

## **Теория пластичности без поверхности нагружения и ассоциированного закона течения**

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С.  
Университет машиностроения  
8(495) 223-05-23, доб. 1318, tm@mami.ru

*Аннотация.* На основе анализа петли гистерезиса (циклической диаграммы) выделены три участка, характеризующие различное поведение напряжений, т.е. выделены три типа напряжений. Для каждого типа напряжений сформулированы соответствующие эволюционные уравнения, характеризующие анизотропное упрочнение. Для описания изотропного упрочнения вводится эволюционное уравнение для напряжений четвертого типа. Девиатор напряжений определяется как сумма напряжений четырех типов. Для описания нелинейного процесса накопления вводится кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на энергетическом принципе, где в качестве энергии расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия равная работе напряжений второго типа на поле полных деформаций. Выделяются материальные функции, замыкающие теорию, формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций.

*Ключевые слова:* пластичность, циклическая диаграмма, накопление повреждений, базовый эксперимент, идентификация материальных функций.

### **Введение**

Математическое моделирование процессов деформирования при произвольных сложных циклических нагружениях, строится, в основном, на вариантах теории пластического течения при комбинированном упрочнении, обзор и анализ которых содержится в работах [1-13]. Основной проблемой построения этих вариантов является формулировка достаточно адекватных эволюционных уравнений для смещения центра поверхности нагружения, а также неоднозначность в экспериментальном определении границ поверхности нагружения. В теории течения деформация разделяется на упругую и пластическую. Для определения пластической деформации используется ассоциированный с поверхностью нагружения закон течения (градиентальный закон течения).

В настоящей работе на основе анализа экспериментальных результатов при циклическом нагружении, а именно, петли циклического гистерезиса (циклической диаграммы), выделены три типа напряжений, для каждого из которых сформулированы соответствующие эволюционные уравнения. Выделенные три типа напряжений отвечают анизотропному упрочнению. Для описания изотропного упрочнения вводится эволюционное уравнение для напряжений четвертого типа. Девиатор полных напряжений определяется как сумма напряжений четырех типов.

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится по аналогии с работами [1 – 4, 14, 15] кинетическое уравнение накопления повреждений, в котором в качестве энергии расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия равная работе напряжений второго типа на поле полных деформаций.

Основной особенностью предлагаемого варианта теории пластичности является то, что деформация едина и не разделяется на упругую и пластическую, а также не используется понятие поверхности нагружения и, соответственно, ассоциированный закон течения.

Выделены материальные функции, замыкающие вариант теории и подлежащие экспериментальному определению. Сформулирован базовый эксперимент и метод идентификации

материальных функций.

### Основные положения и уравнения

Для построения соотношений теории пластичности рассматривается стабилизированная петля гистерезиса (рисунок 1) в девиаторных компонентах  $\frac{3}{2}s_{11}$  и  $e_{11}$  при одноосном растяжении-сжатии. Затем на полуцикле от точки смены направления деформирования вводится система координат: напряжение  $\sigma$ , деформация  $\varepsilon$ . Кривая в координатах  $\sigma, \varepsilon$  включает в себя упругое и пластическое деформирование без разделения этих деформаций. Далее вычисляется производная  $d\sigma/d\varepsilon$  и строится кривая в координатах  $d\sigma/d\varepsilon$  и  $\sigma$  (рисунок 2).

