

Продольный изгиб составного стержня с симметричными затяжками

к.т.н. доц. Воронцов А.П.
Тверской государственный технический университет
8 (4822) 52-63-63, kafsm@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача продольного изгиба составного двухветвевго стержня с двумя симметричными затяжками, нагруженного продольной сжимающей и поперечной нагрузками, ветви которого подвергаются предварительному пластическому деформированию как растяжением, так и сжатием. Расчёты были проведены на основе квазистатических уравнений процесса продольного изгиба с учётом влияния усилий предварительного обжатия стержня и пластической тренировки элементов ветвей стержня.

Ключевые слова: продольный изгиб, составной стержень, предварительное пластическое деформирование, упругопластическая тренировка, повышение предельных нагрузок.

Применение составных предварительно напряжённых стержней позволяет существенно повысить предельные полезные нагрузки в сравнении с аналогичными сплошными стержнями при одновременном снижении их материалоемкости. Основы их расчёта разработаны А.Р. Ржаницыным [1, 2]. Однако вопросы исследования процесса потери устойчивости, особенно с учётом предварительного пластического деформирования отдельных элементов и зон распределения упругопластических деформаций, изучены недостаточно.

В развитие [7] рассматривается составной двухветвевой стержень с двумя симметричными затяжками, нагруженный продольной сжимающей и поперечной нагрузками (рисунки 1 и 2), ветви которого подвергаются предварительному пластическому деформированию как растяжением, так и сжатием [4] ($EJ_1 = \infty$).

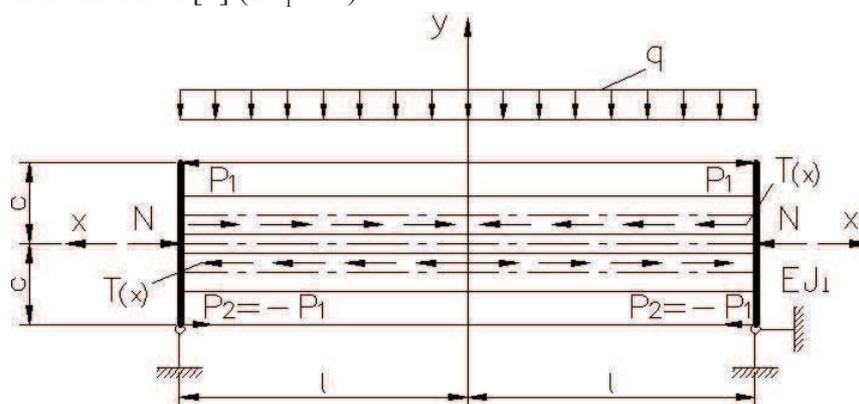


Рисунок 1. Схема неизогнутого составного стержня с симметричными затяжками

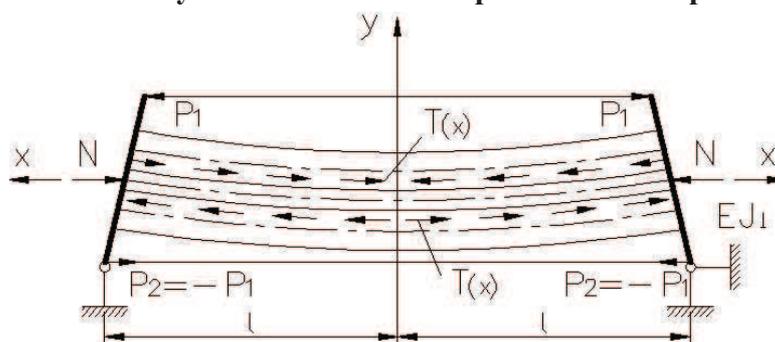


Рисунок 2. Схема изогнутого составного стержня с симметричными затяжками

Будем считать, что каждая ветвь в отдельности подвергается предварительному деформированию противоположного знака до одного уровня напряжений (остаточных деформаций).

Таких уровней было 3: $\beta_1 = \sigma_{01} / \sigma_{sh} = 1,08$; $\beta_2 = 1,19$, $\beta_3 = 1,23$.

Здесь σ_{sh} – предел текучести; σ_{0i} – уровни ($i = 1, 2, 3$) напряжений до которого проводилось предварительное пластическое деформирование ветвей (материал считался циклически идеальным).

Расчёты были проведены на основе квазистатических уравнений, в процессе выпучивания сжато-изогнутого стержня [5] с учётом влияния усилий предварительного обжатия стержня (до одного постоянного значения $\beta = 0,4$) и пластической тренировки элементов ветвей стержня.

