

прямом запуске.

4. Значительные пусковые токи в начальный момент в фазах БДПТ говорят о необходимости введения в систему ограничения по току с целью уменьшения токов, протекающих по фазам инвертора (коммутатора) в момент пуска.

Литература

1. Шевченко А.Ф., Медведко А.С., Бухгольц Ю.Г. и др. Стартер-генераторное устройство для легковых автомобилей класса ВАЗ – 2110 // Электротехника. – 2003. № 9. – С. 15-19.
2. Мигунов А.Л., Кауров С.Ю., Юдин В.А. Стартер-генераторное устройство для легковых автомобилей // Актуальные проблемы автотранспортного комплекса: межвуз. сб. науч. статей. – Самара: СамГТУ, 2012. – С. 50-61.
3. Герман-Галкин С.Г. Matlab&Simulink. Проектирование мехатронных систем на ПК. – СПб.: КОРОНА-Век, 2008. – 368 с.
4. Чижков Ю.П., Акимов С.В., Электрооборудование автомобилей. Учебник для вузов. – М.: Издательство «За рулем», 2001. – 384 с.
5. Мигунов А.Л., Кауров С.Ю. Моделирование работы электропусковой системы автомобиля на базе интегрированного стартер-генератора // Вестник транспорта Поволжья. – Самара, 2013. № 1 (37). – С. 50-57.
6. Овчинников И.Е. Вентильные электрические двигатели и привод на их основе. Курс лекций. СПб.: КОРОНА-Век, 2006. – 336 с.
7. Ковчин С.А., Сабинин Ю.А. Теория электропривода: учебник для студентов вузов. – СПб.: Энергоатомиздат, 2000. – 496 с.
8. Патент № 2453034 РФ. Устройство управления асинхронным стартер-генератором / Кауров С.Ю., Макаровский Л.Я., Мигунов А.Л., Репин А.С., Умывалкин С.В. – заявка №2010130518/07 от 20.07.10; опубл. 10.06.12. Бюл. № 16.
9. Дентон Т. Автомобильная электроника. Пер. с англ. – М.: НТ Пресс, 2008. – 576 с.
10. Мигунов А.Л., Кауров С.Ю., Тулупов П.В. Имитационное моделирование мехатронных систем с бесконтактными двигателями постоянного тока // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. – 2014. № 5. – С. 57-62.
11. Патент № 2543076 РФ. Стартер-генератор автомобиля / Кауров С.Ю., Мигунов А.Л., Юдин В.А. – заявка № 2013129596/07 от 27.06.2013; опубл. 27.02.2015. Бюл. № 6.
12. Грузков С.А., Морозов В.А., Нагайцев В.И. и др. Электрооборудование летательных аппаратов. Том 2. Учебник для вузов / Под ред. С.А. Грузкова. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 552 с.

Математические модели электромеханики как асимптотика уравнений Максвелла – Минковского

к.т.н. доц. Нигматуллин Ш.М., Шендеровский И.М.

Университет машиностроения

8(495)223-05-23 доб 1246, nigmat@mami.ru, 8-905-776-29-67, joshend@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены методические недостатки стандартной формулировки электродинамики движущихся материальных тел: ограничение инерциальными движениями рассматриваемых тел, использование материальных соотношений в виде линейных уравнений с постоянными коэффициентами, отсутствие аналитически корректного перехода к квазистационарным электромагнитным процессам. Показано, что эти недостатки можно преодолеть, используя экспериментальный факт отсутствия у электромагнитного поля массы покоя и применяя асимптотические разложения полей по малым параметрам, которыми являются отношение скорости движения тел к скорости света и отношение размеров технического устройства к минимальной длине электромагнитной волны.

Ключевые слова: техническая электродинамика, уравнения Максвелла,

электрические и магнитные параметры вещества, постулат Минковского-Седова, малый параметр, ускоренное движение.

Современные технологии автоматизированного проектирования электрических генераторов, двигателей, реле и др. электромеханических устройств требуют использования системы вычислительных алгоритмов, основанной на синтезе методов классической механики и теории электромагнитного поля. Это вызвано тем, что в номенклатуре создаваемых устройств значительно возрос удельный вес электрических машин нетрадиционного исполнения, при проектировании которых стандартные методы теории электрических машин и аппаратов практически не работают. Примером этому являются автомобильные генераторы с ключообразной полюсной системой и стартер-генераторы, для которых до сих пор нет последовательной теории установившихся и переходных процессов. Отсутствие в литературе связной системы математических моделей, описывающих взаимодействие движущихся деталей и узлов технических устройств с электромагнитным полем, серьезно затрудняет создание эффективной системы вычислительных алгоритмов и программного обеспечения систем автоматизированного проектирования электромеханических систем (САПР ЭМС), без которых невозможно конструирование конкурентоспособных изделий АТЭ.

