Вычисление операторов, разрешающих задачи теплопроводности в прямых цилиндрах, с использованием полугрупповой симметрии

к.ф.-м.н. доц. Иванов Д.Ю.
Университет машиностроения
8-916-219-22-64, ivanovdyu@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается экономичный метод вычисления сеточных операторов, разрешающих начально-краевые задачи для однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в цилиндрической области, с нулевыми начальными условиями и граничными условиями на основаниях и неоднородными граничными условиями на боковой поверхности цилиндра. Экономия достигается за счет вычисления операторов в алгебре полиномов, образованных степенями пространственно-временнóго полугруппового оператора, а также разделения вычислений по пространственным переменным вдоль образующей и основания цилиндра. Вдоль всех переменных используется квадратичная аппроксимация. Доказаны сходимость и устойчивость метода, получены порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации по различным переменным.

Ключевые слова: *метод граничных элементов, метод разделения переменных, операторный метод, теплопроводность.*

Введение

В настоящей работе рассматривается операторный метод численного решения начально-краевых задач для однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в цилиндрической области $\Omega \times I_Y$ на конечном временном промежутке $\overline{I}_T$ (здесь $I_T = (0,T]$, $I_Y = (0,Y)$; $\Omega = \Omega^+$ или $\Omega = \Omega^-$, Ω^+ – плоская открытая ограниченная односвязная область, $\Omega^- = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega^+}$, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$). Задачи решаются с нулевыми начальными условиями, неоднородными граничными условия первого или второго рода на боковой поверхности цилиндра и нулевыми граничными условия первого, второго или третьего рода на основаниях цилиндра. Для численного решения таких задач применимы три известных подхода: метод граничных элементов (МГЭ), метод конечных элементов и метод конечных разностей. Для получения сеточного оператора, разрешающего задачу в фиксированной точке цилиндрической области, более предпочтительным с точки зрения экономии вычислений является МГЭ, в рамках которого приходится исключать промежуточные величины только в узлах на поверхности цилиндра, а не в некоторой прилегающей к ней трехмерной области, как в остальных двух методах. Заметим, что использование готовых разрешающих операторов дает ощутимую экономию при получении решения в небольшом количестве точек по сравнению, например, с методом Гаусса, применяемого в рамках МГЭ. Кроме того, наличие готовых разрешающих операторов необходимо для реализации различных методов численного решения обратных граничных задач теплопроводности, например, градиентных [1, с. 150].

Вычисление сеточного оператора, разрешающего трехмерное по пространственным координатам граничное интегральное уравнение (ГИУ) в рамках МГЭ, требует значительных затрат. В работе [2] предложен экономичный метод вычисления операторов, разрешающих рассматриваемые здесь задачи в цилиндре. Экономия достигается благодаря разделению вычислений по переменным $x \in \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ – граница области Ω) и $y \in I_Y$ и проведению вычислений в алгебре полиномов, образованных степенями некоторого полугруппового оператора. При этом коэффициенты полиномов – операторы в пространстве функций, заданных на множестве $\partial\Omega$, тогда как полугрупповой оператор действует в пространстве функций на множестве $I_Y \times I_T$. Численный метод строится на основе аналитического метода, являющегося комбинацией метода ГИУ и метода Фурье [3]. При этом ГИУ являются двумерными в том смысле, что определяемые ими векторные потенциалы заданы на плоском множестве Ω, так что сами ГИУ решаются на его границе $\partial\Omega$. Коэффициенты полиномов получаются при решении соответствующих "плоских" задач на основе МГЭ. Заметим также, что кроме экономичности, преимуществом предложенного в [2] подхода является использование одномерных граничных элементов вместо двумерных. Наконец, полученные разрешающие операторы, имеющие вид полиномов, могут быть использованы для экономичного и устойчивого численного решения обратных граничных задач теплопроводности на основе канонической факторизации таких полиномов [4].