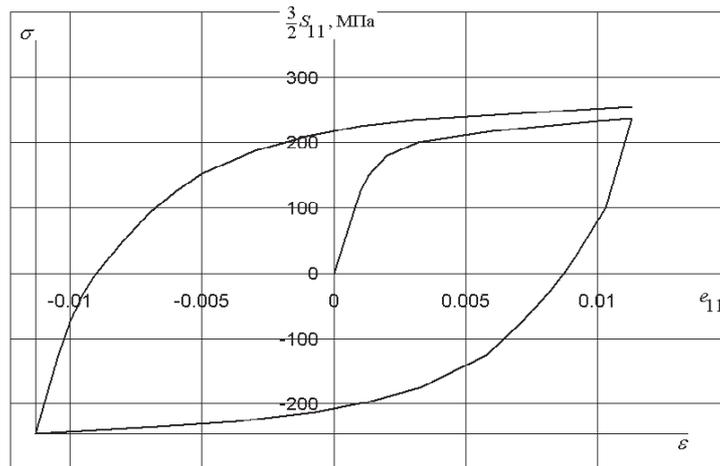


Рисунок 1. Стабилизированная петля гистерезиса

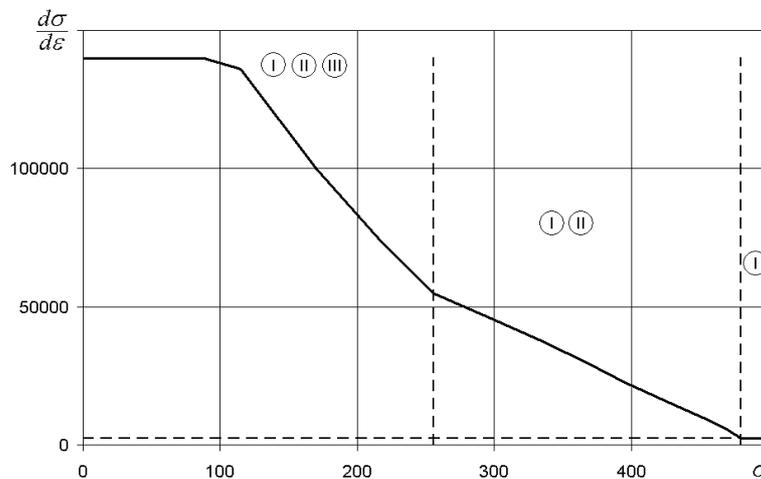


Рисунок 2. Кривая в координатах  $d\sigma/d\varepsilon$  и  $\sigma$

На полученной кривой можно выделить три участка, характеризующие различное поведение напряжений. На первом участке производная имеет практически постоянное значение, и здесь для напряжения первого типа предлагается эволюционное уравнение аналогичное уравнению Ишлинского-Прагера [16, 17] для микронапряжений первого типа [15]:

$$\dot{s}_{ij}^{(1)} = \frac{2}{3} g^{(1)} \dot{e}_{ij}. \quad (1)$$

На втором участке производная меняется по линейному закону, и здесь для напряжений второго типа предлагается эволюционное уравнение аналогичное уравнению Амстронга-Фредерика-Кадашевича [18, 19] для микронапряжений второго типа [15]:

$$\dot{s}_{ij}^{(2)} = \frac{2}{3} g^{(2)} \dot{\epsilon}_{ij} + g_s^{(2)} s_{ij}^{(2)} \dot{\epsilon}_{u^*}, \quad \text{где: } \dot{\epsilon}_{u^*} = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Далее на третьем участке производная меняется по нелинейному закону, который может быть описан серией эволюционных уравнений типа Оно-Ванга [20] для микронапряжений третьего типа [15]:

$$\dot{s}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (m = 3, \dots, M). \quad (3)$$

Для описания изотропного упрочнения и разупрочнения вводится следующее эволюционное уравнение для напряжений четвертого типа:

$$\dot{s}_{ij}^{(M+1)} = \frac{2}{3} q_R \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (4)$$

Определяющие функции  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$ ,  $g_s^{(2)}$ ,  $g^{(m)}$ ,  $q_R$ , входящие в уравнения (1)-(4), выражаются через материальные следующим образом [1–3, 14, 15]:

$$g^{(1)} = E_s, \quad g^{(2)} = \beta \sigma_s, \quad g_s^{(2)} = -\beta, \quad (5)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_s^{(m)}, \\ 0, \quad \text{если } \sigma_u^{(m)} \geq \sigma_s^{(m)} \cap s_{ij}^{(m)} \dot{\epsilon}_{ij} > 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\left( \sigma_u^{(m)} = \left( \frac{3}{2} s_{ij}^{(m)} s_{ij}^{(m)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 3, \dots, M \right), \quad (6)$$

$$q_R = \frac{dR(\epsilon_{u^*})}{d\epsilon_{u^*}}, \quad (\epsilon_{u^*} = \int \dot{\epsilon}_{u^*} dt). \quad (7)$$

Здесь  $E_s$ ,  $\sigma_s$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_s^{(m)}$ ,  $\beta^{(m)}$ ,  $R(\epsilon_{u^*})$  – материальные параметры.