Техническая электродинамика базируется, как правило, на классических макроскопических уравнениях Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j} & \text{(I);} & \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t & \text{(II);} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_e & \text{(III);} & \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{(IV);} \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= -\partial \rho_e / \partial t & \text{(V).} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Связи между полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ описываются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} & \text{(I);} & \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} & \text{(II).} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При создании работоспособных моделей необходимо, в первую очередь, дополнить уравнения (2) соотношениями, описывающими связь поляризованности $\mathbf{P}$, намагниченности $\mathbf{M}$ и электрической проводимости вещества σ с полевыми переменными. Во-вторых, уравнения (1) и (2) необходимо модифицировать так, чтобы учесть в моделируемой системе материальных тел, движущихся со скоростями $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Третье требование сводится к тому, что полученные уравнения необходимо преобразовать так, чтобы исключить из рассматриваемой модели «паразитные» (несущественные) высокочастотные электромагнитные процессы, ведущие, как правило, к вычислительной неустойчивости.

В рассматриваемых задачах связи между электрическими и магнитными параметрами вещества с одной стороны, и полевыми переменными – с другой, описываются в неподвижной системе отсчета Ξ_0 феноменологическими соотношениями вида:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}^0(\mathbf{E}) & \text{(I);} & \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^0(\mathbf{H}) & \text{(II);} & \quad \mathbf{j} = \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}) & \text{(III).} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При этом вектор-функции $\mathbf{P}^0(\dots)$, $\mathbf{M}^0(\dots)$ и $\mathbf{J}_e^0(\dots)$ считаются гладкими (дифференцируемыми достаточное число раз) функциями своих векторных аргументов.

Для моделирования влияния движущихся поляризующихся и намагничивающихся тел на электромагнитное поле существенным является то, что для задач электромеханики справедливо неравенство:

$$\beta = |\mathbf{v}|c^{-1} \leq 10^{-4}, \quad (4)$$

где: $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ – скорость света в вакууме.

Кроме того, рассматриваемые технические системы характеризуются «квантом времени» Δ_t , представляющим собой порог чувствительности применяемых измерительных приборов и порог разрешающей способности применяемых моделей материальных сред. «Квант времени» Δ_t и характерный линейный размер системы L_m связаны, как правило, соотношением:

$$\gamma = L_m / (c\Delta_t) = o(10^{-1}), \quad (5)$$

показывающим, что электромагнитная волна, вызванная начальным возмущением поля, покидает систему (высвечивается) за время $\Delta t < 0,1\Delta_t$. Это позволяет рассматривать электромагнитное поле в электромеханических устройствах как *квазистационарное*.

Г. Минковский [1], используя принцип относительности Лоренца-Пуанкаре-Эйнштейна, построил феноменологическую релятивистски-инвариантную теорию электромагнитных процессов в движущихся материальных телах, в которых индукции $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и плотность тока $\mathbf{j}$ связаны с напряженностями поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ линейными соотношениями:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \varepsilon, \mu, \sigma = \text{const}. \quad (6)$$

В теории Минковского наряду с «глобальной» системой отсчета Ξ вводятся локальные системы отсчета Ξ' , связанные с материальными телами, движущимися относительно Ξ с постоянными скоростями $\mathbf{v} = v\mathbf{v}^0$, где $\mathbf{v}^0$ – единичный вектор. Связь между координатами $(\mathbf{r}', t')$ и $(\mathbf{r}, t)$ точки в глобальной и локальной системе отсчета описывается преобразованиями Лоренца, векторная форма которых имеет вид:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}^0 [(\alpha - 1)\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}^0 - \alpha \beta c t], \quad t' = \alpha(t - \beta c^{-1} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}^0), \quad (7)$$