Основные уравнения процесса в скоростях имеют вид:

$$\dot{\varepsilon}_0 = [A_1 (\dot{M}_0 + \dot{M}_q + \dot{Q}_0 + N \dot{W}) + \dot{N} (A_2 + A_1 W)] / (A_0 A_2 - A_1^2). \quad (1)$$

$$\dot{W}''_{zz} = [A_0 (\dot{M}_0 + \dot{M}_q + \dot{Q}_0 z + N \dot{W}) + \dot{N} (A_1 + A_0 W)] / (A_0 A_2 - A_1^2), \quad (2)$$

где: $\varepsilon_0(t, z)$ – деформация оси, $W(t, z)$ – прогиб; $M_0(t)$, $Q_0(t)$ – реакции связей на конце стержня при $z=0$, \dot{M}_q – изгибающий момент от поперечной нагрузки, t – обобщенное время;

A_n – жесткостные характеристики, вычисляемые для каждого сечения с учетом развития упругопластических зон;

$$A_n = \int_{y_1}^{y_2} E_k(y) b(y) y^n dy \quad (3)$$

$E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ – касательный модуль диаграммы сжатия или растяжения материала.

В (1) и (2) основными неизвестными являются ε_0 , W , N , M_0 , Q_0 , которые связаны через дополнительные соотношения, получаемые из уравнений статики. За меру выпучивания принималось сближение концов стержня:

$$\Delta_t = \int_0^l \varepsilon_0 dz + 0.5 \int_0^l (W'_z)^2 dz. \quad (4)$$

Краевая задача решается методом конечных разностей. Конечноразностное представление производных по z уравнения (2) для внутренних точек принимают вид:

$$C_j = (W_j, Q_0, M_0, F, t) = 0, W'_i = W(t, z), I = 0, 1, 2, \dots, n, J = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

Здесь C_j – квазилинейные формы, содержащие неявно нелинейности в коэффициентах через параметры жесткостей A .

Для получения полной системы (4) добавляются четыре соотношения из геометрических граничных условий, а также соотношения, устанавливающие связь параметров процесса с t .

Граничные условия для произвольного случая закрепления стержня могут быть записаны в виде:

$$D_k [W(t, 0), W'_z, W(t, L), M_0, Q_0, F] = \Omega_k(t). \quad (6)$$

Функция $\Omega_k(t)$ представляет собой линейные или угловые перемещения. Если геометрических граничных условий меньше четырёх, то дополнительно используются уравнения статики. Сводя, пять дополнительных соотношений к дифференциальной форме, получаем полную систему уравнений, которые имеют следующий вид в матричной форме:

$$B \cdot Y = K$$

$$\dot{Y} = (\dot{Y}_m), \quad \dot{Y} = \left\{ \begin{array}{l} W_{m-1}, m = 1, 2, \dots, n+1 \\ M_0, m = n+2 \\ Q_0, m = n+3 \\ F, m = n+4 \end{array} \right\} \quad K = (K^i), K^i = \left\{ \begin{array}{l} 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \Omega_{i-n+1}, i = n, n+1, \dots, n+4 \end{array} \right.$$

где: $V=(V_m)$ – матрицы коэффициентов квазилинейных форм $C_j, D_{i-n+1}, I, m = 1, 2, \dots, n+4$.

Задавая начальные условия, определяемые конфигурацией и состоянием стержня в начальный момент времени, приходим к задаче Коши.

Решение этой задачи проводим по шагам. На первой стадии вычислительного процесса, считаем $t = \bar{N}$, где: \bar{N} – параметр нагрузки, на второй – в закритической стадии производим смену ведущего параметра – $t = f$, где: $f = W\{L/2\}$ – параметр перемещения. Переход ко второй стадии производится при выполнении условия $d\Delta/d\bar{F} \geq \eta$, где: Δ – сближение концов стержня, η – заданный параметр алгоритма.

В расчетах использовано безразмерное представление основных величин:

$$F^* = F/F_s, W^* = W/h, \Delta^* = \Delta/L, \chi^* = \chi L, \\ M^* = M/(F_s L), A_n^* = A_n/(Eb(0)h^{n+1}).$$

Параметр η определялся по результатам численных экспериментов механические свойства материала стержня определялись диаграммой сжатия $\sigma_c - \varepsilon_c$.

