требуются дальнейшие исследования для подбора оптимального шага прошивки и оптимизации текстильного процесса. Кроме того, определенный эффект может дать использование более высокопрочных связующих.

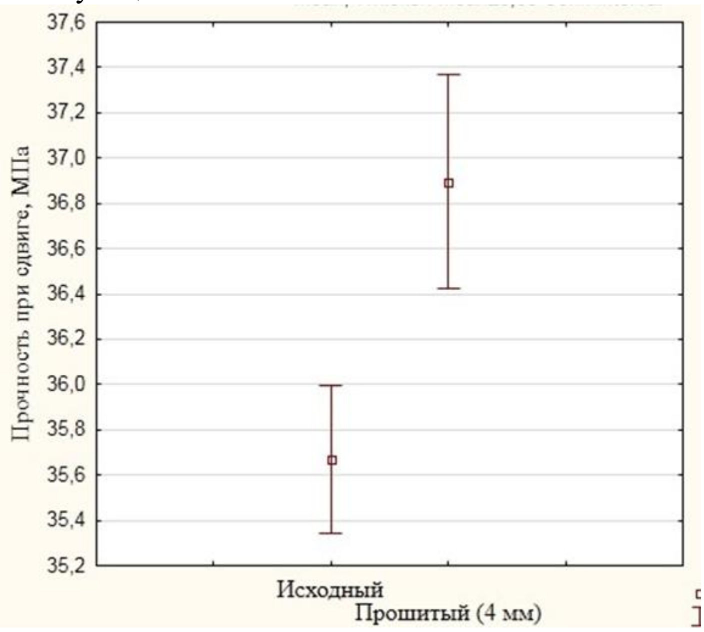

Рисунок 5. Сравнение прочности при сдвиге прошитых и непрошитых образцов (среднее значения и разброс данных с доверительной вероятностью 65%)

Литература

1. Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные пластины. – Рига, «Знание», 1978, 215 с.
2. Куперман А.М., Зеленский Э.С. Исследование возможности увеличения прочностных характеристик композита путем их трехмерного армирования // Механика композиционных материалов и конструкций, 2001, т. 7, № 4, с. 434 – 444.
3. Кавун Н.С., Давыдова И.Ф., Гребнева Т.В. Композиты и наноструктуры, влияние прошивки стеклянного и углеродного армирующих волокон на остаточную прочность композиционного материала после удара // COMPOSITES and NANOSTRUCTURES, № 1, 2013.
4. Полилов А.Н., Татусь Н.А.Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // Вестник ПНИПУ, 2012, Механика, № 2, с. 140 – 163.
5. Обработка металлов давлением. Монография – Шевакин Ю.Ф., Чернышев В.Н., Шаталов Р.Л., Мочалов Н.А. – М.: Интермет инжиниринг, 2013, 496 с.
6. Шаталов Р.Л., Генкин А.А. управление листопрокатным комплексом при горячей прокатке стальных полос // СМб. Начн.удов международн.-практ. Конференции 17 – 21 ноября 2014г. «Современная металлургия начала нового тысячелетия», Липецк, ЛГТУ, 2014, ч. 3, с. 154 – 162.

Расширение множества центральных композиционных планов

д.т.н. проф. Сорокин М.Н., Ануфриева К.С.

Университет машиностроения

sorokin-mn@mail.ru, kristel_anufrieva@mail.ru

Аннотация. Рассматривается подход, позволяющий расширить множества центральных композиционных планов. Применение свойств точечного материального тела позволяет обеспечить ортогональное планирование.

Ключевые слова: *план эксперимента, ортогональное планирование, точечное материальное тело.*

Обработка результатов эксперимента является важной операцией в технологическом процессе проведения экспериментальных исследований. Линейная модель наблюдений является основой для обработки экспериментальных данных [1, 2].

Вектор параметров β для линейной модели наблюдений при выбранном плане эксперимента и функции отклика определяется как решение нормального уравнения [1, 2]:

$$\beta = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}y\,. \qquad (1)$$

Желательно, чтобы при проведении эксперимента план был выбран таким, чтобы планирование было ортогональным, то есть матрица $X^{\mathrm{T}}X$ была диагональной.

