ях с заказчиками, в то же время цены на их услуги достаточно высоки.

3. Средние и малые компании. Они наиболее оперативны в решении конкретных проблем клиентов, предлагают услуги по доступным ценам, однако их качество не всегда соответствует цене, отсутствует также и страхование предоставляемых услуг.

Рисунок 4. Структура рынка предоставления автотранспортных услуг г. Москвы

4. Индивидуальные предприниматели или частные перевозчики. Они предлагают услуги за достаточно доступные цены, но имеет место полное отсутствие сервиса и безопасности. Как правило, автотранспорт и водительские кадры из других регионов России и стран СНГ. Перевозчики полностью или частично работают за наличный расчет, очень часто не платят налоги в бюджет.

Выводы

Расходы владельцев автопарков постоянно растут. Повышение стоимости топлива, закрытие МКАД для грузового транспорта, перспектива введения обязательной зимней резины для грузовиков – проблемы у грузоперевозчиков растут как снежный ком, что, очевидно, скажется на темпе роста автомобильных перевозок.

Литература

1. Семин П.А., Муравкина Е.В. Некоторые аспекты развития рынка автотранспортных услуг СНГ: контекст перевозчика // Автотранспортное предприятие. 2014. № 4. С. 21-24.
2. Транспортная стратегия РФ на период до 2030 года: распоряжение Правительства РФ от 22.11.2008 № 1734-р. Электронный ресурс. http://www.mintrans.ru
3. Электронный ресурс http://rbcdaily.ru/
4. Электронный ресурс: http://rbcdaily.ru/addition/article/562949986361902
5. Электронный ресурс: http://www.gks.ru/
6. Электронный ресурс: http://moscow.gks.ru/

Оптимизация портфеля ценных бумаг при запрещенной операции «короткая продажа»

к.э.н. проф. Козлова С.И., Константинова Н.Е.
Университет машиностроения
8 (495) 686-49-24, svtln1941@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрена задача оптимизации структуры портфеля ценных бумаг при невозможности «коротких продаж». В статье найдено аналитическое решение возникающей при этом задачи квадратичного программирования с учётом неотрицательности переменных для портфеля, содержащего три акции и безрисковый актив. Получены в явном виде уравнение границы эффективных портфелей, состав Т-портфеля для заданной ставки безрискового актива. Приводятся результаты расчетов эффективных портфелей и их характеристик.

Ключевые слова: *портфель ценных бумаг; оптимизация; неотрицательные доли акций; аналитическое решение; граница эффективных портфелей; безрисковый актив; T-портфель.*

Рассмотрим портфель ценных бумаг, в который предполагается включить три акции с ожидаемыми доходностями $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$ и рисками σ_0 , σ_1 , σ_2. Задача минимизации риска портфеля σ_p при заданной ожидаемой доходности портфеля μ_p будет иметь следующий вид [1]:

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_0^2 x_0^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 + 2\sigma_{10} x_1 x_0 + 2\sigma_{20} x_2 x_0 \to \min, \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = \mu_p, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1, \qquad (2)$$

где: x_0, x_1, x_2 − доли вложений капитала инвестора в акции; σ_{12}, σ_{01}, σ_{02} − ковариации между доходностями акций.

Если «короткие продажи» акций запрещены, то необходимо добавить ещё условие неотрицательности долей:

$$x_0, x_1, x_2 \geq 0. \qquad (3)$$

В случае когда «короткие продажи» не запрещены, т.е. доли акций в портфеле могут принимать и отрицательные значения, эта задача имеет аналитическое решение [1] для портфеля с произвольным числом акций. При ограничениях (3) Г. Марковицем предложен [2] графический метод решения этой задачи для трёх акций (см. также [3]). В общем случае большого числа акций в портфеле получающаяся задача квадратичного программирования может быть решена известными численными методами [4]. Получим аналитическое решение задачи (1)-(3).

1. Решение задачи оптимизации портфеля без ограничения на неотрицательность долей акций

Сначала решим задачу выполнения (1) и (2) без условия неотрицательности (3).

Из ограничений (2) находим:

$$x_1 = -a + b_1(1 - x_0), \; x_2 = a - b_2(1 - x_0), \; a = \frac{\mu_p - \mu_0}{\mu_2 - \mu_1}, \quad b_1 = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 - \mu_1}, \; b_2 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_2 - \mu_1}. \qquad (4)$$

Так как $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$, то $a > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$.

