УДК 539.3

Устойчивость тонкостенных упругопластических конструкций при реализации процессов сложного комбинированного деформирования

д.т.н. проф. Охлопков Н.Л., Черемных С.В.
ТвГТУ
8(4822) 52-63-63, stepan_1986@bk.ru

Аннотация. Рассматривается задача бифуркации тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с учетом сложного характера деформирования в момент потери устойчивости при сложном докритическом нагружении осевой сжимающей силой и крутящим моментом в девиаторной плоскости деформаций А.А. Ильюшина $Э_1 - Э_3$. Используется условие несжимаемости материала и условие однородности напряженного состояния в оболочке до момента потери устойчивости. Задача решается в геометрически линейной постановке.

Ключевые слова: *пластичность, устойчивость, сложное нагружение, бифуркация, оболочка.*

Для решения задачи бифуркации оболочки при сложном комбинированном докритическом нагружении в каждой точке траектории деформации необходимо знать значения компонент напряженного состояния. Таким образом, задача состоит из двух частей: построение образа процесса нагружения материала и собственно решение задачи бифуркации.

Уравнения связи напряжений и деформаций в момент потери устойчивости оболочки и при построении образа процесса нагружения материала принимаем в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности, которые в скоростях принимают вид [1, 2]:

$$\dot{S}_{ij} = N\dot{Э}_{ij} + (\sigma' - N\tau)\dot{S}\frac{S_{ij}}{\sigma}, \quad (i, j = 1,2,3), \tag{1}$$

где: $\sigma' = \dfrac{d\sigma}{dS} = P\tau$; $\tau = \cos\vartheta_1$; $Э_{ij} = e_{ij}$; S_{ij} – компоненты тензора-девиатора напряжений;

$Э_{ij}$ – компоненты тензора-девиатора деформаций. Здесь $\dfrac{d\sigma}{dS}$, N – определяющие функции пластичности, ϑ_1 – угол сближения ($\cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1$), S – длина дуги траектории деформации. Символ с точкой наверху означает дифференцирование по обобщенному параметру времени $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dS}\cdot\dfrac{dS}{dt}$.

Для определяющих функций пластичности N и $\dfrac{d\sigma}{dS}$ принимаем аппроксимации, предложенные В.Г. Зубчаниновым [1]:

$$\begin{gathered} N = 2G_p + \left[2G - 2G_p\right]\left(\frac{1-\cos\vartheta_1}{2}\right)^q \\ \frac{d\sigma}{dS} = 2G_k - \left[2G + 2G_k\right]\left(\frac{1-\cos\vartheta_1}{2}\right)^p \end{gathered}, \tag{2}$$

где: G, G_k, G_p – модуль сдвига, касательный и секущий модули сдвига материала соответственно.

Уравнение для определения угла сближения ϑ_1 имеет вид:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\sigma \sin \vartheta_1}{N} - \chi_1, \tag{3}$$

где: σ – модуль вектора напряжений, χ_1 – кривизна траектории.

Уравнения (1) и (3) имеют вид уравнений задачи Коши, которую решаем методом Рунге-Кутта. За параметр обобщенного времени t на участках сложной траектории деформирования принимаются различные монотонно возрастающие параметры процесса.

Таким образом, в каждой точке траектории деформаций определяем компоненты напряженного состояния и далее решаем бифуркационную задачу.

Цилиндрическую оболочку считаем «длинной», шарнирно подкрепленной по торцам. Решение задачи бифуркации сводим к решению задачи о собственных числах [1].

В результате окончательно получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\sigma K_* i^2 / g_1 E + i\Omega_1^{**} / 2g_1 S_* = \lambda_m^2 \left[\theta + 3K_* \left(\Omega_2^{**} - \Omega_1^{**} N_2^* / N_1^*\right) / 4g_1\right] \\ e = -2i / S_* \lambda_m^2 - \left(\theta_1 \Omega_1^{**} + N_2^* K_*\right) / N_1^* \end{cases}, \tag{4}$$

где:

$$K_* = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* r^2 - 2\sigma_{12}^* r,\ S_* = S_{11}^* r^2 + S_{22}^* + 2S_{12}^* r,\ \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma},\ S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, r = \frac{n}{\lambda_m},$$

$$g_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{2}\left(N_3^* - \frac{N_2^{*2}}{N_1^*}\right),\ \theta = \left(1 + r^2\right)^2 - \frac{K_*^2}{2},\ \theta_1 = \frac{2\left(1 + r^2\right)^2}{3S_*^2} - 1, \tag{5}$$

$$2G \cdot N_m^* = \int_{-1}^{1} N\left(z^*\right)^{m-1} dz^*,\ 2G \cdot \Omega_m^{**} = \int_{-1}^{1} \sigma' S^*\left(z^*\right)^{m-1} dz^*,\ z^* = \frac{z}{h}.$$

где: $i = 3R/h$ – гибкость оболочки.