Метод [2] использует простейшую кусочно-постоянную аппроксимацию по параметру полугруппы и вдоль кривой $\partial\Omega$. В настоящей работе исследуется возможность увеличения точности данного метода за счет использования вдоль названных множеств аппрокимаций более высокого порядка, использующих квадратичные функции. Для полученного алгоритма доказаны сходимость и устойчивость, установлены более высокие порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации вдоль параметра полугруппы и кривой $\partial\Omega$, сделан анализ экономичности метода, приведены результаты вычислительных экспериментов по сравнению точностей различных реализаций метода. Поскольку увеличение точности практически не влечет увеличения объема вычислений, в заключение работы сделан вывод о предпочтительности предлагаемой здесь реализации метода по сравнению с описанной в работе [2].

1. Постановка задачи и ее аналитическое решение на основе векторных потенциалов

Пусть $\partial\Omega$ – кривая класса C^2. Рассмотрим четыре краевые задачи ($i=1,2$):

$$a^2\Delta\mathbf{u}_i^{\pm} = B\,\mathbf{u}_i^{\pm}\ (x\in\Omega^{\pm}),\ \mathbf{u}_1^{\pm}\big|_{x\in\partial\Omega} = \mathbf{w}_1^{\pm},\ \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}_2^{\pm}\big|_{x\in\partial\Omega} = \mathbf{w}_2^{\pm}, \tag{1.1}$$

где: $\mathbf{u}_i^{\pm}=\mathbf{u}_i^{\pm}(x)$ и $\mathbf{w}_i^{\pm}=\mathbf{w}_i^{\pm}(x)$ ($i=1,2$) – векторные функции со значениями в пространстве $L_2 = L_2(I_Y\times I_T)$, заданные на множествах Ω и $\partial\Omega$, соответственно (все вводимые здесь пространства функций считаем комплексными); $\mathbf{n}$ – нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке x, направленная внутрь области Ω^+; $\Delta = \partial^2_{x_1x_1}+\partial^2_{x_2x_2}$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений); $a>0$ – коэффициент температуропроводности. Замкнутый оператор B определен в пространстве L_2 на множестве $D(B_t)\cap D(B_y)$ как $B = B_t + B_y + p$.

Здесь B_t – замкнутый оператор в $L_2(I_T)$: $\left(B_t\,\mathbf{f}\right)(t) = f'(t)$, заданный на абсолютно непрерывных на $\bar{I}_T$ функциях $f(t)\in L_2(I_T)$ таких, что $f(0)=0$; B_y – замкнутый оператор в $L_2(I_Y)$: $\left(B_y\,\mathbf{f}\right)(y) = -a^2 f''(y)$, заданный на абсолютно непрерывно дифференцируемых на $\bar{I}_Y$ функциях $f(y)\in L_2(I_Y)$ таких, что $f'(0)-h_0 f(0) = f'(Y)+h_Y f(Y) = 0$ $(0\le h_0, h_Y\le\infty)$; $p+\mu_1>0$, где μ_1 – наименьшее собственное значение оператора B_y. Заметим, что в настоящей работе рассматриваются только линейные пространства и операторы.

В работе [3] доказана однозначная разрешимость задач (1.1) в классе $C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ при любых $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C(\partial\Omega)$ ($C(\Omega')$ и $C^m(\Omega')$ – пространства непрерывных и m раз непрерывно дифференцируемых векторных функций со значениями в L_2). Решения имеют вид векторных потенциалов — криволинейных интегралов первого рода:

$$\mathbf{u}_1^{\pm}(x) = G_1(x)\mathbf{v}_1^{\pm} = \int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}_1}K(r)\,\mathbf{v}_1^{\pm}(x')\,ds',\ \mathbf{u}_2^{\pm}(x) = G_2(x)\mathbf{v}_1^{\pm} = \int_{\partial\Omega}K(r)\,\mathbf{v}_2^{\pm}(x')\,ds',\ (x\in\Omega), \tag{1.2a}$$