Девiator напряжений аналогично модели Новожилова-Шабоши [21, 22] для микронапряжений [15] определяется как сумма напряжений четырех типов, для каждого из которых имеет место свое эволюционное уравнение:

$$s_{ij} = \sum_{m=1}^{M+1} s_{ij}^{(m)}. \quad (8)$$

Окончательно уравнение для девiatorа напряжений с учетом (1) – (4) и (8) будет иметь следующий вид:

$$\dot{s}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\epsilon}_{ij} + g_s^{(2)} s_{ij}^{(2)} \dot{\epsilon}_{u^*}, \quad (9)$$

$$g = \sum_{m=1}^M g^{(m)} + q_R. \quad (10)$$

К уравнению (7) следует добавить уравнение, связывающее шаровые составляющие тензоров напряжений  $\sigma_0 = \sigma_{ii} / 3$  и деформаций  $\epsilon_0 = \epsilon_{ii} / 3$ :

$$\sigma_0 = 3K\epsilon_0. \quad (11)$$

Для описания нелинейных процессов накопления повреждений вводится кинетическое уравнение накопления повреждений, базирующееся на энергетическом принципе, где в качестве энергии расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия равная работе напряжений второго типа на поле деформаций. Это кинетическое уравнение вводится по аналогии с кинетическим уравнением [15], базирующемся на работе микронапря-

жений второго типа на поле пластических деформаций. Тогда кинетическое уравнение накопления повреждений будет иметь следующий вид:

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{s_{ij}^{(2)} \dot{\epsilon}_{ij}}{W_s}, \quad (12)$$

$$\alpha = \left( \sigma_s / \sigma_u^{(2)} \right)^{n_\alpha}. \quad (13)$$

Здесь  $\omega$  – мера повреждений;  $W_s$  – энергия разрушения;  $\alpha$  и  $n_\alpha$  – функция и параметр нелинейности процесса накопления повреждений;  $\sigma_u^{(2)}$  – интенсивность напряжений второго типа.

Полученный вариант теории пластичности, в отличие от вариантов теории пластического течения, имеет следующие особенности:

- деформация не разделяется на упругую и пластическую;
- нет необходимости введения поверхности нагружения (текучести);
- не используется ассоциированный закон течения;
- нет необходимости введения условий нагрузки или разгрузки (условий упругого или упругопластического состояний);
- вычисляются напряжения второго типа, совпадающие с микронапряжениями второго типа, которые отвечают за процесс накопления повреждений.

Для описания явления вышагивания (ratcheting) при несимметричных мягких циклических нагружениях параметр  $E_s$ , входящий в первое эволюционное уравнение для напряжений первого типа, принимается зависящим от накопленной деформации  $\epsilon_{u*}$  следующим образом:

$$E_s = E_{s0} / \left[ 1 + K_E (\epsilon_{u*})^{n_E} \right]. \quad (14)$$

Здесь  $K_E, n_E$  – материальные параметры.

Следует заметить, что в случае вышагивания петли гистерезиса, может быть введено кинетическое уравнение для повреждения, обусловленное работой напряжений первого типа, как и для микронапряжений первого типа [15]:

$$\dot{\omega} = \frac{s_{ij}^{(1)} \dot{\epsilon}_{ij}}{W_b}, \quad (15)$$

где:  $W_b$  – энергия разрушения за счет вышагивания.

Тогда полное повреждение будет равно сумме повреждений первого и второго типов.

Таким образом, данный вариант теории пластичности замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$K$  – модуль объемного сжатия;

$E_{s0}, \sigma_s, \beta, \sigma_s^{(m)}, \beta^{(m)} (m = 3, \dots, M)$  – модули анизотропного упрочнения;

$K_E, n_E$  – модули вышагивания;

$R(\epsilon_{u*})$  – функция изотропного упрочнения;

$W_s$  – энергия разрушения;

$n_\alpha$  – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$W_b$  – энергия разрушения при вышагивании.

