Элементы термомеханики пластичности при сложном нагружении

Молодцов И.Н., Бабаева Д.О.
МГУ имени М.В.Ломоносова

Аннотация. Помимо нахождения определяющих уравнений, адекватно описывающих процессы сложного нагружения, проблемой теории упругопластических процессов является установление критериев нагружения и разгрузки. В настоящей работе в уравнениях процесса совершается переход от эвклидовой метрики, естественной для исходного девиаторного пространства, к внутренним метрикам, вполне определенно связанным с самими процессами деформаций и нагружений. Указанный переход позволяет без дополнительных предположений ввести так называемые структурные параметры, характеризующие необратимое поведение материала и построить вариант термомеханики, предоставляя широкий спектр возможностей для определения всех термодинамических параметров модели и формулировки термодинамических неравенств.

Ключевые слова: *термомеханика пластичности, процессы сложного нагружения, критерии нагружения и разгрузки.*

Определяющие уравнения

Рассматриваются процессы сложного упругопластического нагружения материалов. Для описания их свойств используются стандартные обозначения, принятые в теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина [1]. Так $\overline{\sigma}$ и $\overline{\varepsilon}$ обозначают пары пятимерных векторов-девиаторов напряжений и деформаций, построенных на базе соответствующих тензоров. В [2] векторы напряжений и деформаций связываются между собой определяющими уравнениями

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = Q\frac{d\overline{\varepsilon}}{ds} + (P-Q)\overline{n}_\sigma\left(\frac{d\overline{\varepsilon}}{ds}, \overline{n}_\sigma\right) + (N-Q)\left(\overline{n}'_\varepsilon, \frac{d\overline{\varepsilon}}{ds}\right)\overline{n}'_\varepsilon, \tag{1}$$

$$C\Pi \equiv (\overline{n}_\sigma, \overline{n}_\varepsilon),\ \Psi \equiv 1 - C\Pi^2,\ \overline{n}'_\varepsilon \equiv \frac{\left(\overline{n}_\varepsilon - C\Pi\overline{n}_\sigma\right)}{\sqrt{\Psi}},$$

где: P, N, Q – функционалы процесса деформаций, s – длина дуги траектории деформаций.

Одной из основных целей работы является идентификация функционалов в двух- и трёхмерных экспериментах [4], [5]. Рассматриваются эксперименты по винтовым траекториям деформаций, в которых тонкостенные стальные трубки (сталь 45) нагружались осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением по специальным программам деформирования, отвечающим винтовым траекториям деформаций с постоянной кривизной и кручением. Поскольку в экспериментах [4] данные приведены в виде зависимости компонент соответствующих тензоров от длины дуги траектории деформаций, построение векторов-девиаторов проводилось при условиях, данных в [4].

Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\sigma}{ds} = P\cos\theta_1, \\ \dfrac{d\overline{\sigma}}{ds} - \dfrac{d\sigma}{ds}\overline{n}_\sigma - \left(\dfrac{d\overline{\sigma}}{ds}, \overline{n}'_\varepsilon\right)\overline{n}'_\varepsilon = Q\left(\overline{n}_1 - \cos\theta_1\overline{n}_\sigma - (\overline{n}_1, \overline{n}'_\varepsilon)\overline{n}'_\varepsilon\right), \\ \dfrac{d\sigma}{ds}\overline{n}_\sigma + \left(\dfrac{d\overline{\sigma}}{ds}, \overline{n}'_\varepsilon\right)\overline{n}'_\varepsilon = N\left(\cos\theta_1\overline{n}_\sigma + (\overline{n}_1, \overline{n}'_\varepsilon)\overline{n}'_\varepsilon\right), \end{cases} \tag{2}$$

в каждое из которых входит лишь по одному функционалу процесса.

Первое уравнение определяет скалярные свойства материала, второе и третье – проекции скорости изменения напряжений на плоскость векторов напряжений и деформаций и в соответствующее ортогональное дополнение.

