

Лазарев А.А.

ЦИАМ им. П.И. Баранова, МГТУ им. Н.Э. Баумана

tejour@ciam.ru

*Аннотация.* Показана эффективность метода Эйткена ускорения сходимости итерационного процесса метода дополнительных деформаций на примере решения задачи о кручении стержня в упругопластической постановке методом граничных элементов. Рассмотрены варианты с уточнением решения через одну итерацию и на каждой итерации, проведено численное исследование скорости сходимости.

*Ключевые слова:* метод дополнительных деформаций,  $\delta^2$ -метод Эйткена, пластичность, метод граничных элементов

### Введение

Метод дополнительных – деформаций, предложенный И.А. Биргером в 1951 г. для решения задач деформационной теории пластичности [1, 2], обладает как рядом преимуществ, так и рядом недостатков по сравнению с методом переменных параметров упругости и методом Ньютона. К основному преимуществу метода следует отнести то, что он не требует пересчета и обращения оператора задачи на каждой итерации. Недостатком метода является невысокая скорость сходимости, которая оценивается соотношением [3]:

$$\|u^* - u_2\|_{H_e^0} \leq \beta \|u^* - u_1\|_{H_e^0}, \quad (1)$$

$$\beta = M_\Omega \left[ \left| 1 - \frac{\Psi_0}{\Psi_1} \right| + \frac{\Psi_0}{\Psi_1} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{i(1)}}{\sigma_{i(1)}} \cdot \frac{\sigma_i^* - \sigma_{i(1)}}{\varepsilon_i^* - \varepsilon_{i(1)}} \right) \right], \quad (2)$$

где:  $u^*$  – точное решение задачи;  $u_1, u_2$  – два последовательных приближения, причем  $u_2$  вычислено по значениям  $u_1$ ;  $\Psi_0$  – параметр управления итерационным процессом;  $\Psi_1$  – распределение параметра пластичности, вычисленное по  $u_1$ ;  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, x, T)$  – обобщенная кривая деформирования неоднородного материала;  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформаций;  $T$  – температура;  $M_\Omega f$  – интегральное среднее функции  $f$  по области  $\Omega$ .

Зависимости (1) и (2) получены в [3] для обобщенного метода дополнительных деформаций. Как показано в работе [3], изменяя параметр  $\Psi_0$  в диапазоне  $0 < \Psi_0 < 2$  можно найти такое значение, при котором число итераций метода дополнительных деформаций до достижения заданного уровня относительной погрешности будет близко к числу итераций метода переменных параметров упругости. При этом время расчета обобщенным методом дополнительных деформаций окажется существенно меньше, чем время расчета с применением метода переменных параметров упругости.

Метод переменных параметров упругости и метод Ньютона широко используют для решения задач пластичности методом конечных элементов. Однако при решении задач методом граничных элементов простых альтернатив методу обобщенных дополнительных деформаций нет [4]. Поэтому задача поиска алгоритма, обеспечивающего более высокую скорость сходимости при применении соотношений обобщенного метода дополнительных деформаций, представляет интерес. Определенные результаты для алгоритмов, скорость сходимости которых оценивается неравенствами типа (1), могут быть получены при применении  $\delta^2$ -метода Эйткена [5].

**Метод Эйткена**

Если погрешность вычисления векторной величины  $y$  разлагается в степенной ряд вида:

$$y - y^k = \sum_{i=1} c_i (q_i)^k, \tag{3}$$

где:  $c_i$  – вектора с постоянными компонентами,  $0 < q_i < 1$  – константы,

то пренебрегая в сумме (3) всеми членами, кроме первого, несложно получить формулы метода Эйткена [5]:

$$q_1 = \frac{(y^k - y^{k-1}, y^k - y^{k-1})}{(y^{k-1} - y^{k-2}, y^k - y^{k-1})}, \beta = \frac{1}{1 - q_1}, \tag{4}$$

$$y = \beta y^k + (1 - \beta) y^{k-1}. \tag{5}$$

В такой интерпретации метод Эйткена сводится к определению параметров векторной геометрической прогрессии по ее трем членам. Так как векторные величины делить друг на друга нельзя, предварительно следует спроектировать их на какое-либо направление, например  $(y^k - y^{k-1})$ , с чем связано появление в соотношении (4) скалярных произведений.