### Расчетно-экспериментальный метод определения материальных функций

Материальные функции определяются по результатам испытаний в условиях одноосного напряженного состояния (растяжения-сжатия или кручения). Базовый эксперимент вклю-

чает в себя следующий набор данных:

- модуль объемного сжатия, который определяется традиционным методом;
- диаграмма растяжения (кручения) до деформации  $0.05 \div 0.1$ ;
- циклические диаграммы при симметричном растяжении-сжатии или знакопеременном кручении при постоянном размахе деформации  $0.02 \div 0.03$ ;
- циклические диаграммы при несимметричном растяжении-сжатии или знакопеременном кручении при постоянном размахе деформации  $0.01 \div 0.02$  и средней деформацией цикла  $0.05 \div 0.1$ ;
- данные по малоцикловой усталости при одноблочном и двухблочном жестком симметричном циклическом нагружении;
- данные по малоцикловой усталости при одноблочном мягком несимметричном циклическом нагружении.

Для определения модулей анизотропного упрочнения стабилизированная петля гистерезиса (циклическая диаграмма) перестраивается в координатах: напряжение  $\sigma$ , деформация  $\varepsilon$  (рисунок 1). Начало этой системы координат расположено в точке смены направления деформирования.

Далее вычисляется производная  $d\sigma/d\varepsilon$  и строится кривая в координатах:  $d\sigma/d\varepsilon$  и  $\sigma$  (рисунок 2). На кривой, показанной на рисунке 2, выделяются три участка, характеризующие различное поведение производной  $d\sigma/d\varepsilon$ . На первом участке производная имеет практически постоянное значение, которое равно значению параметра  $E_{so}$ . Затем кривая на рисунке 2 перестраивается в координатах  $d\hat{\sigma}/d\varepsilon = (d\sigma/d\varepsilon - E_{so})$  и  $\hat{\sigma} = (\sigma - E_{so}\varepsilon)$ , т.е. исключается влияние напряжений первого типа. Полученная линейная зависимость на втором участке (рисунок 3) позволяет найти параметры  $\sigma_s$  и  $\beta$  по формулам:

$$\beta = \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} \Big|_M / (\hat{\sigma}_A - \hat{\sigma}_M), \quad (15)$$

$$\sigma_s = \frac{\hat{\sigma}_A - \hat{\sigma}_M}{2 \exp(-\beta \varepsilon_M)}. \quad (16)$$

Здесь  $\varepsilon_M$  – деформация окончания третьего участка (окончание изменения напряжений третьего типа).

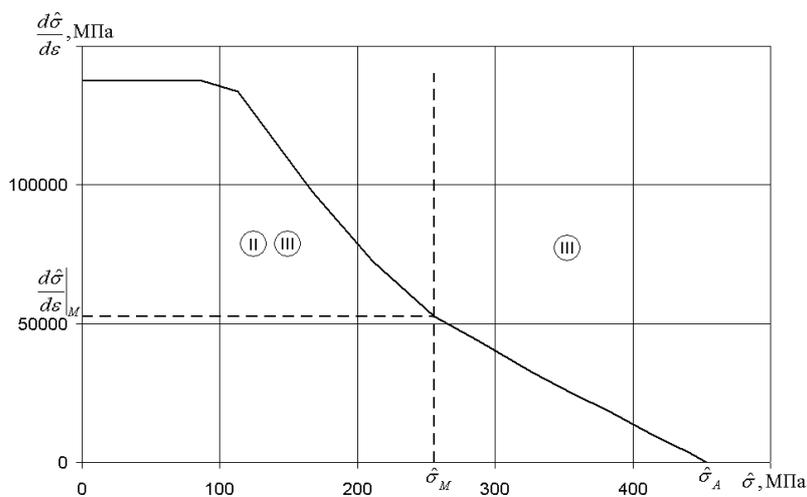


Рисунок 3. Кривая в координатах  $d\hat{\sigma}/d\varepsilon$  и  $\hat{\sigma}$

Далее кривая на рисунке 1 перестраивается в координатах  $\tilde{\sigma} = \sigma - E_{so}\varepsilon - 2\sigma_s [1 - \exp(-\beta\varepsilon)]$  и  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \in [0, \varepsilon_M]$ ).