Решение бифуркационной задачи позволяет для заданной комбинации полуволн m, n изогнутого состояния вычислить критическую гибкость оболочки i в зависимости от значения модуля вектора напряжений σ в момент потери устойчивости.

Интегралы Ω_m^{**} и N_m^* в (5) определяются численно по методу Симпсона. В качестве нулевого приближения на каждом этапе нагружения оболочки используется решение при чистопластической бифуркации, когда излом траектории не учитывается.

Так же расчеты выполнены на основе теории устойчивости А.А. Ильюшина, в которой используются определяющие соотношения теории квазипростых процессов [1].

Для определяющих функций пластичности используются аппроксимации:

$$\begin{cases} N = 2G(1-\omega),\ P = 2G(1-\lambda),\ 0 \le \vartheta_1 \le \pi/2 \\ N = P = 2G,\ \pi/2 \le \vartheta_1 \le \pi \end{cases}, \tag{6}$$

где: ω – параметр пластичности А.А. Ильюшина, λ – параметр разупрочнения.

Система алгебраических уравнений задачи о собственных числах принимает вид:

$$\begin{gathered} i^2 \frac{\sigma}{Eg_1}\left(-K_* - \frac{EN_1^*}{2\sigma\theta}\lambda_m^4\right) + i\frac{3}{2}\frac{N_1^* \Phi^*}{g_1 \theta}\lambda_m^2 K_* S_* = \left(\lambda_m^2 + n^2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{g_2}{g_1}\right)K_*^2 + \frac{9}{8}\frac{N_1^* \Phi^{*2}}{g_1 \theta}K_*^2 S_*^2 \\ C\theta = \frac{N_1^*}{2}\lambda_m^2 - \frac{3}{4}\frac{N_1^* \Phi^*}{i}K_* S_* \end{gathered}. \tag{7}$$

Учитывается разгрузка материала в момент бифуркации.

Расчеты сопоставлены с экспериментальными результатами, полученными на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета. Эксперименты реализованы на тонкостенных круговых цилиндрических оболочках, изготовленных из стали 45 из двух разных партий отгрузки материала. Диаграмма деформирования материала при простом нагружении показана кривой 1 и 2 на рисунке 1.

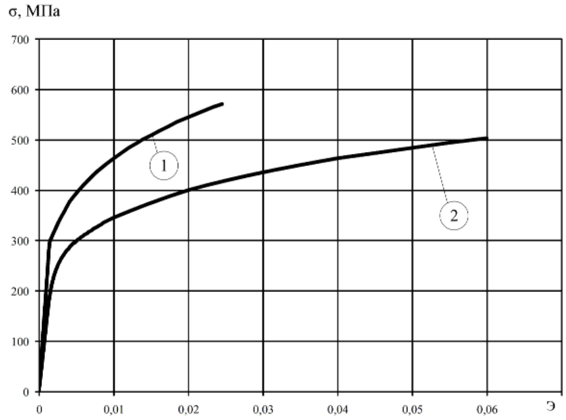

Рисунок 1. Диаграмма деформирования образцов из стали 45 при простых процессах

Работа выполняется с целью проверки влияния истории сложного докритического нагружения на критические параметры устойчивости оболочек. Ранее расчеты были выполнены для веера двузвенных прямолинейных ломаных траекторий в девиаторной плоскости деформаций А.А. Ильюшина $Э_1 - Э_3$.

Дополнительно, в качестве примера для материала 2 из стали 45, рассмотрена сложная криволинейная траектория, представляющая собой растяжение до заданного уровня R на первом звене и дальнейший переход на траекторию деформирования постоянной кривизны радиуса R (рисунок 2).