Для трехмерных процессов деформаций направляющие векторы напряжений и деформаций представляются в репере Френе разложениями:

$$\overline{n}_\sigma = \cos\theta_1\overline{n}_1 - \sin\theta_1\left(\cos\theta_2\overline{n}_2 - \sin\theta_2\overline{n}_3\right),\ \overline{n}_\varepsilon = \cos\varphi_1\overline{n}_1 - \sin\varphi_1\left(\cos\varphi_2\overline{n}_2 - \sin\varphi_2\overline{n}_3\right).$$

Тогда из уравнения (1) можно получить систему уравнений для углов θ_1 и θ_2:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{ds} = \kappa_1\cos\theta_2 - \dfrac{Q}{\sigma}\sin\theta_1 - \dfrac{N_1}{\sigma}\sin\theta_1\Delta, \quad (3) \\ \dfrac{d\theta_2}{ds} = \kappa_2 - \kappa_1\dfrac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\sin\theta_2 - \dfrac{N_1}{\sigma}\sin\varphi_1\sin(\theta_2-\varphi_2), \quad (4) \end{cases}$$

$$\omega^2 \equiv \frac{\Delta^2}{\Psi},\ \Delta \equiv \sin\theta_1\cos\varphi_1 - \cos\theta_1\sin\varphi_1\cos(\theta_2-\varphi_2),\ N_1 \equiv \frac{Q-N}{\sqrt{\Psi}}\omega.$$

Здесь κ_1 и κ_2 – кривизны траектории деформаций.

Как видно из уравнения (4), именно функционал N_1 регулирует скорость изменения вдоль траектории процесса деформаций угла θ_2, определяющего положение вектора напряжений относительно соприкасающейся плоскости.

Далее показано, что функционалы Q/σ и N_1/σ определяют две величины следовых реакций в смысле [3], которые, в свою очередь, порождают соответствующие принципы запаздывания векторных свойств. Уравнения (3) и (4) определяют геометрический смысл основных функционалов Q и N_1 не только на трехмерных процессах деформаций, но и на процессах произвольной размерности будем считать, что данная пара функционалов определяет векторные свойства материала. В этом случае основное уравнение (1) тождественно переписывается в терминах этих функционалов в виде:

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = Q\overline{n}_1 + (P-Q)\cos\theta_1\overline{n}_\sigma + N_1\sin\theta_1\left(\overline{n}_\varepsilon - (\overline{n}_\sigma,\overline{n}_\varepsilon)\overline{n}_\sigma\right). \quad (5)$$

В экспериментах Р.А. Васина и др. [4] изучались процессы с трехмерными траекториями деформаций в виде спиралей с постоянными кривизнами и кручениями (m обозначает номер витка спирали), описываемые уравнениями:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} + c\cos\alpha,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} + a\left(\frac{\alpha}{2\pi} + (m-1)\right),\ \varepsilon_3 = c\sin\alpha, \quad c = \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2+\kappa_2^2},\ a = \frac{2\pi\kappa_2}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}. \quad (6)$$

Анализ приведенных там данных показывает, что в экспериментах для мягких сталей с точностью эксперимента уже на втором витке спирали прослеживается установление специального периодического режима нагружения. Это означает, что в каждом из экспериментов траектория нагружения уже к концу первого витка с определенной точностью ложится на круговой цилиндр:

$$\sigma_1 = \sigma_{10} + R\cos(\alpha+\alpha_0),\ \sigma_3 = \sigma_{30} + R\sin(\alpha+\alpha_0),\ \sigma_2 = \sqrt{\sigma(s)^2 - {\sigma_1}^2 - {\sigma_3}^2},\ \sigma(s) = \sigma_0 + G's, \quad (7)$$

$$\sigma_0 \equiv \frac{2G'}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{10}+c) + (G-G')\varepsilon_S,$$

с постоянными в рамках каждого эксперимента величинами R, α_0, σ_{10}, σ_{30}.

