Течение тонкого слоя пластически анизотропного материала по грани упругого параллелепипеда

к.т.н. проф. Бодунов М.А., Бородин И.В., к.ф.-м.н. доц. Кийко Л.К.
Университет машиностроения
(495) 2230523, m.a.bodunov@mail.ru, xborodin@gmail.com, vm@mami.ru

Аннотация. В работе представлена постановка и исследование задачи о течении тонкого слоя пластически анизотропного материала по грани упругого параллелепипеда, сформулированной в рамках обобщенной на случай анизотропии теории течения в тонком слое.

Ключевые слова: *анизотропия свойств материала, деформируемость инструмента, тонкий слой.*

Процессы пластического течения в тонком слое металла обладают рядом особенностей, в частности, для них характерны высокие удельные давления, на порядок превышающие величины сдвиговых напряжений. Возникающие под их действием, а также вследствие конечной жёсткости инструмента деформации, достигают величин, соизмеримых с толщиной обрабатываемой детали. А значит, неучёт этих деформаций при проектировании технологической оснастки может отрицательно сказаться на получении детали в точности заданной геометрии.

Кроме того, важная в практических приложениях проблема течения тонких пластических слоев в условиях анизотропии свойств материала и контактного трения на сегодня практически не исследована. В представленной работе приводится постановка и решение задачи течения тонкого слоя пластически анизотропного материала по грани упругого параллелепипеда.

Предположим, что оба инструмента обладают одинаковыми физическими свойствами и геометрией, тогда можно допустить, что при сближении инструментов срединная плоскость слоя остаётся неизменной, что позволяет вследствие симметрии процесса рассматривать течение слоя вдвое меньшей толщины, ограниченного снизу упругим инструментом, а сверху – абсолютно жёстким телом [1, 2] (рисунок 1).

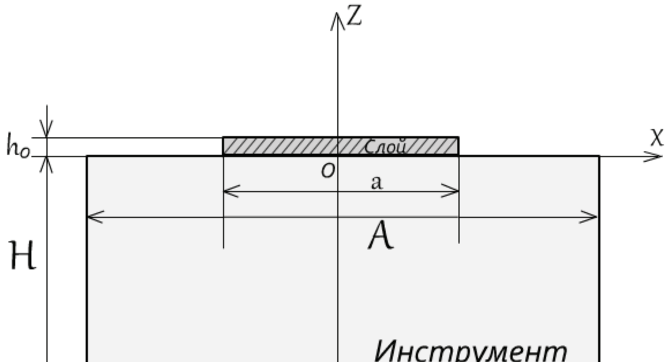

Рисунок 1. Общая схема процесса

Соотношение, определяющее контактное давление [1, 7]:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\beta^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2=\frac{4\tau_s^2}{h^2}, \tag{1}$$

где: τ_s – предел текучести материала пластического слоя на сдвиг,

β – параметр анизотропии.

Граничные условия для (1) определяются из следующих соображений: если контур Γ свободен от внешних воздействий ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$), то $P\left(x_0, y_0\right) = \sigma_s$; если граница является пазом, так что в него может свободно втекать металл слоя, а ширина паза порядка или меньше толщины слоя h, то приближённым условием свободного втекания будет $P\left(x_0, y_0\right) = 2\sigma_s$ [1, 5, 7]. В общем случае запишем:

$$P\left(x_0, y_0\right) = \lambda\ \sigma_s, \tag{2}$$

где: λ – множитель порядка единицы, $\left(x_0; y_0\right)$ – точки, принадлежащие фиксированному контуру Γ.

Толщина слоя $h\left(x, y\right) = h_0 + w\left(x, y\right)$ в выражении (1) определяется при общей постановке задачи в процессе решения; в простейшем варианте, когда известна функция жёсткости $K\left(x, y; x', y'\right)$ тела инструмента, для w имеем:

$$w(x, y) = \iint\limits_S K(x, y, x', y')\, p(x', y')\, dx'dy'. \tag{3}$$

Определение функции влияния K для произвольного упругого трёхмерного тела представляет собой самостоятельную трудную задачу, поэтому для нахождения w ставится задача теории упругости для тел инструментов. Запишем основные её соотношения, которыми определяется напряженно-деформируемое состояние тела инструмента.