Выражение (5) в виде:

$$y = y^{k-1} + \beta \cdot (y^k - y^{k-1}) \tag{6}$$

дает возможность интерпретировать метод Эйткена как метод релаксации с параметром

$$\beta = \frac{(y^{k-2} - y^{k-1}, y^k - y^{k-1})}{(y^k - 2y^{k-1} + y^{k-2}, y^k - y^{k-1})}. \tag{7}$$

Проектируя вектора в соотношении (4) на направление  $(y^{k-1} - y^{k-2})$  получим:

$$\beta' = \frac{(y^{k-2} - y^{k-1}, y^{k-1} - y^{k-2})}{(y^k - 2y^{k-1} + y^{k-2}, y^{k-1} - y^{k-2})}. \tag{8}$$

Если вектора  $(y - y^k)$  действительно образуют геометрическую прогрессию, то  $\beta = \beta'$ . В практических расчетах может оказаться  $\beta \neq \beta'$ , и близость этих двух параметров можно рассматривать как критерий применимости метода Эйткена. Если в сумме (3) первое слагаемое действительно преобладает над остальными, то векторы  $(y^{k-1} - y^{k-2})$  и  $(y^k - y^{k-1})$  будут приблизительно коллинеарными и

$$\mu_k = \frac{|(y^{k-1} - y^{k-2}, y^k - y^{k-1})|}{\|y^{k-1} - y^{k-2}\| \|y^k - y^{k-1}\|} \approx 1, \tag{9}$$

что является необходимым условием применимости метода Эйткена [5] и правомерности оценки сходимости итерационного процесса по формуле:

$$\frac{\|y^k - y^{k-1}\|}{\|y^k\|} < \delta, \tag{10}$$

где  $\delta$  задает точность вычислений.

Применение метода Эйткена для ускорения метода простой итерации решения нелинейного уравнения равносильно использованию метода секущих [5, 6].

Для уточнения решения по методу Эйткена следует сначала провести три обычные итерации, а дальше использовать уточнение по формулам (4) – (7) через одну итерацию. Обозначим через  $\tilde{y}^k$  решение, полученное уточнением по Эйткену. Тогда расчетные формулы (6) и (7) примут вид:

$$\tilde{y}^k = y^{k-1} + \beta_k \cdot (y^k - y^{k-1}), \tag{11}$$

$$\beta_k = \frac{(\tilde{y}^{k-2} - y^{k-1}, y^k - y^{k-1})}{(y^k - 2y^{k-1} + \tilde{y}^{k-2}, y^k - y^{k-1})}, \tag{12}$$

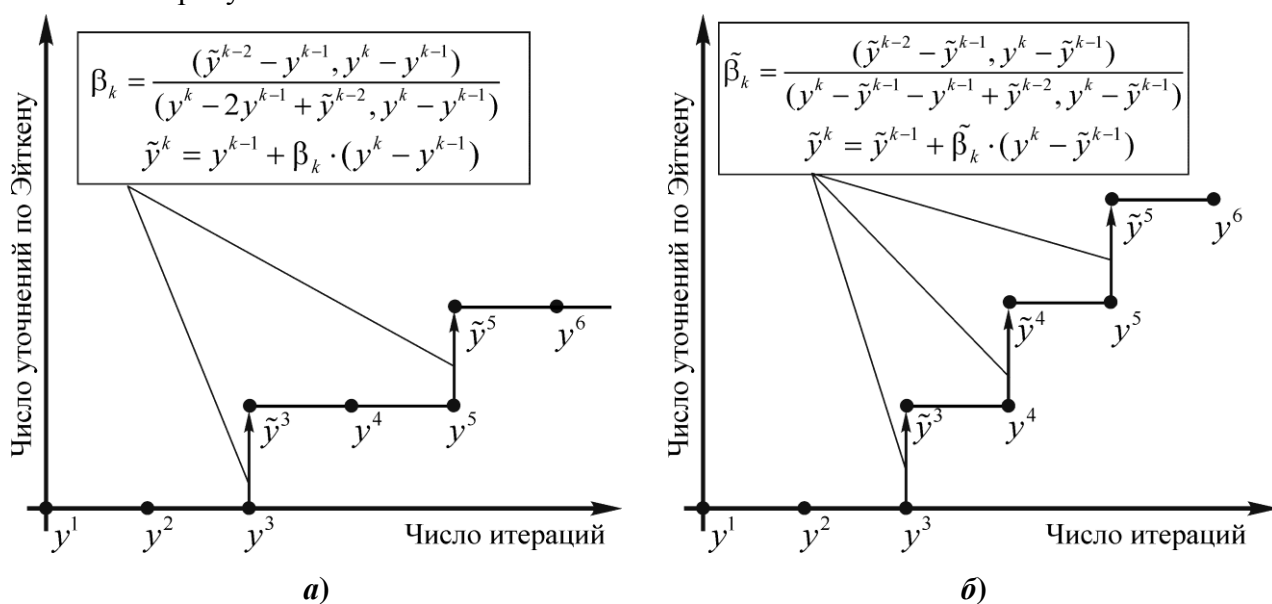
где наличие индекса у параметра  $\beta_k$  указывает на то, что параметр меняется от итерации к итерации (стабильность значений  $\beta_k$  в зависимости от номера итерации также является индикатором применимости метода Эйткена).