где функция $\mathbf{v}_i^{\pm}(x)$ находится из соответствующего ГИУ:

$$G_i^{\pm}\,\mathbf{v}_i^{\pm}=\mathbf{w}_i^{\pm}\,, \tag{1.2b}$$

$$G_i^{\pm}=\mp(-1)^i\,2^{-1}+G_i\,,\ \left(G_i\,\mathbf{f}\right)(x)=\int\limits_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}_i}K(r)\,\mathbf{f}(x')\,ds'\ \ (x\in\partial\Omega). \tag{1.2c}$$

Для уравнений (1.2b) доказана устойчивая однозначная разрешимость в пространстве $L_2^{\times}=L_2(\partial\Omega\times I_Y\times I_T)$ для любой правой части (см. теорему 11 [3]). Здесь $r=|x-x'|$, $\mathbf{v}_i^{\pm}(x)$ – векторная функция со значениями в L_2, определенная на $\partial\Omega$; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2=\mathbf{n}$ – нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящие через точки x' и x, соответственно, и направленные внутрь области Ω^+; дифференцирование $\partial_{\mathbf{n}_1}$ и $\partial_{\mathbf{n}_2}$ осуществляется по точкам x' и x, соответственно; $K(r)$ ($r>0$) – ограниченные операторы в пространстве L_2, определяемые равенствами:

$$K(r)\mathbf{f}=\int\limits_{I_T}a(r,\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau\quad(\mathbf{f}\in L_2),$$

где: $a(r,\tau)=\left(4\pi\tau\right)^{-1}\exp\left[-r^2\big/\left(4a^2\tau\right)\right]$, $U(\tau)=U_t(\tau)U_y^p(\tau)$, $U_y^p(\tau)=e^{-p\tau}\,U_y(\tau)$.

Операторы $U_t(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, порождаемую оператором B_t: $(U_t(\tau)\mathbf{f})(t)=f(t-\tau)$ при $\tau<t$. Операторы $U_y(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, порождаемую оператором B_y

$$(U_y(\tau)\mathbf{f})(y)=\int\limits_{I_Y}h(y,y',\tau)\,f(y')\,dy'\ \ (\mathbf{f}\in L_2(I_Y)\,,\ \tau>0), \tag{1.3}$$

где: $h(y,y',\tau)=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(y)\,\psi_j(y')\exp\left(-\mu_j\tau\right)$, при этом μ_j – собственные значения оператора B_y ($0\le\mu_1<\mu_2<\ldots$, $\mu_1=0$ лишь при $h_0=h_Y=0$), $\psi_j(y)$ – соответствующие собственные функции, нормированные в $L_2(I_Y)$.

Заметим, что $\left\|U_t(\tau)\right\|=1$ при $\tau<T$, $U_t(\tau)=0$ при $\tau\ge T$ и $\left\|U_y(\tau)\right\|\le\exp\left(-\mu_1\tau\right)$. Поэтому $\left\|U(\tau)\right\|\le\exp\left[-\left(p+\mu_1\right)\tau\right]\le1$, $U(\tau)=0$ при $\tau\ge T$. Таким образом, все рассматриваемые C_0-полугруппы сжимающие, а $U_t(\tau)$ и $U(\tau)$ – нильпотентные.

Наряду с задачами в прямом цилиндре $\Omega\times I_Y$ здесь рассматриваются и соответствующие “плоские” задачи в области Ω. Последние допускают аналогичную формулировку на основании уравнений (1.1), где $B=B_t+p$ ($p>0$) — операторы в пространстве $L_2=L_2(I_T)$, обладающие сходными свойствами с операторами $B=B_t+B_y+p$ ($p>-\mu_1$). Решения “плоских” задач также однозначно определяются равенствами (1.2) в соответствующих пространствах, при этом полугруппу $U_t(\tau)U_y^p(\tau)$ заменяем на полугруппу $e^{-p\tau}\,U_t(\tau)$, также сжимающую и нильпотентную. Вследствие этого основные результаты, полученные ниже (теоремы 1 – 6, следствия 1 – 3), справедливы для задач (1.1) как в цилиндре, так и в плоской области.