Формулы Коши:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right);\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right);\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \varepsilon_{xy} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Соотношения Ламе:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}; & \sigma_{xz} &= 2\mu\ \varepsilon_{xz};\\
\sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}; & \sigma_{yz} &= 2\mu\ \varepsilon_{yz};\\
\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}; & \sigma_{xy} &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения равновесия в форме Ламе:

$$\begin{cases}
\left(\lambda + \mu\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\ \Delta u_x = 0;\\
\left(\lambda + \mu\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\ \Delta u_y = 0;\\
\left(\lambda + \mu\right)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\ \Delta u_z = 0;
\end{cases} \tag{6}$$

здесь: Δ – оператор Лапласа, $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$.

С учётом допущения об идентичности свойств тел инструментов представим схематично геометрию процесса течения. На рисунке 2 изображена «нижняя» его часть, а «верхняя» отсечена плоскостью симметрии $z = h_0$.

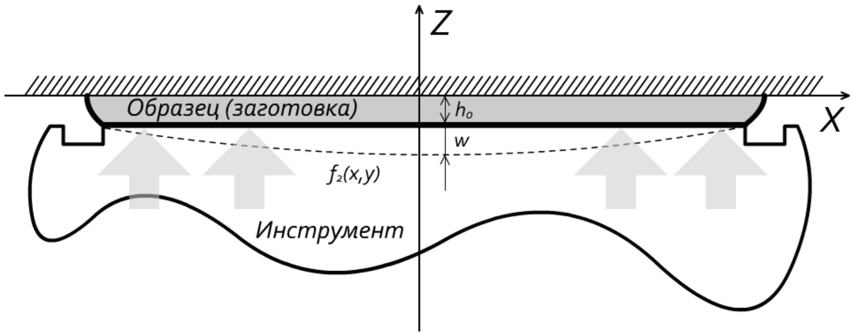

Рисунок 2. Модель технологического процесса

Запишем граничные условия задачи теории упругости:

$$\begin{cases} 1.\ z = -H: \quad u_z = 0; \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0 \\ 2.\ z = 0: \\ S1: \quad \sigma_{zz} = -p; \quad \sigma_{xz} \cong 0; \quad \sigma_{yz} \cong 0 \\ S2: \quad \sigma_{zz} = 0; \quad \sigma_{xz} = 0; \quad \sigma_{yz} = 0 \\ 3.\ \text{боковая поверхность } \Gamma_2: \\ \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Здесь в области, занятой слоем, касательные напряжения приняты равными нулю, так как их влияние на нормальные перемещения контактных поверхностей существенно меньше, чем нормальных, следовательно, с точностью до величин порядка h_0/a ими можно пренебречь [5].

С помощью соотношений Ламе (6) граничные условия (7) можно записать в перемещениях:

$$\begin{cases} 1.\ z = -H: \quad u_z = 0; \quad \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = 0; \quad \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = 0; \\ 2.\ z = 0, \quad S1: \quad (2\mu + \lambda)\dfrac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -P(x,y); \\ \quad \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = 0; \\ \quad \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = 0; \\ z = 0, \quad S2: \quad (2\mu + \lambda)\dfrac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) = 0; \\ \quad \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = 0; \\ \quad \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z} = 0; \\ 3.\ \textit{боковая поверхность } \Gamma_2: \\ \quad \sigma_{ij} n_j = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, краевая задача для определения давления P в слое и его толщины h поставлена полностью: если учесть, что $u_z\Big|_{z=0} = w(x,y)$, то задача сводится к совместному решению системы уравнений теории упругости (7), (8) и уравнений течения (1), (2).

Как видно, это совокупность сложных нелинейных взаимосвязанных уравнений, полное исследование которой возможно только современными численными методами. Используем для исследования задачи метод последовательных приближений [5, 8, 9], принимая тот факт, что замена переменной $y = \beta\eta$ в (1) вида приводит к математически тождественной задаче, решение которой представлено в [10]. Ниже представлены результаты проведенных расчетов для различных значений параметров задачи в прямоугольной и эллиптической областях (рисунок 3).