Боксом и Хартли для функции отклика в виде полинома второй степени [1, 2] были построены планы, которые обеспечивали ортогональное планирование. Эти планы были названы центральными композиционными планами или планами Бокса-Хартли.

В данной статье рассматривается подход и даётся метод, позволяющий расширить множество центральных композиционных планов.

Рассмотрим метод, предложенный Боксом и Хартли для построения центрального композиционного плана для полинома второй степени:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2\,. \qquad (2)$$

Парное взаимодействие $x_1 x_2$ мы исключили, так как оно не оказывает никакого влияния на суть предлагаемого метода. Для функции отклика (2) в качестве центрального композиционного плана выбираем план D_1 (рисунок 1):

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \\ -\alpha & 0 \\ +\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \\ 0 & +\alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Центральные композиционные планы состоят из точек полного факторного эксперимента 2^k (или его дробных реплик), «звёздных» точек и точек, расположенных в начале координат.

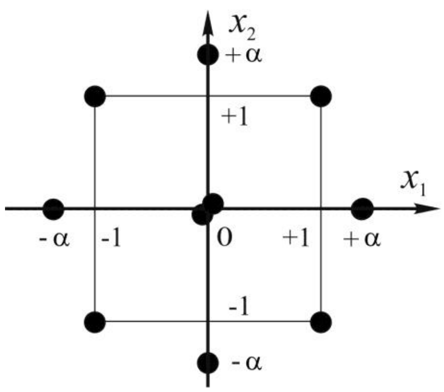

Рисунок 1. План Бокса-Хартли

Значение α (значение «звёздного» плеча) в плане D_1 не определено. В соответствии с линейной моделью наблюдений [1, 2] получим матрицы X, X^{T}, $X^{\mathrm{T}}X$:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & +1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & +1 & 1 & 1 \\ 1 & +1 & +1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & +\alpha & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & +\alpha & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -\alpha & +\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -\alpha & +\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha^2 & \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$X^{\mathrm{T}}X=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 4+2\alpha^2 & 4+2\alpha^2 \\ 0 & 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4+2\alpha^2 & 0 & 0 \\ 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 4+2\alpha^2 & 4 \\ 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 4 & 4+2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Планирование не получается ортогональным, так как элементы матрицы (4) a_{14}, a_{15}, a_{41}, a_{51}, a_{45}, a_{54} не равны нулю.

Тогда Боксом и Хартли была проведена замена переменных x_1^2 и x_2^2: $\bar{x}_3 = x_1^2 - c$, $\bar{x}_4 = x_2^2 - c$, где c – постоянное число, требующее определения.

При замене переменных осуществлён переход от системы координат $0x_1x_2x_1^2x_2^2$ к системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

В системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ функция отклика (2) примет вид:

$$y=\overline{\beta_0}+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_{11}\bar{x}_3+\beta_{22}\bar{x}_4,\ \text{где: } \overline{\beta_0}=\beta_0+\beta_{11}c+\beta_{22}c. \tag{5}$$

В системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ матрицы X, X^{T}, $X^{\mathrm{T}}X$ в уравнении (1) примут вид:

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-c & 1-c \\ 1 & +1 & -1 & 1-c & 1-c \\ 1 & -1 & +1 & 1-c & 1-c \\ 1 & +1 & +1 & 1-c & 1-c \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha^2-c & -c \\ 1 & +\alpha & 0 & \alpha^2-c & -c \\ 1 & 0 & -\alpha & -c & \alpha^2-c \\ 1 & 0 & +\alpha & -c & \alpha^2-c \\ 1 & 0 & 0 & -c & -c \\ 1 & 0 & 0 & -c & -c \end{pmatrix},\quad \bar{X}^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -\alpha & +\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -\alpha & +\alpha & 0 & 0 \\ 1-c & 1-c & 1-c & 1-c & \alpha^2-c & \alpha^2-c & -c & -c & -c & -c \\ 1-c & 1-c & 1-c & 1-c & -c & -c & \alpha^2-c & \alpha^2-c & -c & -c \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\bar{X}^T\bar{X}=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 4(1-c)^2+2(\alpha^2-c)-4c & 4(1-c)^2+2(\alpha^2-c)-4c \\ 0 & 4+2\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4+2\alpha^2 & 0 & 0 \\ 4(1-c)^2+2(\alpha^2-c)-4c & 0 & 0 & 4(1-c)^2+2(\alpha^2-c)^2-4c^2 & 4(1-c)^2-4(\alpha^2-c)c+2c^2 \\ 4(1-c)^2+2(\alpha^2-c)-4c & 0 & 0 & 4(1-c)^2-4(\alpha^2-c)c+2c^2 & 4(1-c)^2+2(\alpha^2-c)^2+4c^2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы матрица (6) была диагональной, необходимо, чтобы α и c удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} 4(1-c)+2(\alpha^2-c)-4c=0 \\ 4(1-c)^2-4(\alpha^2-c)c+2c^2=0 \end{cases}.$$

Решением этой системы уравнений являются следующие значения α и c:

$$\alpha=\sqrt{\frac{10}{\sqrt{10}}-2}=1.0781,\quad c=\frac{2}{\sqrt{10}}=0.6325.$$

Тогда матрицы $\bar{X}$, $\bar{X}^T$, $\bar{X}^T\bar{X}$ для полученных значений α и c примут вид:

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0.3675 & 0.3675 \\ 1 & +1 & -1 & 0.3675 & 0.3675 \\ 1 & -1 & +1 & 0.3675 & 0.3675 \\ 1 & +1 & +1 & 0.3675 & 0.3675 \\ 1 & -1.0781 & 0 & 0.5298 & -0.6325 \\ 1 & +1.0781 & 0 & 0.5298 & -0.6325 \\ 1 & 0 & -1.0781 & -0.6325 & 0.5298 \\ 1 & 0 & +1.0781 & -0.6325 & 0.5298 \\ 1 & 0 & 0 & -0.6325 & -0.6325 \\ 1 & 0 & 0 & -0.6325 & -0.6325 \end{pmatrix},\quad \bar{X}^T\bar{X}=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.3246 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.3246 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.7012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7012 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\bar{X}^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1.0781 & +1.0781 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1.0781 & +1.0781 & 0 & 0 \\ 0.3675 & 0.3675 & 0.3675 & 0.3675 & 0.5298 & 0.5298 & -0.6325 & -0.6325 & -0.6325 & -0.6325 \\ 0.3675 & 0.3675 & 0.3675 & 0.3675 & -0.6325 & -0.6325 & 0.5298 & 0.5298 & -0.6325 & -0.6325 \end{pmatrix}.$$

Матрица (7) является диагональной. В системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ нормальное уравнение (1) примет вид:

$$\bar{\beta}=(\bar{X}^T\bar{X})^{-1}\bar{X}^T y. \tag{8}$$

Для решения нормального уравнения (8) необходимо знать вектор наблюдения *y*. Вектор наблюдения *y* для нашего модельного примера может быть сформирован следующим образом. Пусть функция отклика (2) имеет конкретный вид:

$$y=2+0.5x_1+0.5x_2+x_1^2+x_2^2. \tag{9}$$

Тогда компонентами вектора *y* будут значения функции отклика (9) в точках плана (3):

$$y=(3,4,4,5,\ \alpha^2+\alpha\text{-}2,\ \alpha^2-\alpha\text{-}2,\ \alpha^2+\alpha\text{-}2,\ \alpha^2-\alpha\text{-}2,\ 2,\ 2)^{\mathrm{T}},$$

или в числовом выражении при $\alpha=1.7013$:

$$y=(3,4,4,5,\ 2.6232,\ 3.7013,\ 2.6232,\ 3.7013,\ 2,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$

В этом случае вектор $\bar{\beta}$ определяется как решение нормального уравнения (8):

$$\overline{\beta} = (3.2649, 0.5, 0.5, 1, 1),$$

или в соответствии с (5):

$$\beta = (2, 0.5, 0.5, 1, 1). \qquad (10)$$

Подход Бокса-Хартли определяет только один план для произвольного значения k. Подход Бокса-Хартли обеспечивает ортогональное планирование за счёт выбора параметров α и c.

