

Уточненный метод решения контактной задачи для кольцевого слоя с учетом сил трения

Сообщение 2. Решение функциональных уравнений, определяющих математическую модель контактной задачи

д.т.н. проф. Божкова Л.В., к.т.н. доц. Норицина Г.И., к.т.н. проф. Рябов В.Г.
 Университет машиностроения
 8(495) 223-05-23, tm@mami.ru

Аннотация. Приводится два метода решения системы двух функциональных уравнений, определяющих математическую модель контактной задачи для упругого слоя с учетом сил трения в зоне контакта. Первый метод основан на замене системы функциональных уравнений парной системой линейных алгебраических уравнений, второй – на ортогонализации систем функций. Приведено численное решение задачи.

Ключевые слова: контактная задача, силы трения, кольцевой слой, малые деформации, контактные давления, функциональные уравнения.

При уточненном методе решения контактной задачи для кольцевого слоя с учетом сил трения в зоне контакта радиальные контактные давления $\bar{p}_r(\theta)$ представлены в виде бесконечного ряда [1]:

$$\bar{p}_r(\theta) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos\left(\frac{m\pi\theta}{\theta_0}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\theta_0}\right), & |\theta| < \theta_0, \\ 0, & |\theta| > \theta_0, \end{cases} \quad (1)$$

где: $\bar{p}_r(\theta) = \frac{p_r(\theta)}{E}$ (E – модуль упругости слоя), $2Q_0$ – величина зоны контакта,

$p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ и $h_m (m = 1, 2, \dots)$ – безразмерные неизвестные константы.

Для определения неизвестных констант $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ и $h_m (m = 1, 2, \dots)$ получена система двух функциональных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [p_m \Phi_m(\theta) + h_m \Psi_m(\theta)] = 0, & |\theta| < \theta_0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} [p_m T_m(\theta) + h_m F_m(\theta)] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right) \theta^2, & |\theta| < \theta_0, \end{cases} \quad (2)$$

где: r_1, r_2 – радиусы кольцевого слоя ($r_2 > r_1$), r_0 – радиус жесткого цилиндра, с которым контактирует упругий слой

$$\Phi_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2f}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^* \cdot n \sin n\theta_0}{r_1 - r_2} \left(\theta - \frac{\sin n\theta}{n} \right) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Psi_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2m}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^* \cdot \sin n\theta_0}{r_1 - r_2} \left(\frac{\sin n\theta}{n} - \theta \right) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$T_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n \cdot \sin n\theta_0 (\cos n\theta - 1)}{n \left(\frac{\tilde{m}^2 - n^2}{\tilde{m}^2} \right)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$F_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2f}{\theta_0} m \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\beta_n^* \cdot \sin n\theta_0 (\cos n\theta - 1)}{n \left(\frac{\tilde{m}^2 - n^2}{\tilde{m}^2} \right)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

f – коэффициент трения, $\tilde{m} = \frac{m\pi}{\theta_0}$,

β_n и $\beta_n^* (n = 1, 2, \dots)$ – некоторая последовательность чисел [1].

Анализ последовательностей чисел β_n и $\beta_n^* (n = 1, 2, \dots)$ показал, что последовательность чисел $\beta_n (n = 1, 2, \dots)$ стремится к некоторому числу $\beta = 2A$ ($A = 1 - \nu^2$, ν – коэффициент Пуассона упругого слоя), а последовательность чисел $\beta_n^* (n = 1, 2, \dots)$ стремится к числу $\beta^* = -\frac{1}{2}(5A + B)$ ($B = \nu(1 + \nu)$). Это позволило улучшить сходимость рядов, входящих в (3), и придать им к следующий вид:

$$\Phi_m(\theta) = \frac{f}{\pi} \left[\beta^* \pi \theta - \frac{\beta^*}{\tilde{m}} \left(\frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \theta} \right)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n^* - \beta^*)}{\left(\frac{\tilde{m}^2 - n^2}{\tilde{m}^2} \right)} (\cos n\theta - \sin n\theta) \sin n\theta_0 \right], \quad (m = 1, 2, \dots), |\theta| < \theta_0$$

$$\Psi_m(\theta) = \frac{2m}{\theta_0} \left\{ \frac{\beta}{2\tilde{m}} \left[\frac{1 - (-1)^{m+1}}{2} \ln \frac{1 - \cos(\theta_0 + \theta)}{1 - \cos(\theta_0 - \theta)} \right] + \right. \\ \left[\ln \frac{\theta_0 + \theta}{\theta_0 - \theta} + s_1(\theta_0 - \theta) - s_1(\theta_0 + \theta) \right] \cos \left(\frac{\tilde{m}(\theta_0 - \theta)}{\theta_0 + \theta} \right) - \\ \left. - \frac{\beta\theta}{\tilde{m}} si(\tilde{m}\pi) + (-1)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \beta) \sin n\theta_0 (\sin n\theta - \theta)}{\tilde{m}^2 - n^2} \right\}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), |\theta| < \theta_0,$$

