Представление симметричного III тензора второго ранга в пространстве главных собственных векторов

к.ф-м.н. Кузнецов Е.Е., д.ф-м.н. Матченко И.Н. д.ф-м.н. проф. Матченко Н.М.
Тульский государственный университет,
Чувашский государственный педагогический университет
SmitheE71@yandex.ru, ekc_05@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются возможности представления симметричного III тензора второго ранга в трехмерном векторном пространстве главных собственных векторов. Показано, что векторное пространство главных собственных значений состоит из шести независимых сегментов. Вектор симметричного тензора может быть представлен в любом из сегментов независимым образом. Вводится локальный векторный базис для каждого из секторов. Показано, что предложенные ранее А.А. Ильюшиным и К.Ф. Черных векторные базисы тензора напряжений относятся ко второму и третьему сегментам векторного пространства главных напряжений.

Ключевые слова: *симметричный тензор, вектор тензора, векторное пространство собственных значений.*

1. Симметричный III тензор второго ранга a_{ij}, отнесенный к декартовой системе координат x_i $(i=1,2,3)$, характеризуется шестью компонентами $a_{ij}=a_{ji}$ или собственными векторами $\vec{a}_i$ и ортом их направлений a_{ij}.

Если известны компоненты тензора a_{ij}, то собственные значения находятся посредством решения характеристического уравнения

$$\grave{a}^3 - A_1\grave{a}^2 - A_2\grave{a} - A_3 = 0, \qquad (1.1)$$

где: $\grave{A}_1 = \grave{a}_{ij}\delta_{ij}$, $\grave{A}_2 = (\grave{a}_{ij}\grave{a}_{ij} - \grave{a}_{ii}\grave{a}_{jj})/2$, $\grave{A}_3 = \left|\grave{a}_{ij}\right|$ – инварианты тензора a_{ij}.

Решение кубического уравнения (1.1) дает три ранжированных собственных значения $\grave{a}_{\max}$, $\grave{a}_{\mathrm{int}}$, $\grave{a}_{\min}$ - максимальное, промежуточное и минимальное собственное значение. Неравенство $\grave{a}_{\max} \ge \grave{a}_{\mathrm{int}} \ge \grave{a}_{\min}$ является условием ранжирования собственных значений.

Введем векторное пространство неупорядоченных собственных векторов $\vec{a}_i$. Трем ранжированным собственным значениям $\grave{a}_{\max}$, $\grave{a}_{\mathrm{int}}$, $\grave{a}_{\min}$ соответствует шесть различных сочетаний неупорядоченных собственных значений a_i

$$\grave{a}_1 \ge \grave{a}_2 \ge \grave{a}_3,\ \grave{a}_2 \ge \grave{a}_1 \ge \grave{a}_3,\ \grave{a}_2 \ge \grave{a}_3 \ge \grave{a}_1,\ \grave{a}_3 \ge \grave{a}_2 \ge \grave{a}_1,\ \grave{a}_3 \ge \grave{a}_1 \ge \grave{a}_2,\ \grave{a}_1 \ge \grave{a}_3 \ge \grave{a}_2. \qquad (1.2)$$

Поэтому вектор тензора a_{ij} имеет шесть вариантов представления в пространстве $\vec{a}_i$

$$\vec{A}_n = \vec{a}_1^{(n)} + \vec{a}_2^{(n)} + \vec{a}_3^{(n)}. \qquad (1.3)$$

Индекс n изменяется от 1 до 6 в соответствии с номером сочетания неупорядоченных значений a_i в неравенствах (1.2).