Свойства главных функционалов

Из второго уравнения системы (2) с учетом (6) и (7) следует представление через параметры процесса основного функционала Q:

$$Q = \frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\kappa_1}\frac{R}{\cos\alpha_0}\left(1 - \frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\frac{c}{R}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) + \cos\alpha\left(\frac{\sigma_{30}}{R}\sin\alpha_0 - \frac{1}{R}\left(\sigma_{10} - \varepsilon_{10}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right) -$$

$$-\sin\alpha\left(\frac{\sigma_{30}}{R}\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}+\frac{1}{R}\left(\sigma_{10}-\varepsilon_{10}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\sin\alpha_0\right) \tag{8}$$

с коэффициентами, зависящими от геометрических параметров траекторий деформации κ_1 и κ_2, скалярных свойств материала и характеристик (7) траектории нагружения.

Вполне пригодное приближение функционала задаётся формулой $Q=\frac{R}{\cos\alpha_0}\frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\kappa_1}$. Погрешность такого представления в большинстве экспериментов [4] не превосходит 10%.

Второй определяющий функционал N_1 вычисляется из уравнения (2) с учетом (6), (7):

$$N_1\sin\theta_1\sin^2\varphi_1\sin^2(\theta_2-\varphi_2)=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}\frac{d\sigma_2}{ds}-\frac{R}{\varepsilon}\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}\left(\varepsilon_{10}\sin(\alpha+\alpha_0)+\frac{\kappa_1}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}\sin\alpha_0\right)-$$

$$-C\Pi\frac{d\sigma}{ds}-\frac{\frac{d\varepsilon}{ds}-C\Pi\cos\theta_1}{\sin^2\theta_1}\left(R\kappa_1\cos\alpha_0+\frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}}\frac{d\sigma_2}{ds}-\cos\theta_1\frac{d\sigma}{ds}\right).$$

Приближенный результат дается соотношением:

$$\frac{N_1}{\sigma}\frac{\kappa_1\operatorname{ctg}\alpha_0}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}=1+\frac{c}{R}\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\alpha_0}-\left(\frac{c}{R}\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{1}{\cos\alpha_0}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{\cos\alpha_0}\left(1-\frac{c}{R}\frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{2}{\cos\alpha_0}\right)\left(\frac{\sigma_{30}}{R}\sin\alpha+\frac{1}{R}\left(\sigma_{10}-\varepsilon_{10}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)\cos\alpha\right). \tag{9}$$

В нулевом приближении $\frac{N_1}{\sigma}=\frac{\kappa_1^2+\kappa_2^2}{\kappa_1}\cdot\operatorname{tg}\alpha_0$.

В большинстве экспериментов [4] формулы для обоих функционалов (8) и (9) имеют погрешность порядка 10%, что сравнимо с точностью экспериментальных данных. Прямые вычисления подтверждают периодичность Q и N_1/σ.

Другое свойство функционалов Q и N_1/σ заключается в том, что они ограничены и порождают в материале следовые реакции, что также согласуется с экспериментальными данными [4], [5] и приведёнными в следующем разделе результатами.

Элементы термомеханики процессов сложного нагружения

В классической теории пластичности для решения вопроса об условиях перехода от области активного нагружения к разгрузке обычно вводят специальную поверхность, разделяющую эти области. В данном рассмотрении ниже использован иной подход, не требующий введения ненаблюдаемых в экспериментах объектов.

Уравнение (5) преобразуем при помощи подстановки $\bar{\varepsilon}=M\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{M}\right)$. Получим:

$$\begin{cases}\frac{d\sigma}{ds}=P\cos\vartheta_1,\\ \frac{dM}{ds}+M\frac{N_1}{Q}\frac{\sin\vartheta_1}{\varepsilon}=0,\\ \frac{d\bar{\sigma}}{ds}-\frac{d\sigma}{ds}\bar{n}_\sigma=QM\left(\frac{d}{ds}\frac{\bar{\varepsilon}}{M}-\bar{n}_\sigma\left(\bar{n}_\sigma,\frac{d}{ds}\frac{\bar{\varepsilon}}{M}\right)\right).\end{cases}$$