Введем в пространстве $C(\partial\Omega)$ норму: $\left\|\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}=\max\limits_{x\in\partial\Omega}\left\|\mathbf{f}(x)\right\|_{L_2}$, что делает это пространство банаховым. Условимся оператор A, отображающий банахово пространство B в банахово пространство C, обозначать как A ($B\to C$). Обозначим через $C_k^B(\partial\Omega)$ ($k=1,2,\ldots$) банаховы пространства, состоящие из элементов $\mathbf{f}\in C(\partial\Omega)$, таких, что $\mathbf{f}(x)\in D(B^l)$ при $x\in\partial\Omega$ и $B^l\mathbf{f}\in C(\partial\Omega)$ ($l=\overline{1,k}$), с нормой $\left\|\mathbf{f}\right\|_{C_k^B(\partial\Omega)}=\sum_{l=0}^{k}\left\|B^l\,\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}$. Будем считать, что $C_0^B(\partial\Omega)=C(\partial\Omega)$. В работе [2] доказана теорема:

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega\in C^2$. Тогда операторы $G_i^{\pm}$ ($C_k^B(\partial\Omega)\to C_k^B(\partial\Omega)$) ($k=0,1,\ldots$) ограниченно обратимы.

Далее введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, где s – длина дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки в определенном направлении и заканчивающейся в точке $x = \left(x_1, x_2\right)$. Функции $x_1(s)$, $x_2(s)$ периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$) осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S = \left(-S, S\right]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся обозначать через s и s' значения параметра, соответствующие точкам x и x'.

Обозначим через $C^k(\partial\Omega)$ ($k = 1, 2, \ldots$) банаховы пространства, состоящие из функций $\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)$, имеющих равномерные на множестве $\partial\Omega$ производные $\mathbf{f}^{(l)}$: $\left(\mathbf{f}^{(l)}\right)\left(x(s)\right) = d^l \mathbf{f}\left(x(s)\right) / ds^l$ ($l = \overline{1, k}$), с нормой $\|\mathbf{f}\|_{C^k(\partial\Omega)} = \sum_{l=0}^{k} \left\|\mathbf{f}^{(l)}\right\|_{C(\partial\Omega)}$. Будем считать, что $C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$.

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $G_i^{\pm}$ ($C^k(\partial\Omega) \to C^k(\partial\Omega)$) ограниченно обратимы ($k = 1, 2, \ldots$).

Согласно теоремам 1 и 2 уравнения (1.2a) устойчиво однозначно разрешимы в банаховых пространствах $C_{l,n}^B(\partial\Omega) = C^l(\partial\Omega) \cap C_n^B(\partial\Omega)$ с нормой $\|\boldsymbol{f}\|_{C_{l,n}^B(\partial\Omega)} = \|\boldsymbol{f}\|_{C^l(\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{f}\|_{C_n^B(\partial\Omega)}$ при любых $l, n = 0, 1, \ldots$.

2. Построение и обоснование вычислительного алгоритма, оценка его эффективности

Так как $\partial\Omega$ – кривая класса C^2, то она не имеет точек самопересечения, а функции $\tilde{f}_i(s, s') = \partial_{\mathbf{n}_i} \ln r^{-1}$ могут быть доопределены при $s = s'$ до непрерывных на множестве $\overline{I}_S \times \overline{I}_S$. На основании этого получаем при $\sigma \in I_S^0 = I_S \setminus \{0\}$ ($\sigma = s' - s$) и $\tau > 0$ оценки:

$$\left|\partial_{\mathbf{n}_i} a(r, \tau)\right| \le c_1 \left(\sigma/\tau\right)^2 \exp\left[-c_2^2 \lambda \Big/ \left(4a^2\right)\right], \tag{2.1}$$

где: $\lambda = \sigma^2/\tau$, $c_1 = \left(8\pi a^2\right)^{-1} \max\limits_{(s,s') \in I_S^0 \times I_S^0} \left|\tilde{f}_i(s, s')\right|$, $c_2 = \min\limits_{\sigma \in I_S^0} \left(r/|\sigma|\right)$.