2. В трехмерном пространстве $\vec{a}_i$ выделим плоскость P_d, проходящую через начало координат и имеющую одинаковые наклоны к координатным осям $\vec{a}_i$,

$$\grave{a}_1 + \grave{a}_2 + \grave{a}_3 = 0. \qquad (2.1)$$

Единичный вектор, являющийся нормалью к плоскости P_d, обозначим как $\vec{m}_0$. Направляющие косинусы вектора $\vec{m}_0$ по отношению к координатным осям одинаковы $\vec{\grave{a}}_1 \cdot \vec{m}_0 = \vec{\grave{a}}_2 \cdot \vec{m}_0 = \vec{\grave{a}}_3 \cdot \vec{m}_0 = 1/\sqrt{3}$.

Следовательно,

$$\vec{m}_0 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3)/\sqrt{3}\,.$$

Проекции главных значений на плоскость P_d обозначим $\grave{a}_i^{'} = \sqrt{2/3}\grave{a}_i$. Положительно направленные проекции главных осей $o\grave{a}_i^{'}$ расположены на плоскости P_d под углом $2\pi/3$.

Если через направления $\vec{m}_0$ и $\vec{a}_i$ провести три плоскости, то векторное пространство неупорядоченных собственных значений разделится на шесть равных сегментов с раствором угла $\pi/3$, а плоскость P_d, соответственно, на шесть секторов.

Арабскими цифрами $(n = 1,...,6)$ введем нумерацию секторов (сегментов). Отсчет секторов будем проводить против хода часовой стрелки от оси $o\grave{a}_1^{'}$.

Для каждого из секторов зависимость между неупорядоченными собственными значениями и ранжированными собственными значениями представлена в виде таблицы 2.1.

Таблица 2.1

n	неравенства	$\grave{a}_{\max}$	$\grave{a}_{\mathrm{int}}$	$\grave{a}_{\min}$
1	$\grave{a}_1 \ge \grave{a}_2 \ge \grave{a}_3$	$\grave{a}_1$	$\grave{a}_2$	$\grave{a}_3$
2	$\grave{a}_2 \ge \grave{a}_1 \ge \grave{a}_3$	$\grave{a}_2$	$\grave{a}_1$	$\grave{a}_3$
3	$\grave{a}_2 \ge \grave{a}_3 \ge \grave{a}_1$	$\grave{a}_2$	$\grave{a}_3$	$\grave{a}_1$
4	$\grave{a}_3 \ge \grave{a}_2 \ge \grave{a}_1$	$\grave{a}_3$	$\grave{a}_2$	$\grave{a}_1$
5	$\grave{a}_3 \ge \grave{a}_1 \ge \grave{a}_2$	$\grave{a}_3$	$\grave{a}_1$	$\grave{a}_2$
6	$\grave{a}_1 \ge \grave{a}_3 \ge \grave{a}_2$	$\grave{a}_1$	$\grave{a}_3$	$\grave{a}_2$

Таким образом, вектор тензора a_{ij} можно представить в трехмерном пространстве $\vec{a}_i$ независимым образом в любом из шести сегментов.

В каждом из сегментов разложим вектор $\vec{A}_n$ на две составляющие:

$$\vec{A}_n = \vec{A}_0 + \vec{A}_d^{(n)}\,. \tag{2.2}$$

Вектор $\vec{A}_0$ является проекцией вектора $\vec{A}_n$ на нормаль к девиаторной плоскости $\vec{m}_0$:

$$\vec{A}_0 = \grave{A}_0\vec{m}_0,\ \grave{A}_0 = (\grave{a}_1 + \grave{a}_2 + \grave{a}_3)/\sqrt{3}\,. \tag{2.3}$$

Вектор $\vec{A}_0$ не зависит от выбора номера сегмента, в котором представлен вектор $\vec{A}_n$.

Вектор $\vec{A}_d^{(n)}$ является проекцией вектора $\vec{A}_n$ на плоскость P_d, причем:

$$\grave{A}_d^{(n)} = \sqrt{\grave{A}^2 - \grave{A}_0^2} = \sqrt{\grave{A}_2 + \grave{A}_1^2/3}\,, \tag{2.4}$$

т.е. модуль вектора $\vec{A}_d^{(n)}$ является инвариантной характеристикой тензора a_{ij}.