$$T_m(\theta) = \frac{\beta}{\pi \tilde{m}} \left[\frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \theta} \right]^{m+1} \left[\frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \theta} \right] + \\ + \cos \left(\frac{\tilde{m}(\theta_0 - \theta)}{\theta_0 + \theta} \right) 2si(\tilde{m}\pi) \left\{ + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \beta)}{\left(\frac{\tilde{m}^2 - n^2}{\tilde{m}^2} \right)} [\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2\sin n\theta_0] \right\}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), |\theta| < \theta_0, \quad (4)$$

$$F_m(\theta) = \frac{f_m}{\theta_0} \left\{ \frac{\beta^* \pi}{\tilde{m}} \left[\frac{1 - (-1)^{m+1}}{2} \right] (-1)^{m+1} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta_0 (\cos n\theta - 1)}{n \left(\frac{\tilde{m}^2 - n^2}{\tilde{m}^2} \right)} \right\}, \quad (m = 1, 2, \dots), |\theta| < \theta_0,$$

где: $s_1(x)$ – некоторая затабулированная функция, $si(x)$ – интегральный синус [2].

Как следует из (1) для определения закона распределения радиальных контактных давлений при любом угле θ_0 необходимо знать две группы констант $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ и $h_m (m = 1, 2, \dots)$, которые входят в систему двух функциональных уравнений (2).

Названные константы можно определить двумя способами: либо путем замены системы функциональных уравнений парной бесконечной системой линейных алгебраических уравнений, либо методом ортогонализации систем функций.

Вначале охарактеризуем метод замены системы двух функциональных уравнений (2)

парной бесконечной системой линейных алгебраических уравнений. С этой целью необходимо выбрать полную систему функций $\varphi_k(\theta)$ ($k=0,1,2,\dots$) на отрезке $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, затем умножить обе части функциональных уравнений (2) на функции этой системы и интегрировать их в указанных пределах. В результате получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} [p_m d_{k,m} + h_m c_{c,m}] = 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} [p_m d_{k,m} + h_m e_{k,m}] = b_k, \quad (k=0,1,2,\dots), \quad (5)$$

где:

$$\begin{aligned} a_{k,m} &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Phi_m(\theta) \phi_k(\theta) d\theta, \quad k=0,1,\dots \quad m=0,1,\dots \\ c_{k,m} &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Psi_m(\theta) \phi_k(\theta) d\theta, \quad k=0,1,\dots \quad m=0,1,\dots \\ d_{k,m} &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} T_m(\theta) \phi_k(\theta) d\theta, \quad k=0,1,\dots \quad m=0,1,\dots \\ e_{k,m} &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} F_m(\theta) \phi_k(\theta) d\theta, \quad k=0,1,\dots \quad m=0,1,\dots \\ b_k &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right) \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \theta^2 \varphi_k(\theta) \theta d\theta, \quad k=0,1,\dots \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве системы функций $\varphi_k(\theta)$ ($k=0,1,2,\dots$) была выбрана система $\cos \frac{k\pi\theta}{\theta_0}$ ($k=0,1,2,\dots$), являющаяся полной на отрезке $(-\theta_0, \theta_0)$.

Парную систему линейных алгебраических уравнений (5) можно решать либо методом последовательных приближений, либо методом редукции.

Рассмотрим теперь способ определения констант p_m ($m=0,1,\dots$) и h_m ($m=1,2,\dots$), основанный на построении ортогональных систем функций по заданным системам функций. С этой целью построим прежде всего ортогональную систему функций $R_m(\theta)$ ($m=0,1,\dots$) на базе системы функций $\Phi_m(\theta)$ ($m=0,1,\dots$) [2]:

$$R_m(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{H_{im}^{-1}}{H_{mm}^{-1}} \Phi_i(\theta), \quad (7)$$

где: H_{im}^{-1} есть « im -ый» элемент некоторой обратной матрицы H_m^{-1} . При этом элементы матрицы $[H]_m$ определяются по формулам:

$$H_{ij} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Phi_i(\theta) \Phi_j(\theta) d\theta, \quad k=0,1,\dots \quad (8)$$

Из первого уравнения системы (2) следует:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m \Phi_m(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n R_n(\theta) = - \sum_{m=0}^{\infty} h_m \Psi(\theta). \quad (9)$$

На основании (7) и (9) получаем:

$$p_m = \sum_{i=m}^{\infty} B_i \frac{H_{mi}^{-1}}{H_i}, \quad (10)$$

$$B_n = -\sum_{m=0}^{\infty} x_{nm} h_m, \quad (11)$$

где:

$$x_{nm} = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \psi_m(\theta) R_n(\theta) d\theta}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} R_n^2(\theta) d\theta}. \quad (12)$$

Подставим (11) в (10), предварительно поменяв в (10) индекс i на n , а индекс m на i . В результате получим:

$$p_i = -\sum_{m=0}^{\infty} h_m \gamma_{im}, \quad (13)$$

где:

$$\gamma_{im} = \sum_{n=i}^{\infty} x_{nm} \frac{H_{in}^{-1}}{H_{nn}^{-1}}. \quad (14)$$