Для применения метода с уточнением на каждой итерации следует записать (11) и (12) в виде [6]

$$\tilde{y}^k = \tilde{y}^{k-1} + \tilde{\beta}_k \cdot (y^k - \tilde{y}^{k-1}), \quad (13)$$

$$\tilde{\beta}_k = \frac{(\tilde{y}^{k-2} - \tilde{y}^{k-1}, y^k - \tilde{y}^{k-1})}{(y^k - \tilde{y}^{k-1} - y^{k-1} + \tilde{y}^{k-2}, y^k - \tilde{y}^{k-1})}. \quad (14)$$

Схемы проведения расчетов с уточнением через одну итерацию и на каждой итерации показаны на рисунке 1.



**Рисунок 1. Схема проведения расчетов с уточнением по методу Эйткена: а – уточнение через одну итерацию; б – уточнение на каждой итерации**

Оба варианта метода требуют проведения трех обычных итераций, прежде чем станет возможным вычислить релаксационный параметр  $\beta$ . При этом  $\tilde{\beta}_1 = \beta_1$ . В работе [6] предложено использовать некоторое фиксированное значение  $\beta$ , выбранное по предварительным численным экспериментам для конкретного класса задач. Для решения динамических задач или задач с внутренним временем можно использовать  $\beta$  с предыдущего временного шага.

Рассмотрим пример использования метода Эйткена для ускорения итерационного процесса метода дополнительных деформаций решения задачи упругопластического кручения стержня методом граничных элементов. Задача кручения стержня в упругопластической постановке сводится к решению уравнения Пуассона относительно потенциала сил (функции напряжений Эри)  $\Phi(x, y)$  [7]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta - G \left( \frac{\partial \gamma_{xz}^0}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^0}{\partial x} \right), \quad (15)$$

где:  $G$  – модуль сдвига,  $\theta$  – угол закрутки,  $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$  – дополнительные (пластические) деформации.

Соответствующее граничное интегральное уравнение [4, 8] на  $k$ -ой итерации имеет вид:

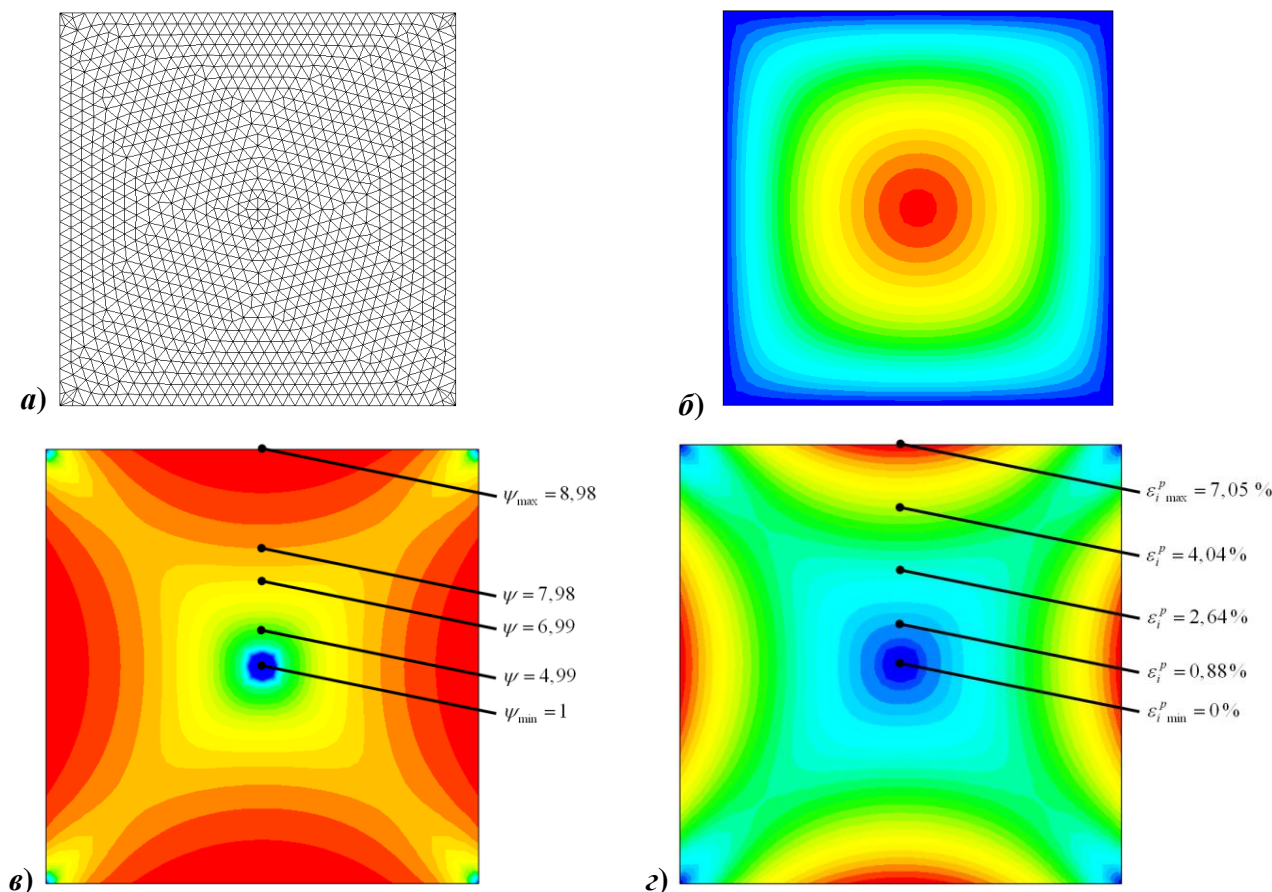
$$\zeta_i \Phi^k(x_i, y_i) + \oint_{\Gamma} \Phi^k \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} \Phi^* \frac{\partial \Phi^k}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi^* f_{\Omega}^k d\Omega, \quad (16)$$

где:  $\Phi^*$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа, точка  $(x_i, y_i)$  лежит на границе  $\Gamma$  области сечения стержня  $\Omega$ , а  $f_{\Omega}^k$  обозначает правую часть исходного уравнения (15).

Для дискретизации границы применим элементы с постоянными значениями неизвестных на них, а для интегрирования по области используем сетку треугольников. Далее используем стандартные процедуры метода граничных элементов, подробно описанные в [4, 8, 9].