Подстановка означает переход от эвклидовой метрики, естественной для девиаторного пространства, к внутренней метрике процесса, естественной для самого процесса. Полученная система эквивалентна (5) и является трехчленной формулой для деформаций, перенормированных с помощью метрики M. Аналогичным образом можно преобразовать с помощью метрики Σ и слагаемые с напряжениями. В результате получается уравнение процесса в специальных метриках M, Σ, соотношения для метрик, в которые входят два следа запаздывания:

$$\begin{cases} \left(\Sigma \dfrac{d}{ds}\dfrac{\bar{\sigma}}{\Sigma}\right) = Q\left(M\dfrac{d}{ds}\dfrac{\bar{\varepsilon}}{M}\right), \\ \dfrac{dM}{ds} + \dfrac{M}{\lambda_1} = 0, \\ \dfrac{d\Sigma}{ds} + \dfrac{\Sigma}{\lambda_2} = 0, \\ \dfrac{1}{\lambda_1} \equiv \dfrac{N_1}{Q}\dfrac{\sin\vartheta_1}{\varepsilon}, \\ \dfrac{1}{\lambda_2} \equiv \dfrac{Q}{\sigma}\cos\vartheta_1 + \dfrac{N_1}{\sigma}(\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon)\sin\vartheta_1 - \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{d\sigma}{ds}. \end{cases} \tag{10}$$

Величины следов $\lambda_{1,2}$ определяются с использованием приведенных выше аппроксимаций определяющих функционалов. В нулевом приближении следы постоянны и известны.

Уравнения (10) и (2) созвучны, поскольку связывают между собой приращения векторов напряжений и деформаций и содержат один и тот же функционал. Уравнения (10) являются канонической формой основных уравнений (5) и записаны с использованием специальных метрик эвклидовых пространств векторов напряжений и деформаций. В исходном состоянии (ненапряженном и недеформированном) пятимерное девиаторное пространство было первоначально нормировано. В этом пространстве изображаются одновременно и процесс деформаций, и процесс нагружения. При необратимом деформировании метрика пространств деформаций и/или напряжений изменяется. Это хорошо видно в экспериментах [7], [9], где материал в процессе необратимых деформаций упрочняется в направлении деформирования и разупрочняется в противоположном направлении, а поверхность текучести соответствующим образом искажается. Поэтому введение в теорию упругопластических процессов изменяющихся в процессе сложного нагружения метрик основных девиаторных пространств представляется естественным и существенно отличает данный подход от классического подхода [1]. С учетом изменения метрики, как это было сделано в [6], имеем:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} = M\frac{d}{ds}\frac{\bar{\varepsilon}}{M} + \frac{\bar{\varepsilon}}{M}\frac{dM}{ds}.$$

Это равенство является аддитивным и точным представлением скорости деформаций при произвольно изменяющейся в процессе деформаций метрике пространства.

Второе слагаемое как раз связано с изменением метрики. Обозначим:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^*}{ds} \equiv M\frac{d}{ds}\frac{\bar{\varepsilon}}{M}, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}_P}{ds} \equiv \frac{\bar{\varepsilon}}{M}\frac{dM}{ds} = -\frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda_1}. \tag{11}$$

Аналогично будем считать, что в процессе нагружения метрика пространства напряжений также может изменяться.

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = \Sigma\frac{d}{ds}\frac{\bar{\sigma}}{\Sigma} + \frac{\bar{\sigma}}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{ds}, \frac{d\bar{\sigma}^*}{ds} \equiv \Sigma\frac{d}{ds}\frac{\bar{\sigma}}{\Sigma}, \frac{d\bar{\sigma}_P}{ds} \equiv \frac{\bar{\sigma}}{\Sigma}\frac{d\Sigma}{ds} = -\frac{\bar{\sigma}}{\lambda_2}.$$

Механический смысл введенных новых векторных полей будет обсуждаться ниже. С учетом (10) получим:

$$\frac{d\bar{\sigma}^*}{ds} = \Sigma \frac{d}{ds}\frac{\bar{\sigma}}{\Sigma} = QM\,\frac{d}{ds}\frac{\bar{\varepsilon}}{M}.$$