Из второго уравнения системы (2) следует:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m F_m(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right) \theta^2 - \sum_{m=0}^{\infty} p_m T_m(\theta). \quad (15)$$

Подставив (13) в (15), предварительно поменяв в (13) индекс i на m и наоборот, получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m X_m(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right) \theta^2, \quad (16)$$

где:

$$X_m(\theta) = F_m(\theta) - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{im} T_i(\theta). \quad (17)$$

Для определения постоянных h_m ($m=0,1,\dots$) нужно построить ортогональную систему функций $Y_m(\theta)$ ($m=0,1,\dots$) на базе системы функций $X_m(\theta)$ ($m=0,1,\dots$):

$$Y_m(\theta) = \sum_{i=0}^m \frac{L_{im}^{-1}}{L_{mm}^{-1}} X_i(\theta), \quad (18)$$

тогда:

$$h_m = \sum_{i=1}^{\infty} E_m \frac{L_{mi}^{-1}}{L_{ii}^{-1}}, \quad m=0,1,\dots, \quad (19)$$

где:

$$h_m = \frac{1}{2} \frac{\left(1 + \frac{r_2}{r_0} \right) \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \theta^2 Y_m(\theta) d\theta}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} Y_m^2(\theta) d\theta}. \quad (20)$$

При этом L_{im}^{-1} есть « im -ый» элемент обратной матрицы $[L]_m^{-1}$, а элементы матрицы $[L_m]$ определяются по формулам:

$$L_{ij} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} X_i(\theta) X_j(\theta) d\theta. \quad (21)$$

Таким образом, получены соотношения (7) – (21), с помощью которых можно вычислить все неизвестные константы $p_m (m = 0, 1, \dots)$ и $h_m (m = 1, 2, \dots)$ при заданном угле θ_0 и, следовательно, определить закон изменения радиальных контактных давлений $p_r[\theta]$ по формуле (1).

На рисунке 1 показан закон изменения радиальных контактных давлений $p_r(\theta)$, полученный при приближенном (пунктирная линия) и уточненном (сплошная линия) методах решения контактной задачи в случае несжимаемого материала $\nu = 0,5$ и при $f = 0,3$;

$$\theta_0 = 0,05 \text{ рад}; \quad \rho_1 = \frac{r_1}{r_2} = 0,95.$$

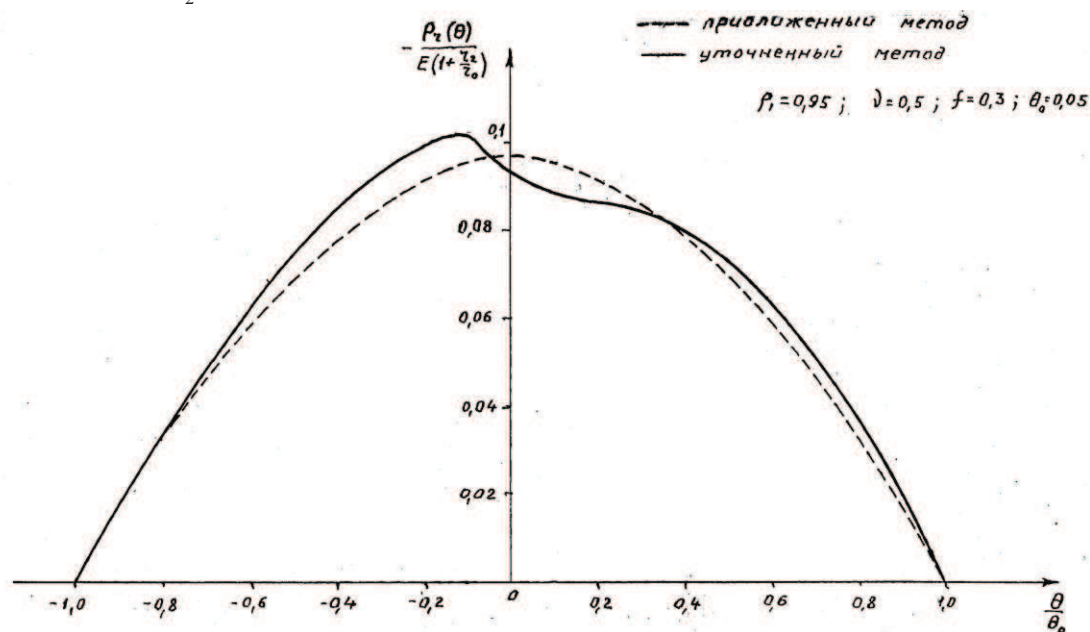


Рисунок 1. Изменение радиальных контактных давлений

Анализ численного решения задачи показал, что расхождение между законами изменения радиальных контактных давлений $p_r(\theta)$, полученных на основании приближенного и уточненного методов решения, увеличивается с ростом коэффициента трения f .

Литература

1. Божкова Л.В, Норицина Г.И., Рябов В.Г. Уточненное решение контактной задачи для кольцевого слоя с учетом сил трения. Сообщение I. Математическая модель контактного взаимодействия кольцевого слоя с жестким основанием. Известия МГТУ «МАМИ», № 1(19), 2014, с. 11-18.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978, 831 с.