то же время, получим коэффициент вязкого сопротивления:

$$4DF_{тр} = \mu_1 \pi D^2 p \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \frac{4F_{тр}}{\pi D p}. \qquad (9)$$

С учетом функции Рэлея $\Phi = \dfrac{\mu_1 \dot{\xi}^2}{2}$ дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (6) примет вид:

$$2m\ddot{\xi} + \mu_1 \dot{\xi} + 2\kappa\xi = F_o \cos pt. \qquad (10)$$

В каноническом виде уравнение (10) будет следующим:

$$\ddot{\xi} + 2n_1\dot{\xi} + \omega_1^2 \xi = h \cos pt. \qquad (11)$$

Здесь $n_1 = \dfrac{\mu_1}{4m}$ – коэффициент затухания, $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}$ – частота свободных колебаний системы 1-го тона без сил трения, $h = \dfrac{F_o}{2m}$ – приведенная амплитуда внешнего воздействия.

Частное решение (8) уравнения (11) (вынужденные колебания) имеет вид [2, 3]:

$$\xi^* = D\cos(pt-\alpha) = \frac{h}{\sqrt{(\omega_1^2 - p^2)^2 + 4n_1^2 p^2}} \cos(pt-\alpha).$$

Выпишем амплитуду вынужденных колебаний:

$$D = \frac{h}{\sqrt{(\omega_1^2 - p^2)^2 + 4n_1^2 p^2}} = \frac{F_o/2m}{\sqrt{(\frac{\kappa}{m} - p^2)^2 + 4\frac{\mu_1^2}{16m^2} p^2}}.$$

С учетом (9), имеем соотношение с амплитудой D слева и справа:

$$D = \frac{F_o/2m}{\sqrt{(\frac{\kappa}{m} - p^2)^2 + 4(\frac{4F_{тр}}{\pi D p})^2 p^2/(16m^2)}}. \qquad (12)$$

Преобразовав соотношение (12), получим уравнение для амплитуды вынужденных колебаний D:

$$m^2(\frac{\kappa}{m} - p^2)^2 D^2 + \frac{4F^2_{тр}}{\pi^2} = F_o^2. \qquad (13)$$

Сила сухого трения скольжения первого груза $F_{тр} = fN_1 = fmg$ (см. рисунок 2), где f – коэффициент трения 1-го рода [1].

Из квадратного уравнения (13) получим следующее выражение:

$$D = \pm \frac{1}{(\frac{\kappa}{m} - p^2)} \sqrt{\frac{F_o^2}{m^2} - \frac{4f^2g^2}{\pi^2}}. \qquad (14)$$

Полученная функция (14) является приближенной амплитудно-частотной характеристикой системы для нормальной координаты ξ.

Заключение

В работе аналитически получено приближенное выражение для амплитудно-частотной характеристики механической системы с дискретным числом степеней свободы с учетом сил сухого трения.

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Москва: КомКнига, 2006. 439 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. Москва: Высшая школа, 1968. 621 с.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. СПб.: Лань, 2005. 438 с.
4. Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. Колебания упругих одномерных систем с трением//Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 12. URL: http://engiournal.ru/catalog/eng/teormech/1136.html