С учетом оценок (2.1) операторы G_i могут быть представлены в виде:

$$G_i \mathbf{f} = \int\limits_{I_T} A_i(\tau) U(\tau) \mathbf{f}\, d\tau \quad (\mathbf{f} \in C(\partial\Omega)),$$

где: $A_i(\tau)$ ($\tau > 0$) – ограниченные операторы ($C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$):

$$\left(A_i(\tau)\mathbf{f}\right)\left(x\right) = \int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}_i} a(r, \tau) \mathbf{f}(x')\, ds' \quad (\mathbf{f} \in C(\partial\Omega),\ x \in \partial\Omega).$$

При $\tau > 0$ функции $A_i(\tau)$ непрерывны в равномерной операторной топологии, причем справедливы оценки:

$$\left\|A_i(\tau)\right\| \le \tilde{c}\, \tau^{-1/2}, \ \tilde{c} = c_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 \exp\left[-c_2^2 \gamma^2 \Big/ \left(4a^2\right)\right] d\gamma\,. \tag{2.2}$$

Пусть $N/2 \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Введем в рассмотрение операторы $\tilde{G}_i$ ($C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$):

$$\tilde{G}_i = \int\limits_{I_T} A_i(\tau) \tilde{U}(\tau) \mathbf{f}\, d\tau = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{G}_{i,n} U(\tau_n) \mathbf{f} \quad (\tau_n = n\, h_\tau,\, h_\tau = T/N),$$

где: $\tilde{U}_N(\tau)$ – квадратичная функция на каждом интервале $\left[\tau_n, \tau_{n+2}\right]$: $\tilde{U}_N(\tau_{n+j}) = U(\tau_{n+j})$ ($n = \overline{0, N/2 - 1}$, $j = \overline{0, 2}$).

Операторы $\tilde{G}_i$ ограничены в силу оценок (2.2) и $\left\|\tilde{U}_N(\tau)\right\| \le 3$. При условии $\mathbf{f} \in C_3^B(\partial\Omega)$ имеет место оценка:

$$\left\|\tilde{U}_N(\tau)\mathbf{f} - U(\tau)\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le 2^{-1}\left\|B^3\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau^3 . \tag{2.3}$$

На основании оценок (2.2) и (2.2) получаем оценку:

$$\left\|\tilde{G}_i\,\mathbf{f} - G_i\,\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le \tilde{c}\sqrt{T}\left\|B^3\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau^3 ,$$

из которой вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Операторы $\tilde{G}_i$ ($C_3^B(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) сходятся при $N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам G_i ($C_2^B(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3\right)$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Разобьем кривую $\partial\Omega$ на дуги $\Gamma_l = \left[s_l, s_{l+1}\right]$ ($s_l = l\,h_s$, $h_s = 2S/L$, $l = \overline{0, L-1}$, $L \in \mathbf{N}$). Введем в рассмотрение пространства V_L сеточных функций $\mathbf{f}^L$ со значениями $\mathbf{f}_l$ в пространстве L_2, заданных в узлах s_l. Определим в V_L норму: $\left\|\mathbf{f}^L\right\|_{V_L} = \max\limits_{1\le l\le L}\left\|\mathbf{f}_l\right\|_{L_2}$, и зададим проекционные операторы P_L ($C(\partial\Omega) \to V_L$): $\mathbf{f}_L = P_L\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_l = \mathbf{f}(s_l)$, причем на каждом промежутке $[s_{2l}, s_{2l+2}]$ ($l = \overline{0, L/2-1}$) функции $\mathbf{f}_L(s)$ описываются квадратными трехчленами. Очевидно, что $\left\|P_L\right\| \le 3$.