Подставим эти представления x_1, x_2 через x_0 в формулу (1), для дисперсии σ_p^2 и для определения безусловного минимума дисперсии σ_p^2 по x_0 приравняем её производную нулю:

$$(1 - x_0) 2(-\sigma_1^2 b_1^2 - \sigma_2^2 b_2^2 - \sigma_0^2 + 2\sigma_{12}(b_1 + b_2) + 2\sigma_{10} b_1 - 2\sigma_{20} b_2) +$$
$$+ 2a(\sigma_1^2 b_1 + \sigma_2^2 b_2 - \sigma_{12}(b_1 + b_2) - \sigma_{10} + \sigma_{20}) + 2(\sigma_0^2 - \sigma_{10} b_1 + \sigma_{20} b_2 = 0 \; .$$

Из этого уравнения получаем:

$$1 - x_0^* = aK + K_0, \qquad (5)$$

$$K = \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) b_1 + (\sigma_2^2 - \sigma_{12}) b_2 - \sigma_{10} + \sigma_{20}}{\sigma_1^2 b_1^2 + \sigma_2^2 b_2^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_{12} b_1 b_2 - 2\sigma_{10} b_1 + 2\sigma_{20} b_2}, K_0 = \frac{\sigma_0^2 - \sigma_{10} b_1 + \sigma_{20} b_2}{\sigma_1^2 b_1^2 + \sigma_2^2 b_2^2 + \sigma_0^2 - 2\sigma_{12} b_1 b_2 - 2\sigma_{10} b_1 + 2\sigma_{20} b_2}.$$

Подставляя (5) в (4), находим оптимальный состав портфеля при разрешенных «коротких продажах»:

$$x_0^* = 1 - aK - K_0, \; x_1^* = a(b_1 K - 1) + b_1 K_0, \qquad x_2^* = a(1 - b_2 K) - b_2 K_0. \qquad (6)$$

Из этих соотношений следует, что доли акций оптимальных портфелей являются линейными функциями от μ_p − ожидаемой доходности портфеля.

Дисперсия доходности портфеля (1) при значениях долей акций (6) определяется выражением:

$$\sigma_p^{*2} = C_0 + 2aC_1 + a^2 C_2, \qquad (7)$$

где:

$$C_0 = \sigma_0^2(1-K_0)^2 + \sigma_1^2 K_0^2 b_1^2 + \sigma_2^2 K_0^2 b_2^2 + 2K_0(1-K_0)(\sigma_{01}b_1 - \sigma_{02}b_2) - 2\sigma_{12}K_0^2 b_1 b_2,$$

$$C_1 = -\sigma_0^2(1-K_0)K + \sigma_1^2 K_0 b_1(b_1K-1) - \sigma_2^2 K_0 b_2(1-b_2K) + \sigma_{01}(1-2K_0)(b_1K-K_0) + \\ +\sigma_{02}(1-2K_0)(K_0-b_2K) + \sigma_{12}K_0(b_1+b_2-2b_1b_2K), \quad (8)$$

$$C_2 = \sigma_0^2K^2 + \sigma_1^2(b_1K-1)^2 + \sigma_2^2(1-b_2K)^2 - 2\sigma_{01}K(b_1K-1) - 2\sigma_{02}K(1-b_2K) + \\ +2\sigma_{12}(b_1K-1)(1-b_2K).$$

Величины C_0, C_1, C_2 не зависят от ожидаемой доходности портфеля μ_p и определяются характеристиками входящих в портфель акций. Зависимость дисперсии портфеля от μ_p осуществляется через величину a.

Портфель, который имеет минимальный риск для данной его доходности, называется эффективным портфелем. Эффективный портфель имеет также максимальную доходность при заданном риске портфеля. В прямоугольных координатах (σ, μ) эффективные портфели образуют кривую, которая называется границей (линией) эффективных портфелей.

2. Решение задачи при невозможности «коротких продаж»

Рассмотрим задачу определения оптимального портфеля из трёх акций для условий, когда «короткие продажи» невозможны. В математической постановке задачи необходимо учитывать условие неотрицательности переменных (3). Выразим переменные x_1 и x_2, как и выше, через x_0 по формулам (4), тогда дисперсия портфеля (1) будет функцией только от одной переменной x_0. Необходимо найти минимум этой функции, но переменная x_0 уже не может принимать любые значения − следует учесть условия неотрицательности (3).

Из представления x_1, x_2 через x_0 (4) следует, что все ограничения будут выполнены, если x_0 удовлетворит неравенствам:

$$0 \le 1-x_0 \le 1,\; x_1 = -a + b_1(1-x_0) \ge 0,\; x_2 = a - b_2(1-x_0) \ge 0\;. \quad (9)$$

Учитывая, что $a > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, получаем из второго и третьего неравенств (9), соответственно:

$$1-x_0 \ge \frac{a}{b_1},\; 1-x_0 \le \frac{a}{b_2};\; \frac{a}{b_1} = \frac{\mu_p-\mu_0}{\mu_2-\mu_0},\quad \frac{a}{b_2} = \frac{\mu_p-\mu_0}{\mu_1-\mu_0},$$