Интегрированием находим напряжения:

$$\bar{\sigma}^*(s) - \bar{\sigma}^*(s_0) = Q(s)\bar{\varepsilon}(s) - Q(s_0)\bar{\varepsilon}(s_0) - \int_{s_0}^{s} \frac{\bar{\varepsilon}}{M}\, d(QM). \qquad (12)$$

Аналогичным образом из (10) получаем представление напряжений:

$$\bar{\sigma}(s) - \bar{\sigma}(s_0)\frac{\Sigma(s)}{\Sigma(s_0)} = Q(s)\bar{\varepsilon}(s) - Q(s_0)\bar{\varepsilon}(s_0)\frac{\Sigma(s)}{\Sigma(s_0)} - \Sigma\int_{s_0}^{s} \frac{\bar{\varepsilon}}{M}\, d\left(\frac{QM}{\Sigma}\right). \qquad (13)$$

Если $Q(s)\bar{\varepsilon}(s)$ выразить из (12) и подставить в (13), можно получить другое представление напряжений $\bar{\sigma}(s)$ через $\bar{\sigma}^*(s)$ и деформации $\bar{\varepsilon}(s)$:

$$\left[\bar{\sigma}(s) - \bar{\sigma}^*(s)\right]_0^s \equiv Q(s_0)\bar{\varepsilon}(s_0) - \bar{\sigma}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \frac{\bar{\varepsilon}(p)}{M(p)}\left(1 - \frac{\Sigma(s)}{\Sigma(p)}\right) d\left(QM\right) + \Sigma\int_{s_0}^{s} \frac{Q\bar{\varepsilon}}{\Sigma^2}\, d\Sigma. \qquad (14)$$

Эта формула может быть истолкована как аддитивное представление напряжений в виде суммы напряжений $\bar{\sigma}^*(s)$ и некоторых дополнительных напряжений $\bar{\sigma}(s) - \bar{\sigma}^*(s)$. Как видно, эти дополнительные напряжения определяются историей изменения метрик пространств напряжений и деформаций в процессе деформаций.

Диссипация

1. Используем полученные выше аддитивные представления приращений деформаций (11) и напряжений для преобразования элементарной работы δA и отдельных ее частей. В данном разделе считаем величины $\bar{\varepsilon}_P, \bar{\sigma}_P$ характеристиками необратимых изменений в материале, а величины, отмеченные звездочкой, относим к переменным состояния. Тогда:

$$\delta A = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma}^* d\bar{\varepsilon}^* + (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*) d\bar{\varepsilon}^* + \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_P = du + \delta D.$$

С учетом (14) для диссипации и внутренней энергии имеем представления:

$$\delta D = (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*) d\bar{\varepsilon}^* + \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_P,\; du = \bar{\sigma}^* d\bar{\varepsilon}^*. \qquad (15)$$

Сказанное выше означает, что необратимые деформации в материале обусловлены исключительно изменением метрик пространств напряжений и деформаций. Аналогично записывается выражение диссипации и в процессе нагружения:

$$d(u - \bar{\sigma}\bar{\varepsilon}) = -\bar{\varepsilon}^* d\bar{\sigma}^* - (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^*) d\bar{\sigma}^* - \bar{\varepsilon} d\bar{\sigma}_P - \delta D,\;\; \delta D = (\bar{\varepsilon}^* - \bar{\varepsilon}) d\bar{\sigma}^* - \bar{\varepsilon} d\bar{\sigma}_P. \qquad (16)$$

Поскольку уравнения (2) были выведены в [2] из геометрических соображений, то возникает вопрос: не сводится ли предлагаемая теория каким-либо образом к теориям пластического течения, полученным из постулатов пластичности? В теориях пластического течения основным объектом является поверхность текучести, разделяющая области обратимых и необратимых деформаций. Уравнение этой поверхности в пространстве деформаций (нагружения) в каждой точке траектории процесса считается априори известным и задается некоторой зависимостью типа $F(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_P, ...) = 0$. Принципы градиентальности имеют вполне понятную термомеханическую подоплеку, которая приводит для гладких поверхностей текучести к ортогональности вектора приращения пластической деформации к поверхности. В процессе деформаций это приводит к уравнению:

$$d\bar{\varepsilon}_P = d\lambda \frac{\partial F(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_P, ...)}{\partial \bar{\varepsilon}}.$$