Полученная кривая (рисунок 4) отвечает напряжениям только третьего типа. Длительность третьего участка достаточно мала  $\varepsilon_M \approx 0.002 \div 0.004$ , т.е. напряжения третьего типа возникают практически в пределах технического допуска на остаточную деформацию при определении условного предела текучести. Далее интервал  $[0; \tilde{\sigma}_M]$  разбивается на  $(M-2)$  частей и параметры анизотропного упрочнения вычисляются по следующим формулам:

$$\beta^{(m)} = 2 / \varepsilon_m \quad (m = 3, \dots, M) \quad (17)$$

$$\sigma_s^{(M)} = \frac{\tilde{\sigma}_M - \tilde{\sigma}_{M-1}}{\varepsilon_M - \varepsilon_{M-1}} \cdot \frac{1}{\beta^{(M)}} \quad (18)$$

$$\sigma_s^{(m)} = \frac{1}{\beta^{(m)}} \left[ \frac{\tilde{\sigma}_m - \tilde{\sigma}_{m-1}}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m-1}} - \frac{\tilde{\sigma}_{m+1} - \tilde{\sigma}_m}{\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m} \right], \quad (m = M-1, \dots, 3; \tilde{\sigma}_2 = 0; \varepsilon_2 = 0) \quad (19)$$

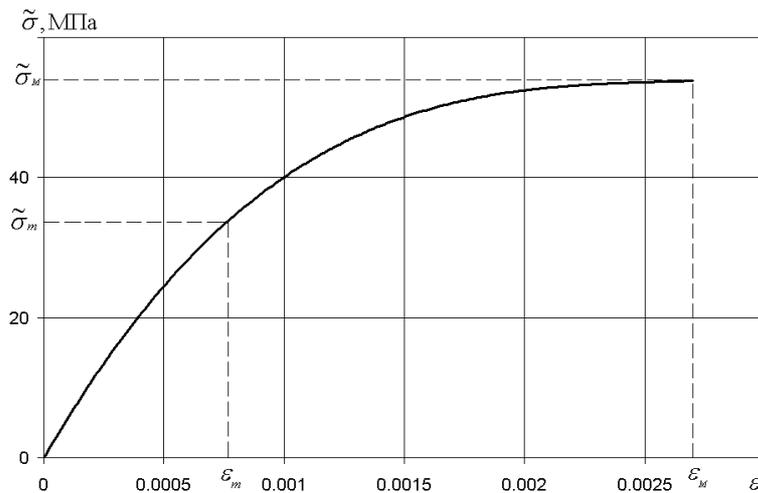


Рисунок 4. Кривая в координатах  $\tilde{\sigma}$  и  $\varepsilon$

Модули вышагивания определяются по результатам одноосных испытаний при жестком несимметричном циклическом нагружении на основе явления «посадки» петли гистерезиса. Полученная экспериментальная зависимость между средним напряжением цикла  $\sigma_c$  и числом циклов  $N$  строится в логарифмических координатах:

$$y = \lg(E_{so} \varepsilon_c / \sigma_c - 1) \quad (20)$$

$$x = \lg(\varepsilon_c + 2 \Delta \varepsilon N) \quad (21)$$

где:  $\varepsilon_c$  – средняя деформация цикла;  $\Delta \varepsilon$  – размах деформации на цикле.

Эта экспериментальная зависимость является линейной, что позволяет по углу  $\gamma$  наклона прямой и точки пересечения прямой с осью ординат определить модули вышагивания по формулам

$$\lg K_E = y_0, \quad n_E + 1 = tg \gamma \quad (22)$$

Получив параметры анизотропного упрочнения и модули вышагивания, можно теперь вычислить величину изотропного упрочнения. Для этого используется экспериментальная диаграмма растяжения и экспериментальные значения напряжения в конце полуциклов растяжения. Вычитая из этих значений вычисленные значения напряжения при соответствующих значениях накопленной деформации, можно получить функцию изотропного упрочнения  $R(\varepsilon_{n*})$ .

Энергия разрушения  $W_s$  определяется при вычислении работы напряжений второго типа при циклических нагружениях до экспериментальных значений числа циклов до разрушения.