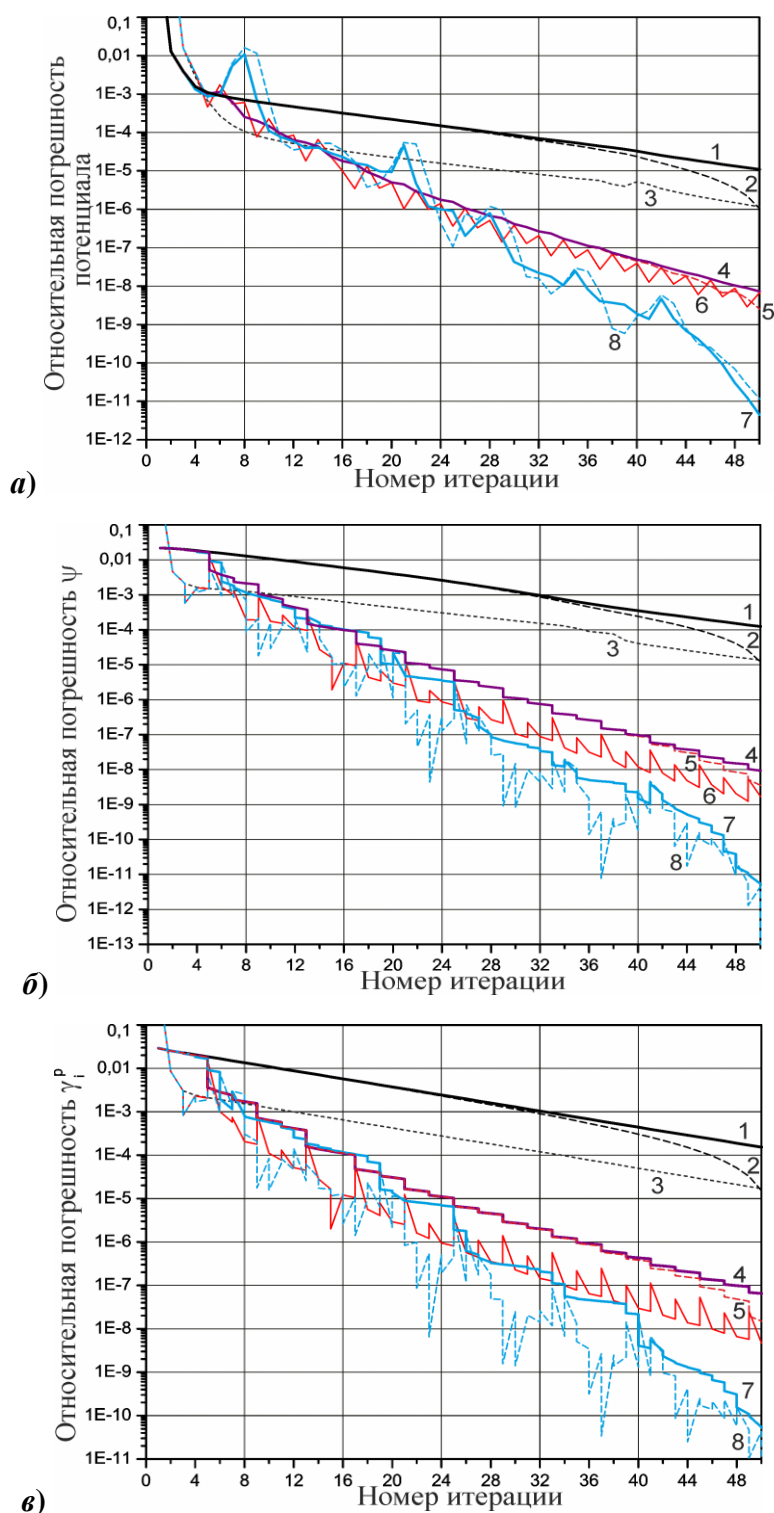
Поперечное сечение стержня представляет собой квадрат со сторонами длиной  $a = 2$  см. Используемая в расчетах сетка элементов показана на рисунке 2,а. Сетка содержит 2328 треугольных элементов для вычисления объемных интегралов и 1229 узлов, из которых 128 принадлежат границе области. В расчетах принята билинейная диаграмма упруго-пластического деформирования материала,  $G = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $G_p = 0,1 \cdot G$ ,  $\tau_T = 6 \cdot 10^8$  Па,  $\gamma_T = 0,1 \%$ .

Результаты расчетов после 51 итерации с уточнением по методу Эйткена на каждой итерации для угла закрутки  $\theta = 10$  рад приведены на рисунках 2,б–г. Как следует из дальнейшего анализа, данный метод обеспечивает как минимум не худшие результаты, чем метод с уточнением через итерацию и метод без уточнений. Максимальные значения пластических деформаций  $\max |\gamma_{xz}^p| = \max |\gamma_{yz}^p| = 12,2\%$ ,  $\max \gamma_i^p = 7,05\%$ ; максимальное значение параметра пластичности  $\max \psi = 8,98$ .



**Рисунок 2. Решение задачи упругопластического кручения стержня методом граничных элементов с использованием уточнения по методу Эйткена на каждой итерации: а – расчетная сетка; б – распределение потенциала; в – параметр пластичности; г – интенсивность пластической деформации**

На рисунке 3 показаны относительные погрешности расчета потенциала, параметра пластичности и интенсивности пластической деформации.



**Рисунок 3. Относительная погрешность расчета потенциала (а), параметра пластичности (б), интенсивности пластической деформации (в): 1 – МДД относительно последнего (51-го) шага МДД Э-2; 2 – МДД относительно последнего (51-го) шага МДД; 3 – МДД по двум соседним итерациям; 4 – МДД Э-1 относительно последнего (51-го) шага МДД Э-2; 5 – МДД Э-1 относительно последнего (51-го) шага МДД Э-1; 6 – МДД Э-1 по двум соседним итерациям; 7 – МДД Э-2 относительно последнего (51-го) шага МДД Э-2; 8 – МДД Э-2 по двум соседним итерациям**

В процессе расчета относительная погрешность вычисляется по результатам двух соседних итераций

$$\delta_1(y) = \|y^k - y^{k-1}\| / \|y^{k-1}\|, \quad (17)$$

где:  $y \in \{\Phi, \psi, \gamma_i^p\}$ .