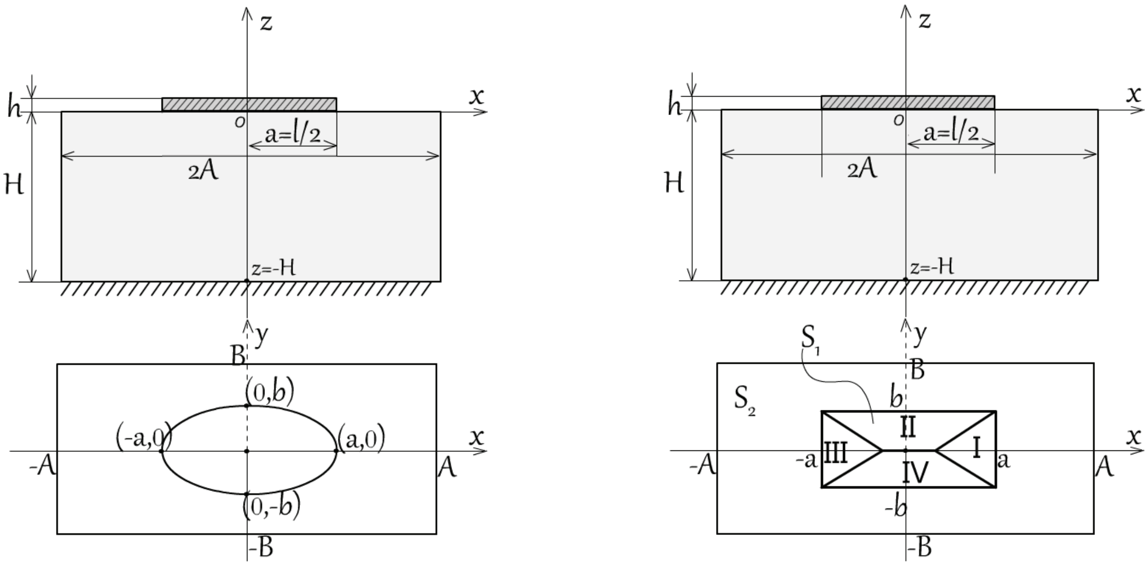

Рисунок 3. Области течения

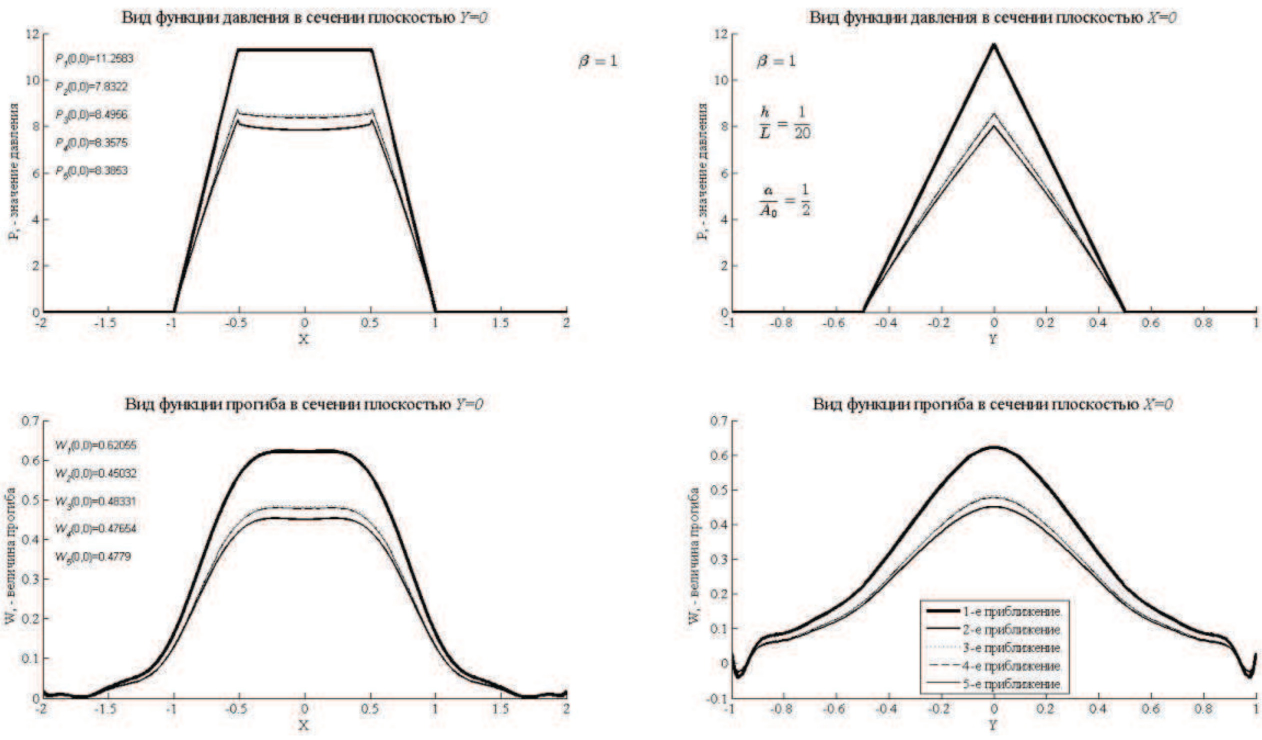

Рисунок 4. Результаты счета для прямоугольной области ($\beta = 1$)