или

$$x_0 \le 1-\frac{a}{b_1} = \frac{\mu_2-\mu_p}{\mu_2-\mu_0} = H_2,\; x_0 \ge 1-\frac{a}{b_2} = \frac{\mu_1-\mu_p}{\mu_1-\mu_0} = H_1. \quad (10)$$

Согласно принятому выше условию $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$, имеем:

$$H_2 \ge 0, H_2 \ge H_1 \text{ при } \mu_2 \ge \mu_p \ge \mu_0;\quad H_1 \ge 0 \text{ при } \mu_p \le \mu_1;\quad H_1 \le 0 \text{ при } \mu_p \ge \mu_1,$$

поэтому все три неравенства (10) можно записать следующим образом:

$$\max(H_1,0) \le x_0 \le H_2. \quad (11)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению минимума функции $\sigma_p^2(x_0)$ на отрезке (11) значений x_0. При любых допустимых значениях μ_p существуют точки x_0, удовлетворяющие неравенству (11). Найдем безусловный минимум этой функции при заданном значении доходности портфеля μ_p (или a) по формуле (6): $x_0^* = 1 - aK - K_0$. Если величина x_0^* удовлетворяет неравенству (11), то она является, очевидно, и оптимальным решением задачи с ограничением (3). Пусть $x_0^* \le \max(H_1,0)$, т.е. не удовлетворяет условию (11). Так как $\sigma_p^2(x_0)$ − выпуклая функция на всей действительной оси x_0, то она будет возрастать при увеличении x_0 от своего минимального значения при $x_0 = x_0^*$. Это возрастание сохранится и на всем отрезке (11) при увеличении x_0 от $\max(H_1,0)$, следовательно, минимальное значение функции $\sigma_p^2(x_0)$ будет достигаться на левом конце отрезка (11) при $x_0 = \max(H_1,0)$. Исследуя аналогичным образом случай, когда $x_0^* > H_2$, находим, что минимальное значение функции $\sigma_p^2(x_0)$ будет достигаться на правом конце отрезка (11) при $x_0 = H_2$.

Обозначим через x_0^o, x_1^o, x_2^o оптимальный состав портфеля при соблюдении условий неотрицательности переменных (3). Тогда:

$$x_0^o = 1 - aK - K_0,\ \text{если}\ \max(H_1,0) \le x_0^* \le H_2;\ x_0^o = \max(H_1,0),\ \text{если}$$
$$x_0^* < \max(H_1,0);\ H_2 = \frac{\mu_2 - \mu_p}{\mu_2 - \mu_0},\quad H_1 = \frac{\mu_1 - \mu_p}{\mu_1 - \mu_0},\ x_0^o = H_2,,\ \text{если}\ x_0^* > H_2. \tag{12}$$

Оптимальные значения остальных двух переменных можно найти по формулам (4):

$$x_1^o = -a + b_1(1 - x_0^o),\ x_2^o = a - b_2(1 - x_0^o). \tag{13}$$

Дисперсия и риск оптимального портфеля вычисляются по формулам:

$$\sigma_p^{o2} = \sigma_1^2 x_1^{o2} + \sigma_2^2 x_2^{o2} + \sigma_0^2 x_0^{o2} + 2\sigma_{12} x_1^o x_2^o + 2\sigma_{10} x_1^o x_0^o + 2\sigma_{20} x_2^o x_0^o,\quad \sigma_p^o = \sqrt{\sigma_p^{o2}}. \tag{14}$$

Таким образом, задача определения долей акций в эффективных портфелях решена в аналитическом виде для трёх акций с запрещенной операцией «короткая продажа».

3. Уравнение границы эффективных портфелей

Из условий неотрицательности переменных и ограничений (2) следует, что доходность портфеля μ_p может принимать значения в диапазоне от μ_0 до μ_2, и тогда:

$$0 \le a \le b_1. \tag{15}$$

Заметим также, что для неотрицательных долей акций:

$$x_0 = 1 \text{ при } \mu_p = \mu_0,\ (a = 0);\ x_2 = 1 \text{ при } \mu_p = \mu_2,\ (a = b_1). \tag{16}$$

Разобьём промежуток (15) на три участка: $[0, a^-]$, $[a^-, a^+]$, $[a^+, b_1]$. Точки a^-, a^+ выберем так, чтобы на отрезке $[a^-, a^+]$ оптимальное решение (6) при разрешенной операции «короткая продажа» удовлетворяло условиям неотрицательности. В этих точках, очевидно, должна обращаться в 0 одна из переменных оптимального решения (6), а именно: в точке a^- − это x_2^* или x_1^*, а в точке a^+ − x_1^* или x_0^*. В точке a^- переменная x_0^* не может равняться нулю, т.к. в этом случае $x_0^* = 0$ на отрезке $[0, a^-]$, что противоречит (16). Точно так же переменная x_2^* не может равняться нулю в точке a^+. Определим значения $a(\mu_p)$, при которых обращаются в 0 компоненты оптимального решения (6) задачи без ограничения (3):

$$x_0^* = 0:\quad 0 = 1 - aK - K_0:\quad a_0 = \frac{1 - K_0}{K};$$

$$x_1^* = 0:\quad 0 = -a(1 - b_1 K) + b_1 K_0,\quad a_1 = \frac{b_1 K_0}{1 - b_1 K};$$

$$x_2^* = 0:\quad 0 = a(1 - b_2 K) - b_2 K_0,\quad a_2 = \frac{b_2 K_0}{1 - b_2 K}.$$