где: $\alpha = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, а компоненты электромагнитного поля в каждой из систем Ξ' связаны с его компонентами в системе Ξ при помощи следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= [\mathbf{E}_{\parallel} + \alpha \mathbf{E}_{\perp}] + \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{B}, & \mathbf{H}' &= [\mathbf{H}_{\parallel} + \alpha \mathbf{H}_{\perp}] - \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{D}, \\ \mathbf{D}' &= [\mathbf{D}_{\parallel} + \alpha \mathbf{D}_{\perp}] + \alpha c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, & \mathbf{B}' &= [\mathbf{B}_{\parallel} + \alpha \mathbf{B}_{\perp}] - \alpha c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \\ \mathbf{j}' &= [\alpha \mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}] + \alpha \rho_e \mathbf{v}, & \rho'_e &= \alpha \rho_e - c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{a}_{\parallel}$ – продольная компонента вектора $\mathbf{a}$, а $\mathbf{a}_{\perp}$ – его поперечная компонента. По формулам векторной алгебры $\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}^0) \mathbf{v}^0$, а $\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}^0 \times \mathbf{v}^0$.

Согласно [1, 2] материальные соотношения (6) в локальной системе отсчета Ξ' , движущейся равномерно прямолинейно вместе с бесконечно малой частицей среды, сохраняют свою форму, если напряженности электрического и магнитного полей в правых частях этих соотношений заменить их эффективными значениями, вычисляемыми по формулам:

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}. \quad (9)$$

В монографии [2] показано, что эффективные поля (9) можно отождествить с силами, действующими на движущийся единичный электрический заряд (сила $\mathbf{E}_{eff}$) и на движущийся магнитный полюс (сила $\mathbf{H}_{eff}$). Таким образом, измеренные в подвижной инерциальной системе отсчета Ξ' поляризации $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{M}'$, а также плотность тока $\mathbf{j}'$ определяются соотношениями:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}), \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}), \quad \mathbf{j}' = \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}_{eff}). \quad (10)$$

Это утверждение известно в литературе [3] как *принцип Минковского*. Л. И. Седовым в монографии [4] выполнено обобщение принципа Минковского на ускоренно движущиеся материальные тела. Это обобщение основано на том, что индивидуальные точки электромагнитного поля не имеют массы покоя, из-за чего воздействие поля на материальные частицы происходит без запаздывания. Взаимодействие электромагнитного поля с материальными телами можно рассматривать как взаимодействие поля с ансамблем электрических и магнитных диполей (диэлектрики и магнетики) и свободных электрических зарядов (проводники). Поэтому мы вправе, следуя рассуждениям монографии [2], соотношения (10) рассматривать как универсальные эмпирические характеристики взаимодействия материальных тел с электромагнитным полем. Следует отметить, что в работе [4] для описания взаимодействия электромагнитного поля с материальными средами используется аппарат тензорного анализа: с

каждой материальной точкой $\mathbf{r}(t)$ связывается локально-инерциальная система отсчета $\Xi'(\mathbf{r}, t)$, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, равной мгновенной скорости этой точки, и уравнения электродинамики записываются в координатах системы $\Xi'(\mathbf{r}, t)$.

Основным недостатком феноменологической теории Минковского при ее использовании при расчете является необходимость применения методов тензорного анализа, практически не реализуемых на современных ЭВМ. Известные в литературе примеры использования этой теории в технике [5] носят дидактический характер (являются примерами, поясняющими основные положения теории) и не пригодны для проведения технических расчетов.

Другой трудностью, возникающей при применении теории Максвелла – Минковского в технической электродинамике, является то, что аналитически корректный переход от исходной системы уравнений электромагнитного поля к уравнениям квазистационарного приближения выполнен только для уравнений Максвелла (1) в покоящейся материальной среде (разложение Рэлея в теории рассеяния электромагнитных волн). В электромеханике же уравнения квазистационарного электромагнитного поля получают, формально полагая в уравнениях (7) $c \rightarrow \infty$. Учитывая соотношение $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$, этот предельный переход реализуют двумя различными способами [3] – либо принимается условие $\epsilon_0 \rightarrow 0$ (нерелятивистское магнитное приближение уравнений Максвелла), либо принимается условие $\mu_0 \rightarrow 0$ (нерелятивистское электрическое приближение уравнений Максвелла). В первом случае пренебрегают токами смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$, а во втором – электромагнитной индукцией $\partial \mathbf{B} / \partial t$ в конструктивных элементах рассматриваемой технической системы. Поэтому нерелятивистское магнитное приближение уравнений Максвелла принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} \quad (\text{I}); & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (\text{II}); \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_e \quad (\text{III}); & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \quad (\text{V}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В свою очередь, нерелятивистское электрическое приближение уравнений Максвелла записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j} \quad (\text{I}); & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{0} \quad (\text{II}); \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_e \quad (\text{III}); & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{IV}); & \operatorname{div} \mathbf{j} &= -\partial \rho_e / \partial t \quad (\text{V}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В модели поля, описываемой уравнениями (11), отсутствуют электромагнитные волны, вследствие чего она непригодна для описания быстропротекающих и неустановившихся процессов в технических устройствах. Область ее применимости – классическая теория электрических машин и аппаратов. Невозможность моделирования электромагнитной индукции в модели, описываемой уравнениями (12) приводит к тому, что областью применимости этой модели является исключительно высокочастотная электроника.