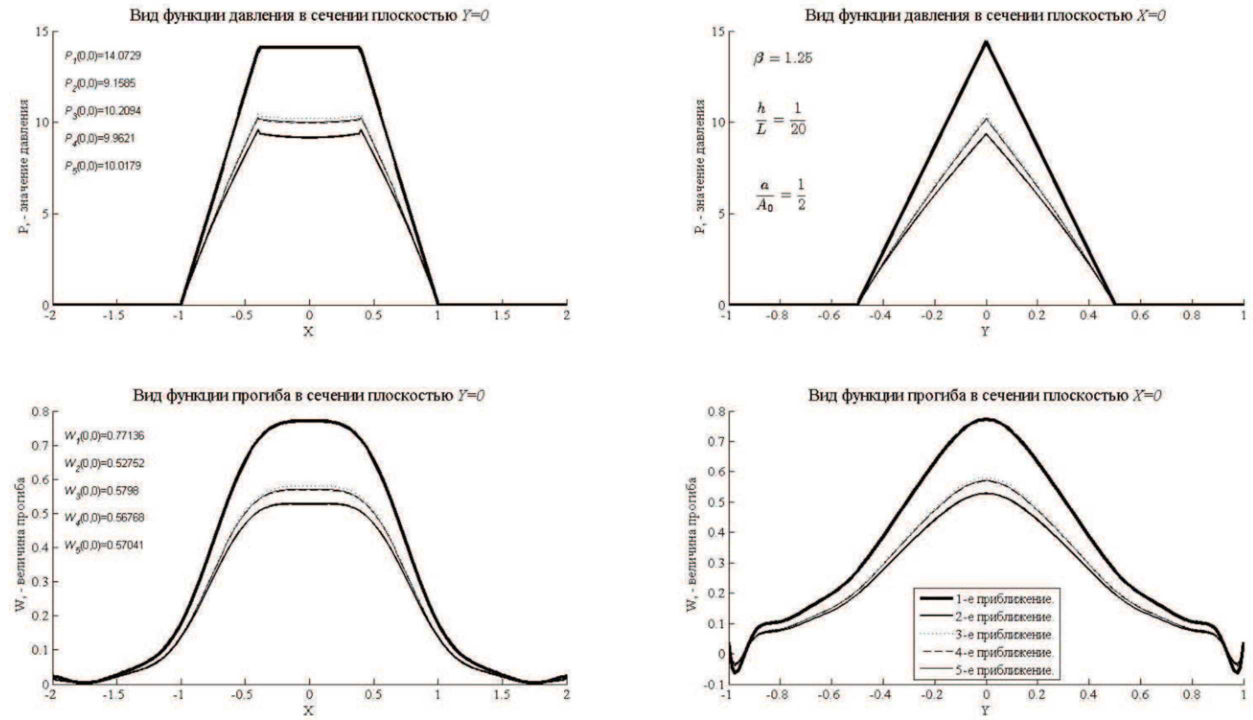

Рисунок 5. Результаты счета для прямоугольной области ($\beta = 1{,}25$)