В работе предлагается другой подход для обеспечения ортогонального планирования. Суть его заключается в том, что задача построения плана и обеспечения ортогонального планирования может быть представлена как задача конструирования точечного материального тела, то есть материального тела, состоящего из точек единичной массы [3]. Этим точкам соответствуют точки плана. Координаты материальных точек суть координаты точек плана. Матрица $X^{\mathrm{T}}X$, построенная для точек плана или для точек материального тела, является матрицей моментов инерций. Если для точек материального тела оси координат, в которой определены точки материального тела, являются главными и центральными, то тогда матрица моментов инерций является диагональной. Подобная аналогия позволяет определить и метод получения ортогонального планирования. Необходимо для точечного материального тела определить главные центральные оси.

Покажем это, используя для сравнения предыдущий пример. Пусть функция отклика останется прежней (2). План эксперимента D_2 представлен на рисунке 2.

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \\ -1 & 0 \\ +1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & +1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Мы выбрали «звёздное» плечо равным единице, то есть α = 1. Теперь мы не имеет возможности варьировать величину «звёздного» плеча для получения ортогонального планирования. Мы могли выбрать значение α в пределах $0 < \alpha \le \sqrt{2}$, если выбор точек плана ограничен сферой радиуса R, $R = \sqrt{2}$.

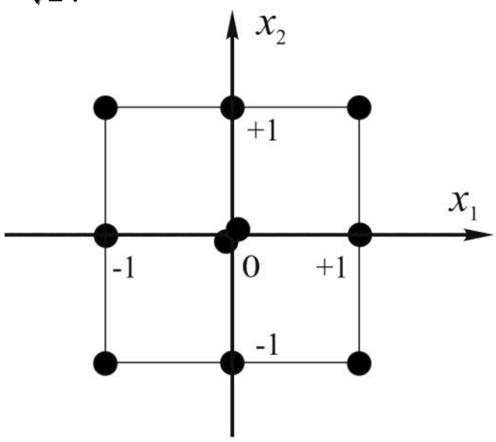

Рисунок 2. Расширенный план Бокса-Хартли

В соответствии с линейной моделью наблюдений матрицы X, X^{T}, $X^{\mathrm{T}}X$ для функции отклика (2) и плана (11) примут вид:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & +1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & +1 & 1 & 1\\ 1 & +1 & +1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & +1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & +1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

$$X^{\mathrm{T}}X=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 6 & 6\\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0 & 6 & 4\\ 6 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрица (12) не является диагональной. Чтобы матрица (12) стала диагональной, введём новые переменные $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$ (рисунок 3):

$$\bar{x}_3 = x_1^2 - c, \qquad \bar{x}_4 = x_2^2 - c,$$

где c – постоянное число, требующее определения.

При замене переменных осуществлён переход от системы координат $0x_1x_2x_1^2x_2^2$ к системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

С точки зрения предлагаемого подхода, такая замена переменных переносит систему координат $0x_1x_2x_1^2x_2^2$ в центр масс точечного материального тела. В системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ функция отклика (2) примет вид:

$$\mathrm{y} = \overline{\beta_0} + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11}\bar{x}_3 + \beta_{22}\bar{x}_4,$$

где

$$\overline{\beta_0} = \beta_0 + \beta_{11}c + \beta_{22}c. \qquad (13)$$

Рисунок 3. Изменение осей координат плана для получения ортогонального планирования

В системе координат $0_1x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ матрицы $\bar{X}$, $\bar{X}^{\mathrm{T}}$, $\bar{X}^{\mathrm{T}}\bar{X}$ в уравнении (1) примут вид:

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1-c & 1-c \\ 1 & +1 & -1 & 1-c & 1-c \\ 1 & -1 & +1 & 1-c & 1-c \\ 1 & +1 & +1 & 1-c & 1-c \\ 1 & -1 & 0 & 1-c & -c \\ 1 & +1 & 0 & 1-c & -c \\ 1 & 0 & -1 & -c & 1-c \\ 1 & 0 & +1 & -c & 1-c \\ 1 & 0 & 0 & -c & -c \\ 1 & 0 & 0 & -c & -c \end{pmatrix},\ \bar{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 1-c & 1-c & 1-c & 1-c & 1-c & 1-c & -c & -c & -c & -c \\ 1-c & 1-c & 1-c & 1-c & -c & -c & 1-c & 1-c & -c & -c \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\bar{X}^{\mathrm{T}}\bar{X}=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 6(1\text{-}c)-4c & 6(1\text{-}c)-4c \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6(1\text{-}c)-4c & 0 & 0 & 4(1-c)^2-4(1-c)c+2c^2 & 4c^2-14c+6 \\ 6(1\text{-}c)-4c & 0 & 0 & 4c^2-14c+6^2 & 4(1-c)^2-4(1-c)c+2c^2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы матрица (14) была диагональной, прежде всего необходимо, чтобы элементы этой матрицы $a_{14}, a_{15}, a_{41}, a_{51}$ были равны нулю или чтобы выполнялось условие:

$$6(1\text{-}c)\text{-}4c=0,\ \text{т.е.}\ c\ =\ 0.6.$$

В системе координат $0_1 x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$ матрицы $\bar{X}$, $\bar{X}^{\mathrm{T}}$, $\bar{X}^{\mathrm{T}}\bar{X}$ для значения $c=0.6$ примут вид:

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & +1 & -1 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & -1 & +1 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & +1 & +1 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & -1 & 0 & 0.4 & -0.6 \\ 1 & +1 & 0 & 0.4 & -0.6 \\ 1 & 0 & -1 & -0.6 & 0.4 \\ 1 & 0 & +1 & -0.6 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & -0.6 & -0.6 \\ 1 & 0 & 0 & -0.6 & -0.6 \end{pmatrix},\ \bar{X}^{\mathrm{T}}\bar{X}=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 2.4 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\bar{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & -0.6 & -0.6 & -0.6 & -0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & -0.6 & -0.6 & 0.4 & 0.4 & -0.6 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

В матрице (15) элементы a_{45} и a_{54} не равны нулю. Если эти элементы рассматривать с позиции точечного материального тела, то они определяют центробежный момент этого тела $J_{\bar{x}_3\bar{x}_4}$ относительно осей $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$ в системе координат $0_1 x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$. Чтоб элементы a_{45} и a_{54} стали равными нулю, необходимо оси $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$ повернуть к осям $\tilde{x}_3, \tilde{x}_4$ на угол ϕ, при котором

$J_{\tilde{x}_3\tilde{x}_4} = 0$. При повороте осей мы перейдём к новой системе координат $0_1 x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4$ (рисунок 3). Переменные $\tilde{x}_3$ и $\tilde{x}_4$ связаны с переменными $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$ соотношением:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix}.$$

Угол поворота осей ϕ, при котором обеспечивается равенство нулю центробежного момента $J_{\tilde{x}_3\tilde{x}_4} = 0$, определится из выражения:

$$\mathrm{tg}2\phi = \frac{2J_{\bar{x}_3\bar{x}_4}}{J_{\bar{x}_4^2} - J_{\bar{x}_3^2}},$$

где: $J_{\bar{x}_4^2}, J_{\bar{x}_3^2}$ - моменты инерции точечного материального тела относительно осей $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$. Для нашего случая $\phi = \frac{\pi}{4}$.

В системе координат $0_1 x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4$ функция отклика (2) примет вид:

$$y = \overline{\beta_0} + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \tilde{\beta}_{11}\tilde{x}_3 + \tilde{\beta}_{22}\tilde{x}_4,$$

где: $\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{11} \\ \tilde{\beta}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\phi \\ -\sin\phi \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \end{pmatrix}$, $\quad \tilde{\beta} = (\bar{\beta}_0, \beta_1, \beta_2, \tilde{\beta}_{11}, \tilde{\beta}_{22})$.