Параметр нелинейности процесса накопления повреждений определяется подбором до

совпадения расчетных и экспериментальных результатов при двухблочном циклическом нагружении (обычно  $n_\alpha \approx 1.5$ ).

Энергия разрушения при вышагивании  $W_b$  определяется также подбором при сопоставлении расчетных и экспериментальных результатов при несимметричном мягком циклическом нагружении.

### Заключение

Сформулированы основные положения и уравнения варианта теории пластичности без разделения деформации на упругую и пластическую, без введения поверхности нагружения и ассоциированного закона течения.

На основе того, что работа напряжений второго типа на поле полных деформаций, как и работа микронапряжений второго типа на поле пластических деформаций, является универсальной характеристикой разрушения материала при циклических нагружениях, сформулировано кинетическое уравнение для нелинейных процессов накопления повреждений.

Выделены материальные функции замыкающие теорию, сформулирован достаточно простой базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций.

### Литература

1. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.– 144 с.
2. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.–176 с.
3. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory.– New York: Begell House, 2013.– 194 p.
4. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 424 с.
5. Bari S., Hassan T. An advancement in cyclic plasticity modeling for multiaxial ratcheting simulation // International Journal of Plasticity.– 2002. – V. 18. – pp. 873–894.
6. Kang G., Liu Y., Ding J., Gao Q. Uniaxial ratcheting and fatigue failure of tempered 42CrMo steel: Damage evolution and damage-coupled viscoplastic constitutive model. Int. J. of Plasticity. – 2009. V.25. – pp. 838-860.
7. Kan Q., Kang G. Constitutive model for uniaxial transformation ratcheting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature. Int. J. of Plasticity. (2009). doi:10.1016/j.ijplas.2009.08.005.
8. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. Int. J. of Plasticity. – 2008. V.24. – pp.1642-1692.
9. Rahman S.M., Hassan T., Corona E., Evaluation of cyclic plasticity models in ratcheting simulation of straight pipes under cyclic bending and steady internal pressure. Int. J. of Plasticity. – 2008. V.24. – pp.1756-1791.
10. Abdel-Karim M. Modified kinematic hardening rules for simulations of ratchetting. Int. J. of Plasticity. – 2009. V.25. – pp. 1560-1587.
11. Abdel-Karim M. An evaluation for several kinematic hardening rules on prediction of multiaxial stress-controlled ratchetting. Int. J. of Plasticity. – 2010. V.26. – pp. 711-730.
12. Dafalias Y.F., Feigenbaum H.P. Biaxial ratchetting with novel variations of kinematic hardening. Int. J. of Plasticity. – 2011. V.27. – pp. 479-491.
13. Chaboche J.-L., Kanouté P., Azzouz F. Cyclic inelastic constitutive equations and their impact on the fatigue life predictions. Int. J. of Plasticity. – 2012. V.35. – pp. 44-66.
14. Бондарь В.С., Бурчаков С.В., Даншин В.В. Математическое моделирование процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Вып. 72. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. – С. 18–27.
15. Бондарь В.С., Даншин В.В., Макаров Д.А. Математическое моделирование процессов

- 
- деформирования и накопления повреждений при циклических нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика.- 2014.-№ 2.-С. 125-152.
16. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. матем. журн. – 1954. Т. 6. Вып. 3. – С. 314–324.
  17. Prager W. The theory of plasticity: A. Survey of Recent Achievements // Proc. Inst. Mech. Engrs. London. 1955. – 169.41.
  18. Amstrong P.J., Frederick C.O. A mathematical representation of the multiaxial bausinger effect // CEGB Report No. RD/B/N/ 731. – 1966.
  19. Кадашевич Ю.И. О различных тензорно-линейных соотношениях в теории пластичности // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып.6. – С. 39–45.
  20. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part 1: formulations and basic features for ratcheting behavior // International Journal of Plasticity. – 1993. – V. 9. – pp. 375–390.
  21. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений // ПММ. – 1964. – Т. 28, Вып.3. С. 393–400.
  22. Chaboche J.-L., Dang-Van K., Cordier G. Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel // Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on SMiRT. Div L, Berlin. Paper No. L. 11/3 – 1979.