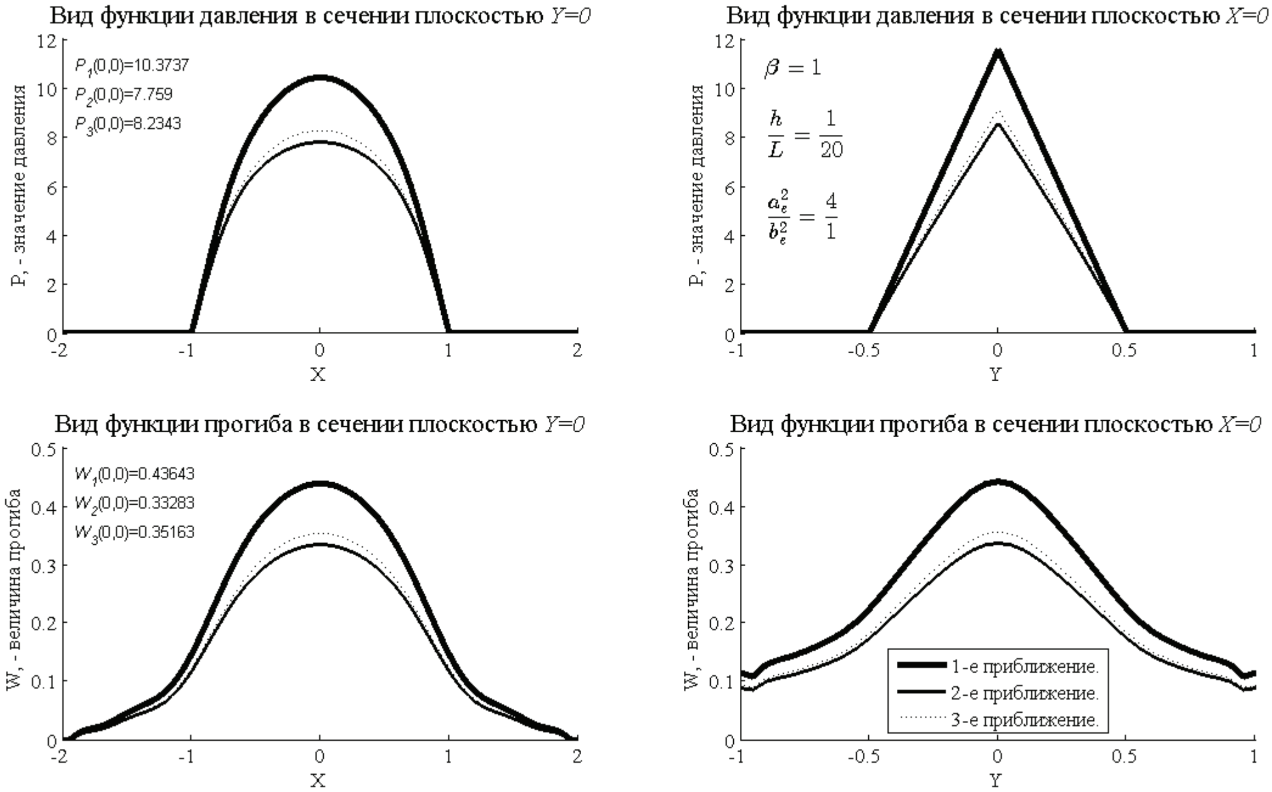

Рисунок 6. Результаты счета для эллиптической области ($\beta = 1$)

Представленные результаты показывают, что 5-ое приближение (а для некоторых задач уже 2-ое и 3-е) можно считать точным решением в рамках данной постановки. На рисунке 7 представлен вид функции давления в 5-ом приближении в сечении плоскостью $y = 0$ для относительных толщин $\frac{h}{L} = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$ и параметра $\beta = 0{,}7,\ 1,\ 1{,}25$.