В рассматриваемом нами случае:

$$d\bar{\varepsilon}_P = -\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{N_1}{Q}\sin\vartheta_1 ds.$$

Это позволяет при $F(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}_P) = f(\varepsilon) - \varepsilon_P = 0, \varepsilon_P \equiv \int\sqrt{(d\bar{\varepsilon}_P)^2}$ конкретизировать зависимость $f(\varepsilon)$ в процессе деформаций:

$$f(\varepsilon(s)) = \int_0^s \frac{N_1}{Q}\sin\vartheta_1 ds. \qquad (17)$$

Таким образом, принятая выше схема аддитивного разделения приращений деформаций и сделанный выше выбор параметров состояния приводят к точному соответствию рассматриваемой теории и модели пластичности с изотропным упрочнением и трансляцией поверхности текучести в пространстве деформаций. При вычислении диссипации исходим из определений величин и формулы (15):

$$d\bar{\varepsilon}_P = \frac{\bar{\varepsilon}}{M}dM, d\bar{\varepsilon}^* = Md\frac{\bar{\varepsilon}}{M}, d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}^* + d\bar{\varepsilon}_P, \bar{\sigma}d\bar{\sigma}^* = \frac{1}{2}d\sigma^2 + \sigma^2\frac{ds}{\lambda_2}.$$

Преобразуем (15) с учетом (10):

$$\delta D = \frac{(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}^*)d\bar{\sigma}^*}{Q} - \frac{(\bar{\varepsilon},\bar{\sigma})}{\lambda_1}ds = \left(\frac{1}{2}d\sigma^2 + \sigma^2\frac{ds}{\lambda_2}\right)\frac{1}{Q} - \frac{\sigma^* d\sigma^*}{Q} - \frac{(\bar{\varepsilon},\bar{\sigma})}{Q}N_{1\sigma}\sin\vartheta_1\frac{\sigma}{\varepsilon}ds =$$

$$= \frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}d\sigma^2 - \frac{1}{2}d\sigma^{*2} + \sigma ds\left(\frac{R}{\cos\alpha_0}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2} - G'\right)\right). \qquad (18)$$

Полученное приближенное представление с учетом положительности функционала и экспериментальных данных является неотрицательным, что обеспечивает выполнение термодинамического неравенства и, следовательно, активность процессов с винтовыми траекториями деформаций вида (6) из [4]. Заметим, что в рассматриваемом случае функционал Q в силу первого соотношения (10) связывает переменные состояния законом гипоупругости, что оправдывает использование этих переменных в качестве параметров состояния. Однако в силу (9) этот функционал явно зависит от кривизны траектории деформации и, следовательно, не является характеристикой свойств материала. В следующем разделе данное противоречие устраняется.

2. Исходной точкой здесь также является аддитивное представление приращения деформаций:

$$d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}^* + \frac{\bar{\varepsilon}}{M}dM = \frac{d\bar{\sigma}^*}{G} + \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{G}\right)d\bar{\sigma}^* - \frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda_1}ds \equiv d\bar{\varepsilon}^{**} + d\bar{\varepsilon}_P,$$

$$d\bar{\varepsilon}_P = \left(1 - \frac{Q}{G}\right)d\bar{\varepsilon} - \frac{Q}{G}\frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda_1}ds, d\bar{\varepsilon}^{**} \equiv \frac{d\bar{\sigma}^*}{G}, \qquad (19)$$

но иначе выбираются параметры состояния и характеристики необратимости.

Соотношение (19) по сравнению с (11) выглядит значительно богаче. В нем, наряду с изотропным упрочнением, имеется дополнительное кинематическое упрочнение и, возможно, изменяющаяся в процессе, не обязательно сферическая геометрия поверхности текучести. Однако вопрос о существовании предельной поверхности для соотношения (19) выходит за пределы данного рассмотрения.