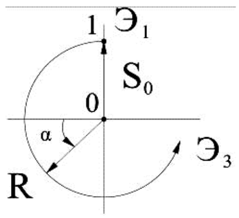

Рисунок 2. Траектории деформирования образцов из стали 45
R – радиус дуги окружности

На рисунке 3 показана траектория нагружения оболочки, соответствующая реализованной траектории деформирования. Сплошная линия отражает решение задачи построения образа процесса нагружения. Момент потери устойчивости в эксперименте и расчетах указан на рисунке стрелками.

Рисунок 3. Траектория нагружения

Расчеты выполнены для процесса при R = 1.5 %. Как показывают эксперимент и расчеты, при данных параметрах процесса потеря устойчивости оболочки реализуется на криволинейной части траектории. На рисунке 4 представлены графики зависимости критических параметров напряжений от гибкости оболочки, построенные как огибающие кривых устойчивости, вычисленных при различных комбинациях параметров волнообразования m, n.

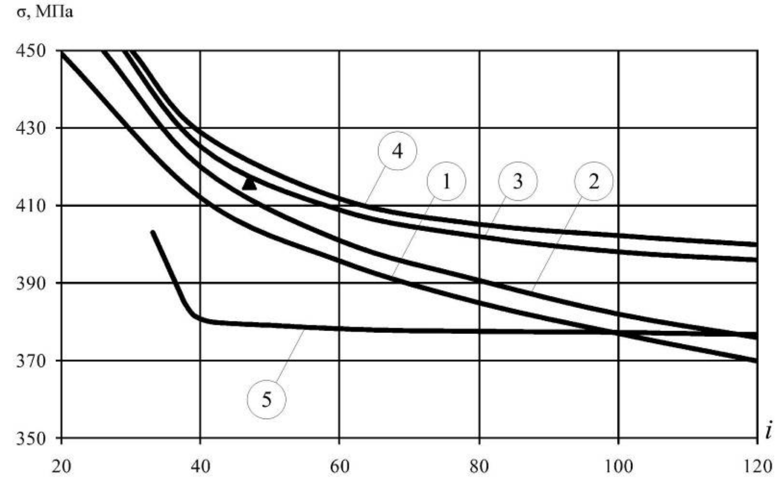

Рисунок 4. Графики наименьшей гибкости оболочки

Цифрами на рисунке обозначено: 1, 2 – расчет по теории устойчивости А.А. Ильюшина при чисто пластической бифуркации и с учетом разгрузки материала соответственно; 3 – расчет с учетом сложного нагружения в момент потери устойчивости при использовании для функции $\dfrac{d\sigma}{dS}$, а для функции N соотношения $N = 2G(1-\omega)$; 4 – расчет с учетом сложного нагружения в момент потери устойчивости при использовании для определяющих функций пластичности со значениями материальных параметров, входящих в структуру аппроксимаций равными p=q=1.0; 5 – то же, при p=q=0.5. Треугольником на рисунке отмечены экспериментальные результаты.

На рассмотренном процессе реальный учет сложного характера нагружения оболочки в момент потери устойчивости позволяет уточнить решение в сопоставлении с расчетами, например по теории устойчивости А.А. Ильюшина.

Так же в качестве примера для материала 1 из стали 45 рассмотрены трехзвенные траектории, представляющие собой: растяжение до заданного уровня R на первом звене; 1,25 витка траектории постоянной кривизны радиуса R на втором звене; сжатие до потери устойчивости при поддержании постоянного уровня деформации кручения $Э_3$ на третьем звене (рисунок 5).

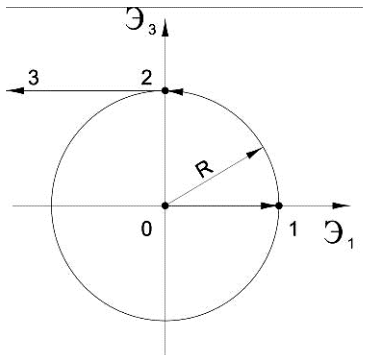

Рисунок 5. Траектории деформирования образцов из стали 45

Расчеты выполнены для нескольких процессов при R = 0.5, 1 и 1.5 %. При данных параметрах процесса потеря устойчивости оболочки на криволинейной части траектории не происходит. Показатели степеней p и q, входящие в состав аппроксимаций (2) определяющих функций пластичности при теоретическом построении образа процесса нагружения материала принимались p=0.6 и q=1.35.