На рисунке 3 согласно (17) построены следующие линии: 3 – для метода дополнительных деформаций (МДД), 6 – для МДД с уточнением по методу Эйткена через одну итерацию (МДД Э-1), 8 – для МДД с уточнением на каждой итерации (МДД Э-2). Качественное поведение погрешностей  $\delta_1(\psi)$  и  $\delta_1(\gamma_i^p)$  совпадает, так как между  $\psi$  и  $\gamma_i^p$  есть функциональная связь.

Погрешности  $\delta_1(\psi)$  и  $\delta_1(\gamma_i^p)$  МДД плавно убывают, тогда как в погрешностях вариантов метода с уточнением решения по Эйткену присутствуют вертикальные скачки, соответствующие этапу уточнения решения. В расчете с уточнением через одну итерацию (МДД Э-1) скачки погрешности в основном происходят в сторону ее увеличения, что объясняется более быстрым по сравнению с обычным методом приближением к решению задачи. Скачки в методе с уточнением на каждой итерации (МДД Э-2) носят менее предсказуемый характер, но, не смотря на большое число скачков вниз, соответствующих слабому изменению решения по сравнению с обычным методом, в целом этот вариант расчета демонстрирует самую высокую скорость убывания погрешности. Чтобы проверить это, на каждой итерации вычислим апостериорную погрешность

$$\delta_2(y_{m.p}, y_{m.c}^N) = \|y_{m.p}^k - y_{m.c}^N\| / \|y_{m.c}^N\|, \quad (18)$$

где: «м.р» – метод расчета; «м.с» – метод для сравнения, последняя итерация  $N$  которого условно принимается за «точное» решение задачи.

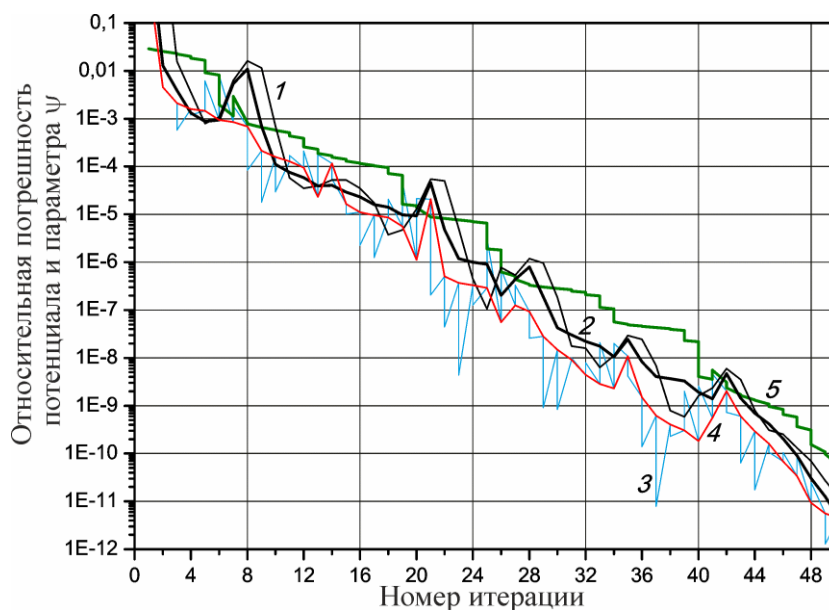
Погрешность МДД относительно своей последней (51-ой) итерации (линия 2 на рисунке 3) и погрешность МДД относительно последней итерации МДД Э-2 (линия 1) начинают различаться около 32-ой итерации на уровне  $\delta_2 \approx 10^{-3} \dots 10^{-4}$ , что говорит о совпадении в среднем двух-трех знаков у соответствующих величин. К последней итерации линия 2 пересекает линию 3, так как для нее формулы (17) и (18) дают одинаковый результат –  $\delta_2 \approx 10^{-4} \dots 10^{-5}$ , т.е. погрешность снижается за последние 20 итераций примерно на один порядок.