Для преодоления первой трудности необходимо, следуя идеям проф. Чу [6], адаптировать принцип Минковского-Седова к нелинейным материальным соотношениям (2) – (3), используя векторную форму уравнений электродинамики и малость параметра $\beta = |\mathbf{v}|/c$. Эту операцию назовем **задачей А**.

Задачей В назовем математические преобразования, предназначенные для преодоления второй трудности – построения асимптотического разложения решения уравнений электродинамики по малому параметру $\gamma = L_m / (\Delta_t c)$, предназначенного для «отфильтровывания» высокочастотных составляющих формального решения уравнений электродинамики, роль которых в функционировании ЭМС пренебрежимо мала.

Задача А

Для построения электродинамики системы движущихся материальных тел, скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ которых ограничены условием $\beta = |\mathbf{v}|/c \ll 1$, а электромагнитные свойства описываются уравнениями (2)–(3), введем глобальную инерциальную систему отсчета Ξ . Связав с точками материальной среды локальные координатные системы и манипулируя соотноше-

ниями (8), будем последовательно отбрасывать члены порядка β^2 и выше. Комбинируя (8) с (2) и (10), а также учитывая, что $\alpha = 1 + O(\beta^2)$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} + c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) & (I); \\ \mathbf{B} - c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} &= \mu_0 \mathbf{H} - \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{D} + \mu_0 \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) & (II). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Умножим векторно слева обе части (13_{II}) на вектор $\varepsilon_0 \mathbf{v}$ и сложим результат с (13_I). Аналогично умножим векторно слева обе части (13_I) на вектор $\mu_0 \mathbf{v}$ и вычтем из (13_{II}). Учитывая, что $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} + c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{D} &= \varepsilon_0 (\mathbf{E} + c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{E}) + \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) & (I); \\ \mathbf{B} - c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \mu_0 \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) - \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) & (II). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Но любое векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ удовлетворяет неравенству:

$$c^{-2} |\mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{A}| = (v/c)^2 |\mathbf{v}^0 \times \mathbf{v}^0 \times \mathbf{A}| \leq \beta^2 |\mathbf{A}|. \quad (15)$$

Поэтому, отбрасывая в (14) члены порядка β^2 , получаем:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) + \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}); \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) - \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}). \quad (16)$$

Подставив (16) в (9), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{eff} &= [\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff})] + \mu_0 \mathbf{v} \times [\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff})] & (I); \\ \mathbf{H}_{eff} &= [\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff})] + \varepsilon_0 \mathbf{v} \times [\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff})] & (II). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Сравнение (17) с (9) показывает целесообразность введения расчетного электрического поля $\mathbf{E}_C$ и расчетного магнитного поля $\mathbf{H}_C$, при помощи соотношений:

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}), \quad \mathbf{H}_C = \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}). \quad (18)$$

Тогда эффективные поля $\mathbf{E}_{eff}$ и $\mathbf{H}_{eff}$ становятся функциями расчетных электрического и магнитного полей, а также поля скоростей движущихся тел и определяются соотношениями:

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E}_C + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{H}_C, \quad \mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_C - \varepsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}_C, \quad (19)$$

которые формально идентичны соотношениям (9) и совпадают с аналогичными соотношениями монографии [6].