Направление вектора $\vec{A}_d^{(n)}$ в каждом из секторов плоскости P_d определяется углом φ_n. Положительное направление отсчета угла φ_n примем в направлении против часовой стрелки от оси $o\grave{a}_1^{'}$. Угол φ_n называется фазой тензора a_{ij}.

Значение фазы φ_n вычисляется через фазовый инвариант $\cos 3\varphi_*$, который в свою очередь вычисляется через инварианты тензора a_{ij}

$$\cos 3\varphi_* = \frac{2\grave{A}_1^3 + 9\grave{A}_1\grave{A}_2 + 27\grave{A}_3}{2(\grave{A}_1^2 + 3\grave{A}_2)^{3/2}}\,.$$

Для вычисления значений фазы φ_n следует воспользоваться тождеством

$$\cos^3\varphi - 0,75\cos\varphi - 0,25\cos 3\varphi_* = 0\,. \tag{2.5}$$

Решением уравнения (2.5) являются три действительных значения функции $\cos\varphi$: $(\cos\varphi)_1$, $(\cos\varphi)_2$, $(\cos\varphi)_3$. Поскольку функция $\cos\varphi$ является четной, то результатом решения уравнения (2.5) будет шесть значений фазы: $\varphi_1 \le ... \le \varphi_6$. Каждое значение фазы φ_n соответствует сектору, в котором представляется вектор $\vec{A}_n$. Поскольку угол раствора сектора равен $\pi/3$, то для фазы $\varphi_\sigma^{(n)}$ в зависимости от номера сектора существуют ограничения $(n-1)\pi/3 \le \varphi_\sigma^{(n)} \le n\pi/3$.

В каждом из сегментов неупорядоченные собственные значения вычисляются по формулам:

$$\grave{a}_1^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\grave{A}_0 + \sqrt{2}\grave{A}_d \cos\varphi_n),$$
$$\grave{a}_{2,3}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[a_0 + \sqrt{2}\grave{A}_d \cos\left(\varphi_n \mp \frac{2}{3}\pi\right)\right]. \tag{2.6}$$

3. Проведем плоскости $P_{\tilde{n}}$, которые проходят через ось $\vec{m}_0$ и делят каждый из сегментов на две равные части. След от пересечения плоскостей $P_{\tilde{n}}$ и плоскости P_d обозначим линией l_n. Положения линий l_n определяются углами $\theta_n = (2n-1)\pi/6$, отсчитываемыми от проекции $o\grave{a}_1^{'}$ в направлении против хода часовой стрелки.

На плоскости P_d в каждый из секторов введем два единичных ортогональных вектора, $\vec{m}_I^{(n)}$ и $\vec{m}_{II}^{(n)}$. Вектор $\vec{m}_I^{(n)}$ направим от начала координат вдоль линии l_n.

Проекции вектора $\vec{A}_d^{(n)}$ на направления орта $\vec{m}_I^{(n)}$ и $\vec{m}_{II}^{(n)}$ удобно записать через собственные ранжированные значения [2]

$$\grave{A}_I = \frac{1}{\sqrt{2}}(\grave{a}_{\max} - \grave{a}_{\min}),$$
$$\grave{A}_{II} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\grave{a}_{\mathrm{int}} - \grave{a}_{\max} - \grave{a}_{\min}). \tag{3.1}$$

Значения $\grave{A}_0$, $\grave{A}_I$, $\grave{A}_{II}$ будем называть линейными инвариантами ранжированных собственных значений.

В таблице 3.1 для каждого из секторов плоскости P_d приведены выражения линейных инвариантов $\grave{A}_I^{(n)}$, $\grave{A}_{II}^{(n)}$ через неупорядоченные собственные значения a_i.