В системе координат $0_1 x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4$ нормальное уравнение (1) примет вид:

$$\tilde{\beta} = (\tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{X})^{-1}\tilde{X}^{\mathrm{T}}y, \tag{16}$$

а матрицы $\tilde{X}$, $\tilde{X}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{X}$ в уравнении будут равны:

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0.4\sqrt{2} & 0 \\ 1 & +1 & -1 & 0.4\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & +1 & 0.4\sqrt{2} & 0 \\ 1 & +1 & +1 & 0.4\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0.1\sqrt{2} & -0.5\sqrt{2} \\ 1 & +1 & 0 & -0.1\sqrt{2} & -0.5\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 & -0.1\sqrt{2} & 0.5\sqrt{2} \\ 1 & 0 & +1 & -0.1\sqrt{2} & 0.5\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & -0.6\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -0.6\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}^{\mathrm{T}}\tilde{X} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\tilde{X}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0.4\sqrt{2} & 0.4\sqrt{2} & 0.4\sqrt{2} & 0.4\sqrt{2} & -0.1\sqrt{2} & -0.1\sqrt{2} & -0.1\sqrt{2} & -0.1\sqrt{2} & -0.6\sqrt{2} & -0.6\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5\sqrt{2} & -0.5\sqrt{2} & 0.5\sqrt{2} & 0.5\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В системе координат $0_1 x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4$ мы получили ортогональное планирование, Матрица (17) стала диагональной. Если в качестве вектора наблюдений y принять вектор

$$y = (3, 4, 4, 5, 2.5, 3.5, 2.5, 3.5, 2, 2),$$

то из нормального уравнения (16) получим вектор $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta} = (2.8, 0.5, 0.5, \sqrt{2}, 0).$$

Вектор наблюдений y сформирован по аналогии с вектором наблюдений для функции отклика (9).

Если из системы координат $0_1 x_1 x_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4$ вернуться к начальной системе координат $0 x_1 x_2 x_1^2 x_2^2$, то значения β_0 , β_{11} , β_{22} при $\phi = \frac{\pi}{4}$ примут вид:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_0 = \bar{\beta}_0 - \beta_{11} c - \beta_{22} c = 2.$$

Таким образом, вектор β равен $\beta = (2, 0.5, 0.5, 1, 1)$.

Мы получили тот же самый вектор β , что и для центрального композиционного плана (10).

Применение предлагаемого подхода и метода получения главных центральных осей показано на примере расширения множества центральных композиционных планов для $k = 2$. Однако данный подход и метод могут быть применены для расширения множества центральных композиционных планов при $k > 2$.

Выводы

1. Предложен подход к расширению множества центральных композиционных планов.
2. Указанный подход основан на представлении задачи построения планов как задачи конструирования точечного материального тела, состоящего из точек единичной массы и координаты которых равны координатам точек плана.
3. Предложен метод, обеспечивающий ортогональное планирование для исходного плана, который основан на построении главных центральных осей для точечного материального тела.
4. Предложенный подход продемонстрирован на примере построения плана на базе центрального композиционного плана при $k = 2$, $\alpha = 1$, который обеспечивает ортогональное планирование.

Литература

1. Асатурян В.И. Теория планирования эксперимента. М., Радио и связь, 1974. – 248 с.
2. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статических данных. М., Юрайт, 2012. – 399 с.
3. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М., Наука, 1981.

Изотермическая осадка бруса при плоской деформации

д.т.н. проф. Соболев Я.А., д.т.н. проф. Чудин В.Н.

Университет машиностроения, МГУ «Путей сообщения»

8 (909) 159-6460, Yasobolev@mail.ru, 8 (917) 532-2613, vladimir-chudin@yandex.ru

Аннотация. Предложены отношения для расчета технологических параметров изотермической осадки бруса. Материал принят вязко-пластичным, повреждаемым. Использован энергетический метод расчета и метод осредненных напряжений. Приведены расчетные данные.

Ключевые слова: *вязкость, поле скоростей, линии разрыва, мощность, давление.*

При обработке давлением заготовок из высокопрочных сплавов применяют операцию изотермической осадки на гидропрессовом оборудовании. При этом силовые и деформаци-