Погрешность МДД Э-1 относительно своей последней (51-ой) итерации (линия 5 на рисунке 3) и погрешность МДД Э-1 относительно последней итерации МДД Э-2 (линия 4) начинают различаться около 40-ой итерации на уровне  $\delta_2 \approx 10^{-6} \dots 10^{-7}$ , что говорит о совпадении в среднем пяти-шести знаков у соответствующих величин, последние 10 итераций метода также приводят к снижению погрешности примерно на один порядок.

В пределах рассмотренной точности вычислений три метода сходятся к одному и тому же результату. Быстрее всех сходится МДД Э-2, результаты расчета по которому в качестве «точного» решения можно использовать до 45-ой итерации при  $\delta_2 \approx 10^{-9} \dots 10^{-10}$ . Апостериорная погрешность и погрешность по соседним итерациям отличаются примерно на один порядок, то есть в процессе расчета можно гарантировать количество точных знаков у искомых величин на единицу меньше модуля порядка погрешности ( $\delta_1 \approx 10^{-4}$  – 3 точных знака). Относительная погрешность МДД убывает на порядок в среднем за  $\approx 24$  итерации, МДД Э-1 – за  $\approx 10$  итераций, МДД Э-2 – за  $\approx 6$  итераций, то есть МДД Э-2 в 1,7 раза быстрее МДД Э-1 и в 4 раза быстрее МДД. Однако этот результат для МДД Э-2 по сравнению с МДД Э-1 имеет место только после достижения  $\delta_2 \approx 10^{-5}$ , до которого МДД Э-1 на некоторых итерациях показывает даже лучшие результаты, чем МДД Э-2.

Анализ апостериорной погрешности МДД Э-1 подтверждает, что увеличение  $\delta_1$  указывает на снижение  $\delta_2$ , а для оценки реального уровня  $\delta_1$  следует использовать две итерации между уточнениями по Эйткену. Увеличение погрешности  $\delta_1$  по соседним итерациям в МДД Э-2 в некоторых случаях соответствует увеличению апостериорной погрешности, но в целом также указывает на снижение  $\delta_2$ . Характер убывания погрешности МДД Э-1 и МДД Э-2 различен. Для первого метода итерация по Эйткену практически каждый раз систематически снижает  $\delta_2$ . Для второго метода характерны периоды плавного снижения  $\delta_2$  со скоростью приблизительно как у МДД Э-1, за которым следует резкое уменьшение погрешности, что в целом приводит к выигрышу в скорости для МДД Э-2. Для оценки  $\delta_1$  МДД Э-2 в процессе расчета также следует исключить из анализа уточнение по Эйткену.

Апостериорная относительная погрешность определения потенциала для МДД отличается на порядок от погрешности по двум соседним итерациям. В случае МДД Э-1 погрешности  $\delta_1$  и  $\delta_2$  отличаются в два раза и менее, что является следствием уточнения деформаций (т.е. производных от потенциала) по Эйткену на предыдущей итерации примерно в такое же число раз, а изменение  $\delta_1$  носит соответственно пилообразный характер (ускоряясь на следующей после уточнения итерации). Погрешности в определении потенциала с уточнением на каждом шаге (МДД Э-2) демонстрируют более сложное поведение, для наглядной иллюстрации которого на рисунке 4 совмещены погрешности  $\delta_1$  и  $\delta_2$  определения потенциала и параметра пластичности.