Таблица 3.1

n	1, 4	2, 5	3, 6
$\grave{A}_I^{(n)}$	$\pm(\grave{a}_1 - \grave{a}_3)/\sqrt{2}$	$\pm(\grave{a}_2 - \grave{a}_3)/\sqrt{2}$	$\pm(\grave{a}_2 - \grave{a}_1)/\sqrt{2}$
$\grave{A}_{II}^{(n)}$	$(2\grave{a}_2 - \grave{a}_1 - \grave{a}_3)/\sqrt{6}$	$(2\grave{a}_1 - \grave{a}_2 - \grave{a}_3)/\sqrt{6}$	$\grave{a}_3 - \grave{a}_1 - \grave{a}_2)/\sqrt{6}$

Направление вектора $\vec{A}_d^{(n)}$ на плоскости P_d так же можно определить параметром

$$m = tg\omega = \frac{A_{II}}{A_I} = \frac{2\grave{a}_{\mathrm{int}} - \grave{a}_{\max} - \grave{a}_{\min}}{\sqrt{3}(\grave{a}_{\max} - \grave{a}_{\min})}, \tag{3.2}$$

где: ω – угол между линией l_n и вектором $\vec{A}_d^{(n)}$.

В соответствии с таблицей 3.1, условимся положительное направление отсчета угла ω принимать в каждом из секторов от линии l_n по направлению к минимальному ранжированному собственному значению $\grave{a}_{\min}$.

Параметр m изменяется в диапазоне $-1/\sqrt{3} \le m \le 1/\sqrt{3}$. Следовательно, угол ω изменяется в пределах $-\pi/6 \le m \le \pi/6$.

Нормированное $-1 \le \mu \le 1$ значение параметра m вычисляется по формуле:

$$\mu = m\sqrt{3} = \frac{2\grave{a}_{\text{int}} - \grave{a}_{\max} - \grave{a}_{\min}}{\grave{a}_{\max} - \grave{a}_{\min}}. \tag{3.3}$$

Зависимость между фазами φ_n и углом ω в каждом из n секторов устанавливается соотношениями:

$$\varphi_n = \theta_n - (-1)^n \omega = (2n-1)\pi/6 - (-1)^n \omega \tag{3.4}$$

или

$$\omega = (\theta_n - \varphi_n)(-1)^n = [(2n-1)\pi/6 - \varphi_n](-1)^n. \tag{3.5}$$

Зависимость инвариантов $\grave{A}_I$, $\grave{A}_{II}$ от неупорядоченных собственных значений в каждом из n секторов можно определять тригонометрическими формулами:

$$\begin{aligned} A_I^{(n)} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left[-a_1^{(n)} \sin\left(\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_2^{(n)} \cos\left(\theta_n - \frac{2\pi}{3}\right) + a_3^{(n)} \sin\left(\theta_n - \frac{5\pi}{6}\right)\right], \\ A_{II}^n &= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{3}}\left[a_1^{(n)} \cos\left(\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_2^{(n)} \sin\left(\theta_n - \frac{2\pi}{3}\right) - a_3^{(n)} \cos\left(\theta_n - \frac{5\pi}{6}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Локальные векторные базисы для тензора напряжений ранее вводились А.А. Ильюшиным [1]:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - a_3),\ I_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2a_1 - a_2 - a_3) \tag{3.7}$$

и К.Ф. Черных [3]:

$$G_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - a_1),\ G_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2a_3 - a_1 - a_2). \tag{3.8}$$

Из таблицы 3.1 следует, что компоненты векторного базиса, предложенного А.А. Ильюшиным, относятся ко второму сегменту пространства $\vec{a}_i$, а предложение К.Ф. Черных к третьему сектору. Таким образом, векторные базисы А.А. Ильюшина и К.Ф. Черных являются частными случаями представления (3.6).

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
2. Кузнецов Е.Е., Матченко И.Н., Матченко Н.М. О векторных базисах А.А. Ильюшина и В.В. Новожилова // Труды международной научно-практической конференции: Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий. Чебоксары, 2013. Часть 1.– С. 131 – 139.
3. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. 192 с.