Найдём значения a^- и a^+. По формулам (5) и (4) при $a = 0$ ($\mu_p = \mu_0$) вычислим:

$$1 - x_0^* = K_0,\quad x_1^* = b_1(1 - x_0^*),\quad x_2^* = -b_2(1 - x_0^*).$$

Если $1 - x_0^* < 0$, то $x_1^* < 0$, $x_2^* > 0$, поэтому $a^- = a_1$ − отрицательное значение x_1^* заменится на 0 . Если $1 - x_0^* \ge 0$, то $x_1^* > 0$, $x_2^* \le 0$, поэтому $a^- = a_2$ − отрицательное значение x_2^* заменится на 0. Значение a^- определено.

Для определения a^+ вычислим оптимальное решение по формулам (5) и (4) при $a = b_1$ ($\mu_p = \mu_2$):

$$1 - x_0^* = b_1 K + K_0,\quad x_1^* = -b_1 + b_1(1 - x_0^*) = -b_1 x_0^*,\quad x_2^* = b_1 - b_2(1 - x_0^*) = 1 + b_2 x_0^*.$$

Если $1 - x_0^* < 1$, то $x_1^* < 0$, $x_2^* > 0$, поэтому $a^+ = a_1$ − отрицательное значение x_1^* заменится на 0. Если $1-x_0^* \ge 1$, то $x_1^* > 0$, $x_0^* \le 0$, поэтому $a^+ = a_0$ − отрицательное значение x_0^* заменится на 0. Значение a^+ определено.

Перейдём к построению границы эффективных портфелей. В принципе эта граница нам уже известна, и для любого значения ожидаемой доходности портфеля μ_p можно вычислить минимальный риск σ_p. Но представляет интерес явная зависимость риска от доходности и доходности от риска для эффективных портфелей.

Запишем формулу (14) для дисперсии оптимального портфеля при запрете операции «короткая продажа» в матричном виде:

$$\sigma_p^{o2} = (\overline{x}^o)^T \Sigma \overline{x}^o, \quad \overline{x}^o = \begin{bmatrix} x_0^o \\ x_1^o \\ x_2^o \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01} & \sigma_{02} \\ \sigma_{10} & \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{20} & \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{01} = \sigma_{10}, \sigma_{02} = \sigma_{20}, \sigma_{12} = \sigma_{21}. \tag{17}$$

Из соотношений (10), (11) следует, что доли акций в оптимальных портфелях являются кусочно-линейными функциями от a [5] , поэтому можно представить $\vec{x}^o = a\overline{d} + \overline{h}$, где векторы $\overline{d}, \overline{h}$ не зависят от a на участках $[0,a^-],[a^-,a^+],[a^+,b_1]$. Тогда:

$$\sigma_p^{o2} = (a\overline{d} + \overline{h})^T \Sigma (a\overline{d} + \overline{h}) = a^2 \overline{d}^T \Sigma \overline{d} + a(\overline{h}^T \Sigma \overline{d} + \overline{d}^T \Sigma \overline{h}) + \overline{h}^T \Sigma \overline{h}.$$

Обозначим:

$$C_0 = \overline{h}^T \Sigma \vec{h},\ C_1 = \frac{1}{2}(\overline{h}^T \Sigma \overline{d} + \overline{d}^T \Sigma \overline{h}) = \overline{h}^T \Sigma \overline{d} = \overline{d}^T \Sigma \overline{h},\ C_2 = \overline{d}^T \Sigma \overline{d}; \tag{18}$$

в результате получаем уравнение границы эффективных портфелей в координатах (a,σ):

$$\sigma_p^2 = C_2 a^2 + 2C_1 a + C_0 \text{, или } \sigma_p = \sqrt{C_2 a^2 + 2C_1 a + C_0}, \tag{19}$$

где: C_0, C_1, C_2 − кусочно-постоянные величины.

Найдем явные выражения векторов $\overline{d}, \overline{h}$ и постоянных C_0, C_1, C_2 на участках $[0,a^-],[a^-,a^+],[a^+,b_1]$. На отрезке $[a^-,a^+]$ условия неотрицательности x_0, x_1, x_2 не учитываются и оптимальное решение имеет вид (6); постоянные C_0, C_1, C_2 вычисляются по формулам (8).