На рисунках 6, 7 и 8 приведены графики критических параметров напряжений и деформаций, построенные как огибающие кривых устойчивости, вычисленных при различных комбинациях параметров волнообразования m, n.

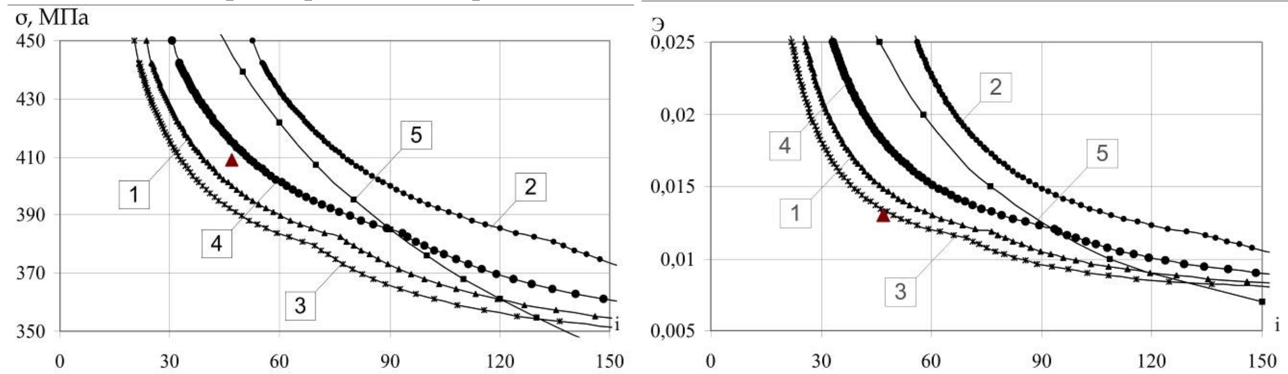

Рисунок 6. Критические параметры напряжений и деформаций (*R*=0,5%)

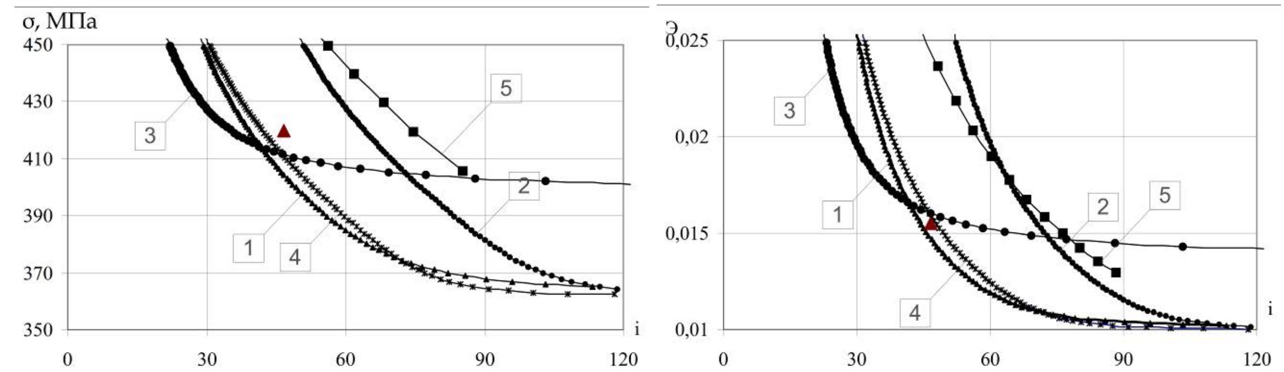

Рисунок 7. Критические параметры напряжений и деформаций (*R*=1%)