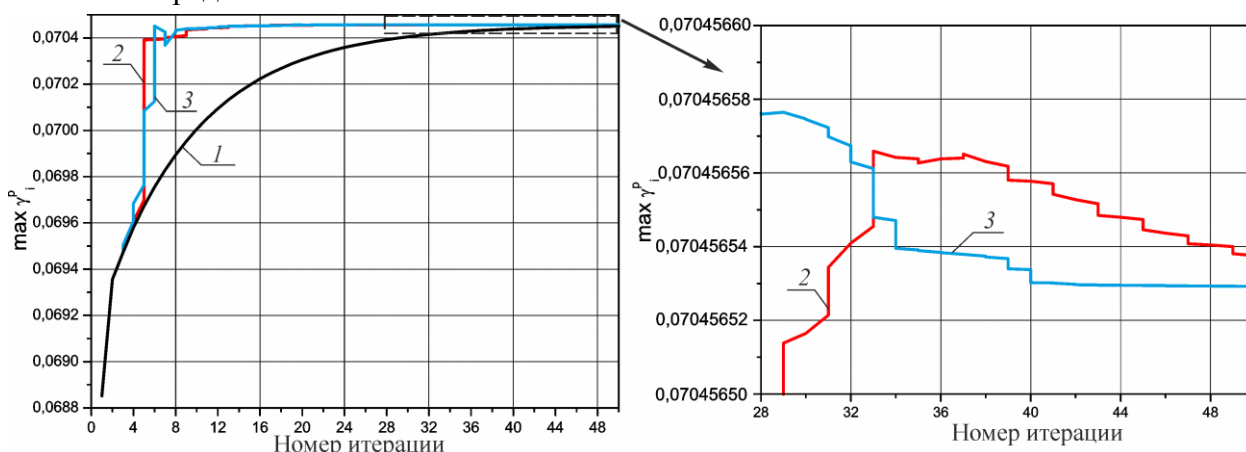


**Рисунок 4. Относительные погрешности расчета МДД Э-2: 1 и 2 – погрешности определения потенциала по двум соседним итерациям и относительно последнего шага, соответственно; 3 – погрешность определения параметра пластичности по двум соседним итерациям; 4 – погрешность определения параметра пластичности по двум соседним итерациям без учета уточнения по Эйткену; 5 – погрешность определения параметра пластичности относительно последнего (51-го) шага**

Из рисунка 4 видно, что без учета итераций по Эйткену от шага к шагу погрешности потенциала и параметра пластичности имеют почти одинаковое качественное и в пределах порядка количественное изменения, а локальный рост величины этих погрешностей происходит после итераций, на которых апостериорная погрешность  $\delta_2$  резко убывает. Согласно этому для практической оценки погрешности  $\delta_1(\Phi)$  и модифицированной как указано выше

$\delta_1(\psi)$  можно рекомендовать на итерациях, где погрешность начинает расти, использовать экстраполяцию по значениям предыдущих итераций или дождаться итерации, на которой погрешность снова начнет убывать или станет меньше достигнутого ранее уровня. Так как экстраполяция по предыдущим значениям в данном случае не является надежной, периодически в течение одной – пяти итераций будет неизвестна величина погрешности. Этот подход следует предварительно проверить для более сложных форм поперечных сечений.

Еще одну иллюстрацию работы методов дает рисунок 5, на котором показано изменение максимума интенсивности пластической деформации для трех методов. МДД сходится к предельному значению снизу, МДД Э-1 проскакивает на 31-ой итерации предельное значение и после небольших колебаний сходится к нему сверху после 37-ой итерации, а МДД Э-2 периодически меняет направление поиска, причем смена направления не всегда связана с пересечением предельного значения.



**Рисунок 5. Максимум интенсивности пластической деформации:**

**1 – МДД; 2 – МДД Э-1; 3 – МДД Э-2**

### Заключение

Метод уточнения Эйткена через одну итерацию позволяет ускорить сходимость в 2,4 раза и контролировать погрешность в процессе расчета.

Метод уточнения Эйткена на каждой итерации дает ускорение в четыре раза, но для него необходимо разработать более надежные аналитические или эмпирические методы контроля погрешности.

В связи с этим метод с уточнением на каждой итерации лучше применять для получения высокой точности  $\delta_1 < 10^{-5}$ , а для решения задач с погрешностью больше указанного уровня метод с уточнением через одну итерацию дает более надежный контроль погрешности и требует меньше ресурсов для расчета.

### Литература

1. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности / ПММ. т. 15, вып. 6, 1951. – С. 765–770.
2. Темис Ю.М. Применение метода Ньютона-Канторовича при решении задач деформационной теории пластичности // Труды ЦИАМ, № 1256, 1988.
3. Temis J.M. Iterative method convergence for solving problems of deformation theory of plasticity // Computational methods in engineering advances & applications. World scientific. Singapore. Vol. 2, 1992, p. 1276–1281.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
6. Küttler U., Wall W.A. Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. //



- Springer-Verlag. Computational Mechanics, No.43, 2008. P. 61–72.
7. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
  8. Темис Ю.М., Лазарев А.А., Маланова О.Л. Обобщенный метод дополнительных деформаций в задаче о кручении стержня // Известия МГТУ «МАМИ». – М.: МГТУ «МАМИ», №2 (14), 2012, т. 2, с. 336–341.
  9. Temis Y.M., Karaban V.V. Boundary element technique in torsion problems of beams with multiply connected cross-sections // J. KSIAM. vol.5, No.2, 2001, P. 39-51.