Пусть в точке a^- обращается в 0 переменная x_2^*, т.е. $a^- = a_2$, тогда из (12), (13) следует:

$$a \le a^- : \quad x_0^o = 1 - \frac{a}{b_2}; \quad x_1^o = \frac{a}{b_2}; \quad x_2^o = 0. \tag{20}$$

Используя это решение в соотношениях (18), определяем соответствующие постоянные

$$C_0 = \overline{h}^T \Sigma \overline{h} = \sigma_0^2,\ C_1 = \overline{d}^T \Sigma \overline{h} = \frac{\sigma_{01} - \sigma_0^2}{b_2},\ C_2 = \overline{d}^T \Sigma \overline{d} = \frac{\sigma_0^2 - 2\sigma_{01} + \sigma_1^2}{b_2^2}. \tag{21}$$

Если в точке a^+ обращается в ноль координата x_0^*, т.е. $a^+ = a_0$, то при $a \ge a^+$ будем иметь ((12), (13)):

$$a \ge a^+ : \quad x_0^o = 0; \quad x_1^o = -a + b_1; \quad x_2^o = a - b_2, \tag{22}$$

вследствие чего по формулам (18) вычисляем постоянные в этом случае:

$$\begin{gathered} C_0 = \overline{h}^T \Sigma \overline{h} = b_1(b_1\sigma_1^2 - b_2\sigma_{12}) - b_2(b_1\sigma_{12} - b_2\sigma_2^2) = \sigma_1^2 b_1^2 - 2\sigma_{12} b_1 b_2 + \sigma_2^2 b_2^2, \\ C_1 = \overline{d}^T \Sigma \overline{h} = -b_1\sigma_1^2 + b_2\sigma_{12} + b_1\sigma_{12} - b_2\sigma_2^2 = b_1(\sigma_{12} - \sigma_1^2) + b_2(\sigma_{12} - \sigma_2^2), \\ C_2 = \overline{d}^T \Sigma \overline{d} = \sigma_1^2 - 2\sigma_{12} + \sigma_2^2. \end{gathered} \tag{23}$$

Переменная x_1^* может обращаться в 0 или в точке a^- или в точке a^+.

И при $a \le a^- = a_1$ или при $a \ge a^+ = a_1$ согласно (12), (13) получим:

$$a_1 : \quad x_0^o = 1 - \frac{a}{b_1}; \quad x_1^o = 0; \quad x_2^o = \frac{a}{b_1}. \tag{24}$$

Тогда:

$$C_0 = \bar{h}^T \Sigma \bar{h} = \sigma_0^2\,,\ C_1 = \bar{d}^T \Sigma \bar{h} = \frac{\sigma_{02} - \sigma_0^2}{b_1}\ ,\ C_2 = \bar{d}^T \Sigma \bar{d} = \frac{\sigma_0^2 - 2\sigma_{02} + \sigma_2^2}{b_1^2}\,. \quad (25)$$

Таким образом, постоянные C_0, C_1, C_2 определены для любого значения ожидаемой доходности портфеля μ_p из промежутка $[\mu_0, \mu_2]$.

Уравнение (19) представляет собой зависимость между дисперсией (риском) и доходностью эффективных портфелей, т.е. является уравнением границы эффективных портфелей в координатах «доходность-риск». Представляет интерес обратная зависимость максимальной доходности от риска. Из уравнения (19) находим:

$$a = \frac{-2C_1 + \sqrt{4C_1^2 - C_2(C_0 - \sigma_p^2)}}{C_2}\ .$$

Переходя от величины a к доходности μ_p, получим уравнение границы эффективных портфелей в координатах (σ, μ):

$$\mu_p = \mu_0 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{-2C_1 + \sqrt{4C_1^2 - C_2(C_0 - \sigma_p^2)}}{C_2}\,. \quad (26)$$

4. Т-портфель

Кроме рисковых активов в портфель может быть включен и безрисковый актив [5], [2]. Безрисковым может считаться актив, доход по которому за данный период является фиксированным. Это означает, что в момент покупки данного актива в начале рассматриваемого периода владения инвестору точно известна его стоимость в конце этого периода (например, вложения на банковский счет, покупка государственных краткосрочных ценных бумаг). Поскольку доходность такого актива за период владения, определяемая простой ставкой μ_f, является фиксированной, то риск актива σ_f, определяемый как среднеквадратическое отклонение доходности, будет равен нулю.

Пусть инвестор формирует свой портфель как комбинацию из безрискового актива и заданного портфеля активов, включающего только рисковые ценные бумаги. Для краткости будем называть подобные портфели комбинированными портфелями.