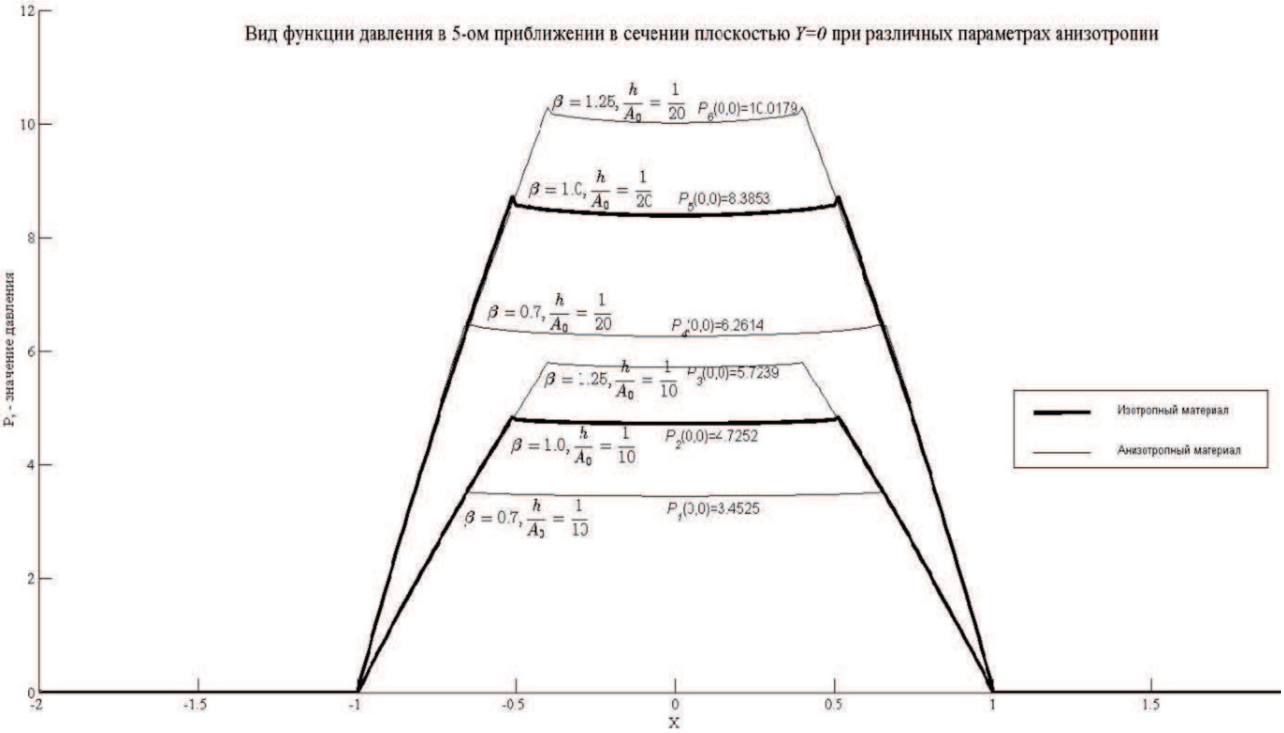

Рисунок 7. Сравнение результатов решения задачи для различных параметров

Сечение функции давления $P(x;y)$ плоскостью $y=0$ для различных значений параметра анизотропии.

Выводы

1. Установлена фактическая сходимость метода последовательных приближений, предложенного для решения системы интегро-дифференциальных уравнений.
2. Характер поверхности перемещений качественным образом не зависит от параметров задачи.
3. Значение параметра анизотропии может оказать существенное влияние на скорость сходимости метода, поскольку влияет на распределение давления в слое, тем самым подтверждаются полученные ранее результаты исследований – увеличение давления приводит к снижению скорости сходимости метода. Очевидно, первое приближение является грубым, но второе, для ряда значений параметров задачи, может дать довольно точную оценку величины упругих перемещений контактных поверхностей инструмента.
4. Обнаружено, что для ряда параметров решение задачи течения тонкого слоя по грани упругого параллелепипеда эквивалентно решению задачи о течении тонкого слоя по поверхности упругого полупространства.

Литература

1. Ильюшин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // Прикл. матем. и мех. – 1954, т. 18, № 3. – с. 265-288.
2. Ильюшин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // Прикл. матем. и мех. – 1955, т. 19, № 6. – с. 693-713.
3. Кийко И.А. Теория пластического течения в тонком слое металла. – М.: Инст. мех. МГУ, 1971. – 66 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности // М., Наука. – 1969. – 420 с.
5. Кийко И.А. Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического вещества // ДАН СССР. – 1964, т. 157, № 3. – с. 551-553.

6. Бодунов Д.М. Течение тонкого слоя идеально-пластического материала по деформируемым поверхностям: Дис... канд. физ.-мат.н. – М., МГТУ МАМИ, 2004. – 163 с.
7. Кийко И.А. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя//ПММ, 2006, т.70, вып.2, с. 344-351.
8. Бодунов Д.М., Бодунов М.А., Коваленко П.В. Задача о течении пластического вещества в фиксированной области, имеющей форму равнобокой трапеции. Инструмент – упругое полупространство. Известия МГТУ «МАМИ», 2007, №2(4), с. 229-239.
9. Коваленко П.В. Течение тонкого слоя пластического материала по грани упруго-деформируемого инструмента, Дис... канд. физ.-мат.н. – М., МГТУ МАМИ, 2009. – 129 с.
10. Бодунов Д.М., Бодунов М.А., Бородин И.В. Течение тонкого слоя пластически анизотропного материала по поверхности упругого полупространства, Известия МГТУ «МАМИ», 2013, №1(6), с. 9-16.