Релятивистские правила преобразования плотности свободных электрических зарядов и токов проводимости при условии $|\mathbf{v}| \ll c$ имеют, как известно [2], вид:

$$\rho_e = \rho'_e + c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}', \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' + \mathbf{v} \rho'_e. \quad (20)$$

Но существующие методики определения этих величин в материальных телах предполагают выполнение актов измерения аппаратурой, неподвижной относительно рассматриваемого тела, т.е. в сопутствующих системах отсчета Ξ' . Поэтому в соотношениях (20) можно положить $\rho'_e \rightarrow \rho_e^0$, $\mathbf{j}'_e \rightarrow \mathbf{J}_e^0(\dots)$, переписав их в виде:

$$\rho_e = \rho_e^0 + c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}_{eff}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}_{eff}) + \mathbf{v} \rho_e^0. \quad (21)$$

Подстановка определений (18) в соотношения (16) дает:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_C + \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) & (I); & \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_C + \mu_0 \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) & (II); \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_C - \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) & (III); & \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_C + \mathbf{v} \times \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) & (IV). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Подставив соотношения (21) и (22) в уравнения Максвелла (1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_C &= \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}_C / \partial t + \partial \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) / \partial t + \operatorname{rot} [\mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff}) \times \mathbf{v}] + \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}_{eff}) + \rho_e^0 \mathbf{v} & \text{(I);} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_C &= -\mu_0 \partial \mathbf{H}_C / \partial t - \mu_0 \partial \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) / \partial t - \mu_0 \operatorname{rot} [\mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff}) \times \mathbf{v}] & \text{(II);} \\ \operatorname{div} [\varepsilon_0 \mathbf{E}_C + \mathbf{P}^0(\mathbf{E}_{eff})] &= \rho_e^0 + c^{-2} \mathbf{v} \times \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}_{eff}) & \text{(III);} \\ \operatorname{div} [\mathbf{H}_C + \mathbf{M}^0(\mathbf{H}_{eff})] &= 0 & \text{(IV);} \quad \operatorname{div} \mathbf{J}_e^0(\mathbf{E}_{eff}) = -\partial \rho_e^0 / \partial t & \text{(V).} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Система уравнений (23) описывает электромагнитные процессы в системе движущихся (в общем случае – ускоренно) материальных тел, скорости которых удовлетворяют условию $|\mathbf{v}|/c \ll 1$, и характеризуются нелинейными электрической и магнитной поляризациями, а также нелинейной электрической проводимостью. К указанному классу систем относятся все электромеханические устройства.

Выводы

Получены уравнения, позволяющие корректно применять уравнения Максвелла – Минковского для описания электромеханических устройств в общем случае с произвольным движением токоведущих частей и нелинейными электрическими и магнитными характеристиками.

Получение уравнений квазистационарного электромагнитного поля (**задача В**) основано на разложении искомого решения в степенной ряд по малому параметру γ , определенному соотношением (5). Обоснование применяемой для этого техники требует привлечения методов функционального анализа и будет приведено авторами в последующих публикациях.

В заключение отметим, что первоначальный вариант описанной выше теории был опубликован одним из авторов в работе [7].

Литература

1. Minkowski H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse: 53–111.
2. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука, 1991. – 328 с.
3. Толмачев В.В. и др. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 232 с.
4. Седов Л.И., Цыпкин А.Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
5. Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел. – М.: Энергоиздат, 1982. – 192 с.
6. Fano R.M., Chu L.J. and Adler R.B. Electromagnetic Fields, Energy and Forces. – New York – London: “John Wiley & Sons Inc”, 1960. – 520 p.
7. Шендеровский И.М. Математические модели электромеханики как асимптотика уравнений Максвелла-Минковского // Техника машиностроения. – 2003. № 3. – С. 85-93.

Устройство для компенсации саморазряда аккумуляторных батарей

Новиков С.В., к.т.н. доц. Рогачёв В.Д.

*Рязанское высшее воздушно-десантное командное училище
им. генерала армии В.Ф. Маргелова (РВВДКУ)*

Аннотация. Предложено электронное устройство, компенсирующее саморазряд аккумуляторной батареи, приведенной в рабочее состояние и находящейся на хранении. Проведено сравнение данного устройства с известными образцами. Его автономность позволяет преобразовывать солнечную энергию в электрическую и компенсировать саморазряд аккумуляторной батареи, находящейся на хранении.

Ключевые слова: аккумуляторная батарея, компенсация саморазряда.

Аккумуляторная батарея, отключенная от разрядной цепи, самопроизвольно разряжа-