Обозначим: μ_f – ставка доходности безрискового актива за один период владения, или безрисковая ставка; x_f – доля безрисковых вложений ($0 \le x_f \le 1$) и соответственно $1 - x_f$ – доля рисковых вложений инвестора; μ_r, σ_r^2, σ_r – характеристики рисковой части портфеля инвестора, относящиеся к одному периоду владения. Величина $1 - x_f$ характеризует отношение инвестора к риску: чем больше значение $1 - x_f$, тем больше доля рисковых вложений, а значит, больше склонность инвестора к риску.

Рассмотрим комбинированный портфель ценных бумаг, в который предполагается включить три акции с ожидаемыми доходностями $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2$ и рисками σ_0 , σ_1 , σ_2 и безрисковый актив с доходностью μ_f. Задача минимизации риска портфеля σ_p при заданной ожидаемой доходности портфеля μ_p будет иметь следующий вид:

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_0^2 x_0^2 + 2\sigma_{12} x_1 x_2 + 2\sigma_{10} x_1 x_0 + 2\sigma_{20} x_2 x_0 \to \min,$$

при ограничениях:

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_f x_f = \mu_p \quad x_0 + x_1 + x_2 + x_f = 1, \quad (29)$$

где: x_0, x_1, x_2 – доли акций в портфеле, x_f – доля безрискового актива; σ_{12}, σ_{01}, σ_{02} – ковариации между доходностями акций.

Если «короткие продажи» акций запрещены, то необходимо добавить ещё условие неотрицательности долей:

$$x_0, x_1, x_2, x_f \ge 0\ . \quad (30)$$

Решение этой задачи без соблюдения условий неотрицательности переменных было получено Р. Тобиным [6]. Показано [1], что границей эффективных комбинированных портфелей с безрисковой ставкой μ_f в системе координат (σ, μ) является отрезок прямой, касательной к границе эффективных рисковых портфелей в точке $T(\sigma_T, \mu_T)$ и проходящей через точку (0, μ_f) на оси μ. Уравнение этой прямой можно записать в виде:

$$\frac{\mu_p - \mu_f}{\sigma_p} = \frac{\mu_T - \mu_f}{\sigma_T}\,. \tag{31}$$

Эффективный рисковый портфель с параметрами (σ_T,μ_T) называется T-портфелем. Уравнение границы эффективных рисковых портфелей в координатах (a,σ) имеет вид (19).

Обозначим $a_f = (\mu_f - \mu_0)/(\mu_2 - \mu_1)$. Из точки на оси абсцисс (a_f,0) построим касательную к линии $\sigma = \sigma_r(a)$; обозначим координаты точки касания (a_T,σ_T). Имеем:

$$\frac{\sigma_r(a_T)}{a_T - a_f} = \frac{d\sigma_r(a_T)}{da}\,. \tag{32}$$

Используя уравнение (19), находим:

$$2\sigma_r(a)\frac{d\sigma_r(a)}{da} = 2C_2 a + 2C_1, \quad \frac{d\sigma_r(a)}{da} = \frac{C_2 a + C_1}{\sigma_r(a)}\,.$$

Из последнего уравнения и соотношения (32) получаем:

$$a_T = -\frac{C_0 + C_1 a_f}{C_1 + C_2 a_f}\,. \tag{33}$$

Таким образом, характеристики (σ_T,μ_T) T-портфеля определены и тем самым определено уравнение (31) границы эффективных комбинированных портфелей.

Пусть задана ожидаемая доходность μ_p комбинированного портфеля. Из уравнения (31) находим его риск σ_p.

Обозначим $\hat{x_f}, \hat{x_0}, \hat{x_1}, \hat{x_2}$ − оптимальные доли безрискового актива и акций в эффективном комбинированном портфеле с характеристиками (μ_p, σ_p). Известно [5], что доли акций в рисковой части эффективного комбинированного портфеля находятся в таких же отношениях, что и в T-портфеле, т.е. $\hat{x_0} = Nx_0^T$, $\hat{x_1} = Nx_1^T$, $\hat{x_2} = Nx_2^T$, где N − постоянная.

Подставляя эти соотношения в ограничения (29), получаем:

$$N = 1 - \hat{x_f} = \frac{\mu_p - \mu_f}{\mu_T - \mu_f} \tag{34}$$

и находим оптимальный состав комбинированного портфеля:

$$\hat{x_f} = \frac{\mu_T - \mu_p}{\mu_T - \mu_f}, \quad \hat{x_0} = (1 - \hat{x_f})x_0^T, \quad \hat{x_1} = (1 - \hat{x_f})x_1^T, \quad \hat{x_2} = (1 - \hat{x_f})x_2^T\,. \tag{35}$$

Рассмотрим пример применения разработанной методики для расчета оптимального комбинированного портфеля и его характеристик.

Пример. Известны характеристики акций: σ_0 = 0,025; σ_1 = 0,05; σ_2 = 0,075; σ_{01} = 0,000625; σ_{02} = 0; σ_{12} = 0,003; μ_0 = 0,05; μ_1 = 0,15; μ_2 = 0,2.