На рисунке 3 $\varepsilon_s^e, \sigma_s^e$ – деформация и напряжение, соответствующее пределу упругости материала; σ_s^0 – сжимающие напряжения упругопластической тренировки; ε_0^* – остаточные деформации в материале стержня после предварительного пластического деформирования. Предполагалось, что для материала стержня при циклических нагрузках справедлив принцип Мазинга – пределы упругости при растяжении и сжатии – одинаковы: $|\sigma_s^C| = |\sigma_s^P|$

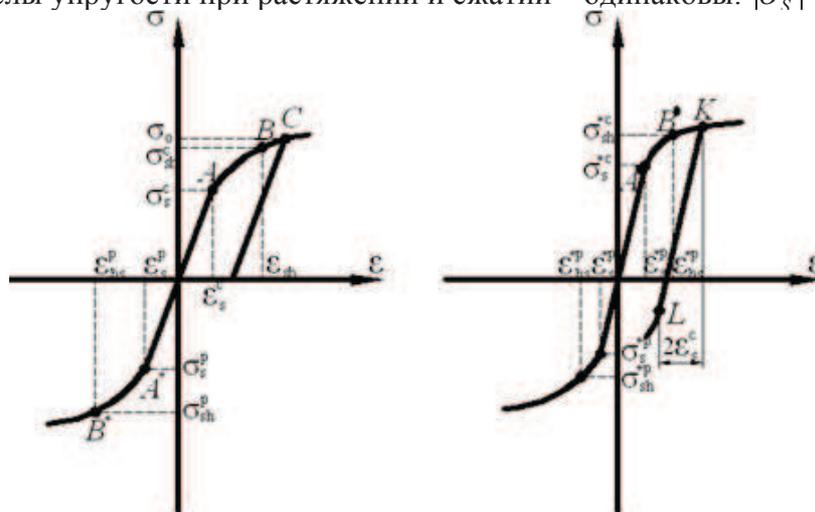


Рисунок 3. Диаграммы сжатия и растяжения материала стержня до и после упругопластического деформирования

Дифференциальное уравнение продольно поперечного предварительно напряжённого шарнирно-опёртого составного стержня, состоящего из двух одинаковых ветвей, имеет вид:

$$W^{IV} + \left(\frac{N}{\sum EJ} - \lambda^2 \right) W'' - \frac{N\lambda^2}{EJ_0} W = \frac{q(\ell^2 - z^2)\lambda^2}{2E_0J_0} - \frac{c \cdot (P_1 - P_2)\lambda^2}{E_0J_0} - \frac{M_n^I}{\sum EJ}. \quad (7)$$

Здесь $c \cdot (P_1 - P_2)$ – величина момента усилий взаимного самоупругивания по торцам стержня с симметричными затяжками.

Расчеты были проведены для стержней из стали Ст. 3 (предел текучести $\sigma = 240$ МПа, гибкости $\lambda = 36,8$, $\sigma_s^0 = 280$ МПа).

Варьировались уровень предварительного пластического деформирования и величина усилий в затяжках.

Установлена зависимость предельных сжимающих нагрузок на стержень в зависимости от степени предварительного пластического деформирования ветвей стержня и уровня усилий в затяжках при фиксированных сдвиговых деформациях в связях.

Вычисления показывают, что при заданном уровне предварительного натяжения в затяжках при отсутствии поперечной нагрузки, тренировка ветвей (растяжением, сжатием) приводит к повышению (24 – 30%) предельных нагрузок в сравнении с нетренированными ветвями. Предварительное пластическое деформирование ветвей растяжением и сжатием с учётом поперечной нагрузки приводило для указанной гибкости стержней (при одинаковом значении σ_s^0) к повышению предельных нагрузок от 20% до 25 % .

Литература

1. Ржаницын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М. Стройиздат, 1948.
2. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М. Гостехиздат. 1955.
3. Воронцов А.П. Устойчивость предварительно напряжённого составного стержня // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: VI Международная научно – техническая конференция (Тула, 30 июня – 2 июля 2005 г.): ТГУ, 2005. С. 7 - 8.
4. Воронцов А.П., Зубчанинов В.Г. Экспериментальные исследования влияния упругопластической тренировки сжатия стержней на их несущую способность // Устойчивость в мех. деформ. тв. тела: Материалы Всесоюзн. симп.- Калинин: КГУ, 1982. – С. 19 - 25.
5. Воронцов А.П., Зубчанинов В., Кульков С.А. Устойчивость внецентренно сжатых стержней, подвергнутых предварительному упругопластическому деформированию // Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твёрдого тела: Материалы III симп. Тверь: ТвПИ, 1993. С. 33 - 41.
6. Воронцов А.П. Исследование устойчивости составного стержня // Современные проблемы пластичности и устойчивости в механике деформируемого твёрдого тела: VI Международный научный симпозиум (Тверь, 1-3 марта 2006 г.): ТГТУ, 2006. С. 17 - 18.
7. Воронцов А.П. Исследование продольного изгиба составного стержня // Вестник Тверского государственного технического университета // Научный журнал. Выпуск 13. Тверь: ТГТУ, 2008. С. 212 - 216.