В соответствии с выбранными параметрами состояния и необратимости выполняем преобразования элементарной работы внутренних сил:

$$\delta A=\bar{\sigma}^{*}d\bar{\varepsilon}^{**}+(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}^{*})d\bar{\varepsilon}^{**}+\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}_{P}=$$

$$=\frac{\bar{\sigma}^{*}d\bar{\sigma}^{*}}{G}+\frac{(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}^{*})d\bar{\sigma}^{*}}{G}+\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{G}\right)\bar{\sigma}d\bar{\sigma}^{*}-\frac{(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon})}{\lambda_{1}}ds=du+\delta D,du\equiv\frac{\bar{\sigma}^{*}d\bar{\sigma}^{*}}{G},$$

$$\delta D\equiv\frac{(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}^{*})d\bar{\sigma}^{*}}{G}+\left(\frac{1}{Q}-\frac{1}{G}\right)\bar{\sigma}d\bar{\sigma}^{*}-\frac{(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon})}{\lambda_{1}}ds=$$

$$=\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}d\sigma^{2}+\sigma ds\left(\frac{R}{\cos\alpha_{0}}\frac{\kappa_{2}}{\kappa_{1}}\sqrt{\kappa_{1}^{2}+\kappa_{2}^{2}}-G'\right)\right)-\frac{1}{2G}d\sigma^{*2}. \qquad (20)$$

Оба соотношения (18) и (20) были получены приближенно с учетом только главных членов входящих в них определяющих функционалов. Более точные оценки возможны.

Подобно тому как было получено соотношение (19) и в соответствии с теоремой изоморфизма [1], аналогично поступаем с аддитивным представлением приращения напряжений:

$$d\bar{\sigma}=d\bar{\sigma}^{*}+\frac{\bar{\sigma}}{\Sigma}d\Sigma=d\bar{\sigma}^{*}-\frac{\bar{\sigma}}{\lambda_{2}}ds=Gd\bar{\varepsilon}^{*}+(Q-G)d\bar{\varepsilon}^{*}-\frac{\bar{\sigma}}{\lambda_{2}}ds\equiv d\bar{\sigma}^{**}+d\bar{\sigma}_{P},$$

$$d\bar{\sigma}_{P}=(Q-G)d\bar{\varepsilon}+(Q-G)\frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda_{1}}ds-\frac{\bar{\sigma}}{\lambda_{2}}ds,d\bar{\sigma}^{**}\equiv Gd\bar{\varepsilon}^{*}. \qquad (21)$$

Уравнение (21) для диссипативных напряжений входит в общую постановку задачи, но также интересно из-за того, что данные напряжения входят в состав скалярных параметров (7) и подлежат определению. Вычислениями показана возможность использования соотношений (14) и (21) в качестве формул для определения диссипативных напряжений. Это в том числе означает пригодность рассмотренных подходов (18), (20) к оценке функции диссипации и установления с их помощью критериев активного нагружения.

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории // Изд-во АН СССР, М., 1963, 272 с.
2. Молодцов И.Н. Процессы сложного нагружения в теории пластичности // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. М., 2006, с. 204 – 210.
3. Малый В.И. Исследование некоторых функционалов теории упругопластических процессов // Упругость и неупругость, Москва, 1978, вып.5, с. 107 – 116.
4. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Широв Р.И. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. Деп. в ВИНИТИ, 16.10.86, №7298-В86. 66 с.
5. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность // Книга 1. Процессы сложного нагружения. Тверь: Тверской ГТУ, 2003, 170 с.
6. Огибалов П.М., Тамбовцев Е.П., Молодцов И.Н. Динамическая калибровка диссипации в нелокальных композитах // Механика композитных материалов. Рига, 1986, № 2, с. 217 – 224.
7. Ленский В.С. В сборнике «Упругость и неупругость». М., 1978, вып. 5.
8. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. 144 с.
9. Дж. Белл. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Том 2. М.: Наука, 1984, 431 с.