Вычисляем: b_1 = 3, b_2 = 2 (формулы (4)); K_0 = -0,21277, K = 0,531915 (5); находим оптимальные доли акций в зависимости от параметра a , когда возможны «короткие продажи» $1 - x_0^* = 0{,}531915a - 0{,}21277$, $x_1^* = 0{,}595745a - 0{,}6383$, $x_2^* = -0{,}06383a + 0{,}425532$. Перейдем в этих уравнениях к ожидаемой доходности портфеля μ_p:

$$x_0^* = -10{,}6383\mu_p + 1{,}744681, \quad x_1^* = 11{,}91489\mu_p - 1{,}23404, \quad x_2^* = -1{,}2766\mu_p + 0{,}489362\,.$$

Графики этих функций представлены на рисунке 1.

При невозможности «коротких продаж» оптимальные решения для различных значений μ_p вычислены по формулам (12), (13) и представлены на рисунке 2. Определены значения величин: a^- = 1,071429 (μ_p^- = 0,103571), a^+ = 2,28 (μ_p^+ = 0,164). При 0,05 ≤ μ_p ≤ 0,103571 оптимальное решение вычисляется по формулам (20), при $0{,}103571 \le \mu_p \le 0{,}164$ − по формулам (6) и при $0{,}164 \le \mu_p \le 0{,}2$ − по формулам (24).

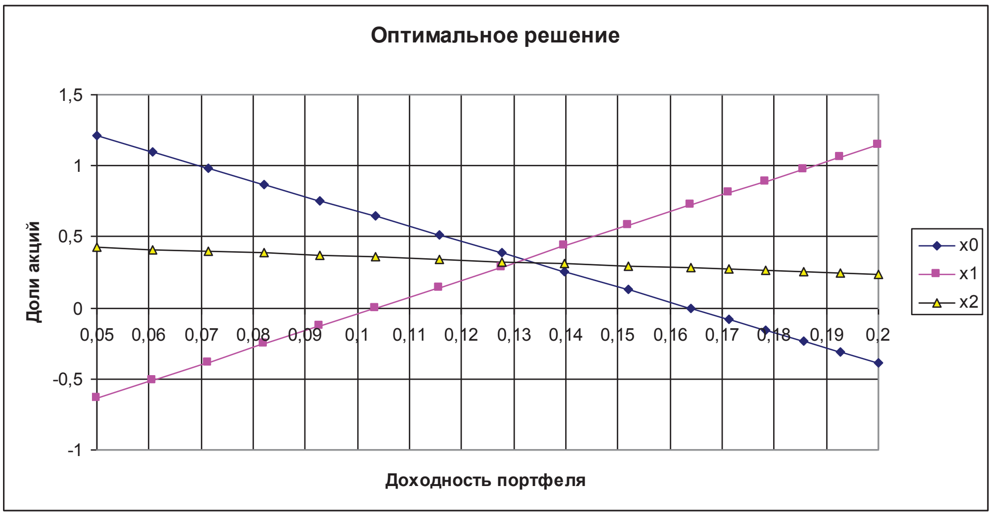

Рисунок 1. Зависимости оптимальных долей акций от ожидаемой доходности портфеля μ_p при возможности «коротких продаж»

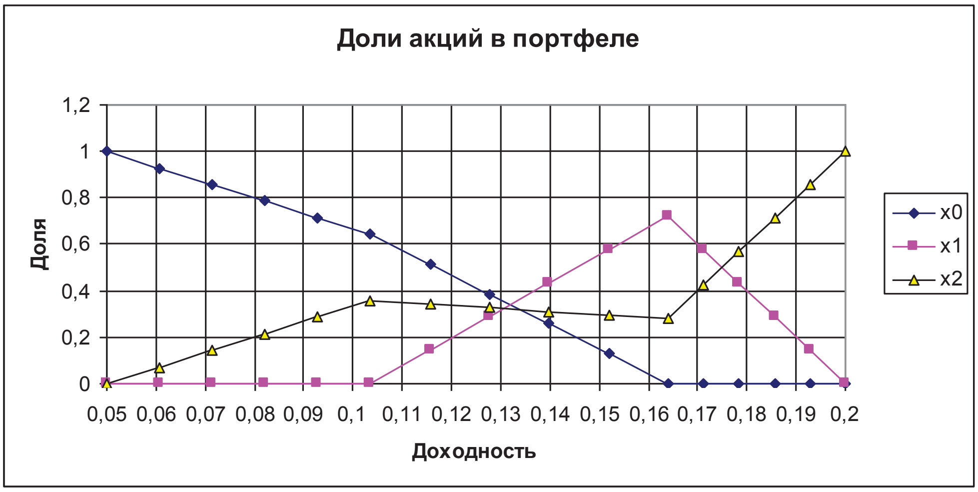

Рисунок 2. Зависимости оптимальных долей акций от ожидаемой доходности портфеля μ_p при невозможности «коротких продаж»