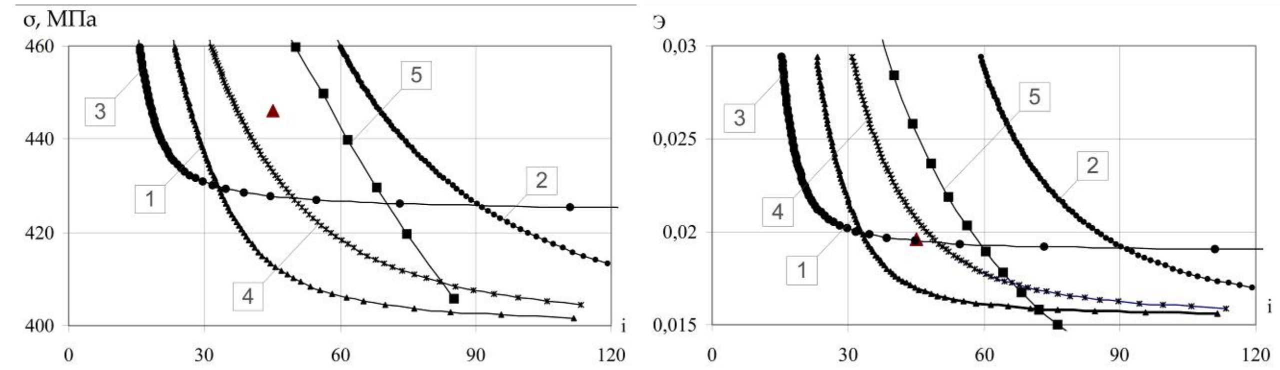

Рисунок 8. Критические параметры напряжений и деформаций (*R*=1%)

Цифрами на рисунках обозначено: 1 – расчет, выполненный с учетом сложного характера нагружения в момент потери устойчивости при показателях степеней p=0.6 и q=1.35 (соответствуют значениям, принятым при решении задачи построения образа процесса нагружения); 2 – расчет при показателях степеней p=1 и q=1; 3 – расчет при показателях степеней p=0.55 и q=1,35; 4 – расчет при p=0.7 и q=1.35; 5 – расчет по теории устойчивости А.А. Ильюшина с учетом разгрузки материала в момент потери устойчивости. Треугольниками отмечены экспериментальные результаты.

На рисунке 9 в девиаторной плоскости деформаций показаны зоны устойчивых состояний оболочки. Цифры и условные обозначения соответствуют предыдущим рисункам.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что определяющие соотношения гипотезы компланарности и аппроксимации определяющих функций пластичности

В.Г. Зубчанинова, учитывающие изменение угла сближения в процессе деформирования, позволяют получить достоверное решение задачи бифуркации круговой цилиндрической оболочки при сложном докритическом нагружении.

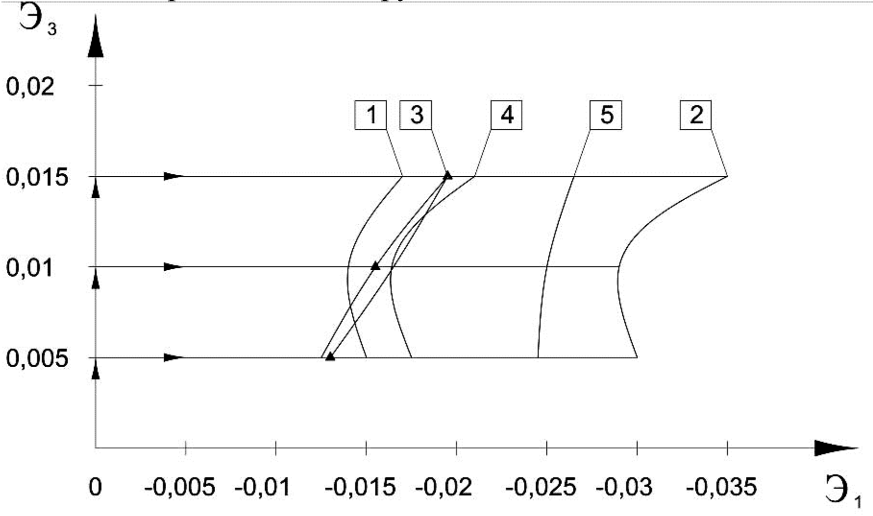

Рисунок 9. Зоны устойчивых состояний в плоскости $Э_1 - Э_3$ для оболочек из стали 45

На рассмотренных процессах реальный учет сложного характера нагружения оболочки в момент потери устойчивости позволяет существенно уточнить решение в сопоставлении с расчетами, например по теории устойчивости А.А. Ильюшина, которые дают завышенные значения критических напряжений и деформаций.

Показатели степеней p и q в аппроксимациях определяющих функций пластичности при сложных докритических процессах не могут приниматься равными p=q=1 и зависят от реализуемой траектории. При этом влияние параметра p на расчетные значения критических напряжений и деформаций проявляется в большей степени, чем изменение параметра q.

Расчеты выполнены также для ряда иных траекторий сложного докритического нагружения [3].

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 448 с.
2. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности: Монография / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
3. Зубчанинов В.Г. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гараников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.