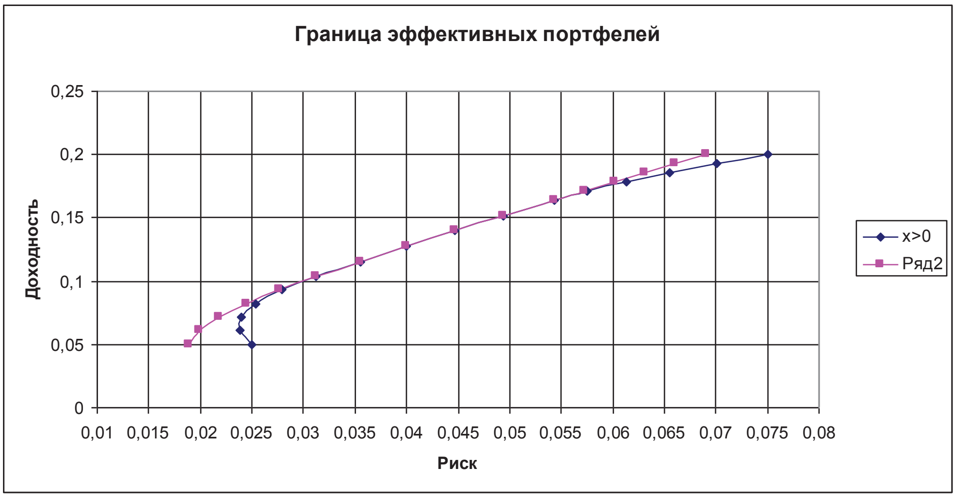

Рисунок 3. Границы эффективных портфелей

Получены уравнения границ эффективных портфелей, графики которых представлены на рисунке 3 для портфелей с разрешенной операцией «короткая продажа» (Ряд 2) и без неё ($x \geq 0$).

Выводы

Рассмотрен комбинированный портфель с доходностью безрискового актива μ_f = 0,053212 (a_f = 0,06424). Находим ожидаемую доходность T-портфеля: a_T = 2,424; (μ_T = 0,1712), вычисляем его риск σ_T = 0,057498 и состав $x_0^T = 0,\quad x_1^T = 0{,}576,\quad x_2^T = 0{,}424$. Для заданной доходности комбинированного портфеля μ_p= 0,093212 из уравнения (34) получаем σ_p = 0,019453 и $1 - \hat{x_f} = 0{,}339018$. По формулам (35) вычисляем оптимальный состав комбинированного портфеля: $\hat{x_f} = 0{,}660982;\quad \hat{x_0} = 0;\quad \hat{x_1} = 0{,}195274;\quad \hat{x_2} = 0{,}143744$.

Этот же результат был получен численным методом с помощью надстройки «Поиск решения» программы Microsoft Excel [7].

Литература

1. Малюгин В.И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа: Учебное пособие. − М.: Дело, 2003. − 320 с.
2. Markovitz H. Portfolio selection. // The Journal of Finance, 1952, vol. 7, no 1, p. 77-91.
3. Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг: Учебное пособие, 2-ое изд. − М.: Научно-техническое общество им. академика С.И. Вавилова, 2008. − 440 с.
4. Козлова С.И. Нелинейное программирование: Учебное пособие. − М.: Московский экономико-статистический институт, 1982. − 78 с.
5. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. − М.: ИНФРА-М, 2004. − 182 с.
6. Tobin J. A proposal for international monetary reform. Eastern Econ. J., 1978, vol. 4, no 3, p. 153-159.
7. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие. − М.: Вузовский учебник, 2007. − 320 с.

Государственные организации Российской Федерации и проблема их экономической безопасности

к.э.н. доц. Ульянова Н. С., Дробот А.Н.
Университет машиностроения

Аннотация. В статье рассматривается угроза экономической безопасности государственных организаций Российской Федерации от недобросовестной конкуренции, возможные потери при несвоевременном реагировании на угрозу экономической безопасности. В кратком изложении исследуется состояние рынка военно-технического сотрудничества как одного из важных сфер деятельности Российской Федерации, применение механизмов на пресечение и предупреждение угроз экономической безопасности государственных организаций Российской Федерации.

Ключевые слова: экономическая безопасность, государственные организации, Всемирная торговая организация, недобросовестная конкуренция, военно-техническое сотрудничество, конкурентоспособность, финансовый и торговый рынок.

В нынешнее время наша страна преодолевает трудный рубеж. Сложно конкурировать с зарубежными странами по производству и качеству товаров и услуг. Одним из возможных препятствий в организации производства на предприятии является угроза экономической