Введем в пространстве V_L ограниченные операторы $\breve{G}_i$ ($V_L \to V_L$):

$$\breve{G}_i\mathbf{f}_L = \int\limits_{I_T} A_i(\tau)\tilde{U}_N(\tau)\,P_L\,\mathbf{f}\,d\tau = \sum_{n=0}^{N-1}\breve{G}_{i,n}\,U(\tau_n)\,\mathbf{f}_L .$$

Заметим, что операторы $\breve{G}_{i,n}$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка L.

При $\sigma \in I_S^0$ справедливы оценки:

$$\int\limits_0^T\left|\partial_{\mathbf{n}_i} a(r,\tau)\right| d\tau \le \breve{c}\,,\ \breve{c} = c_1\int\limits_0^\infty \exp\left[-\tilde{c}^2\lambda\big/\left(4a^2\right)\right] d\lambda\,, \tag{2.4}$$

а при $\mathbf{f} \in C^3(\partial\Omega)$ имеют место оценки:

$$\left\|P_L\mathbf{f} - \mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le 2^{-1}\left\|\mathbf{f}^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 . \tag{2.5}$$

Определение 1. Пусть A_L – ограниченные операторы в соответствующих пространствах V_L. Будем говорить, что операторы A_L сходятся при $L \to \infty$ к ограниченному оператору A ($C^k(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) по операторной норме, если $\left\|A_L P_L\mathbf{f} - P_L A\mathbf{f}\right\|_{V_L} \to 0$ при $L \to \infty$ равномерно в шаре $\left\|\mathbf{f}\right\|_{C^k(\partial\Omega)} \le 1$.

На основании оценок (2.4), (2.5) и $\left\|\tilde{U}_N(\tau)\right\| \le 3$ получаем оценку:

$$\left\|\tilde{G}_i\,\mathbf{f} - \breve{G}_i\,\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)} \le S\,\breve{c}\left\|\mathbf{f}^{(3)}\right\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 ,$$

из которой вытекает следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\breve{G}_i$ сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}_i$ ($C^3(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) равномерно по N с порядком аппроксимации $O\left(h_s^3\right)$.

Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\breve{G}_i^{\pm} = \mp\left(-1\right)^i 2^{-1} + \breve{G}_i$ и

$\breve{G}_{i,0}^{\pm} = \mp\left(-1\right)^{i} 2^{-1} + \breve{G}_{i,0}$ ($V_L \to V_L$). Поскольку $\left\|\breve{G}_{i,0}\right\| \le 6\,\tilde{c}\sqrt{h_\tau}$, что при условии:

$$12\,\tilde{c}\sqrt{h_\tau} < 1\,, \tag{2.6}$$

в силу теоремы Банаха оператор $\breve{G}_{i,0}^{\pm}$ ограниченно обратим, следовательно, ограниченно обратим оператор $\breve{G}_{i}^{\pm}$ и имеют место равенства:

$$\left(\breve{G}_{i}^{\pm}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \breve{G}_{i,n}^{\pm(-1)} U(\tau_n),\ \breve{G}_{i,0}^{\pm(-1)} = \left(\breve{G}_{i,0}^{\pm}\right)^{-1},\ \breve{G}_{i,n}^{\pm(-1)} = \breve{G}_{i,0}^{\pm(-1)} \sum_{m=1}^{n} \breve{G}_{i,m} \breve{G}_{i,n-m}^{\pm(-1)}\ (n = \overline{1, N-1}). \tag{2.7}$$

Множество значений $N \in \mathbf{N}$, обеспечивающих выполнение условия (2.6), обозначим через $\mathbf{N}'$. Оценка (2.6) аналогична оценке (4.3) в работе [2], поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\left(\breve{G}_{i}^{\pm}\right)^{-1}$ ($L \in \mathbf{N},\ N \in \mathbf{N}'$) ограничены в совокупности.

Определение 2. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_L^{(N)}$ ($V_L \to V_L$) сходятся при $L, N \to \infty$ к ограниченному оператору A ($C_{l,n}^{B}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) по операторной норме, если $\left\|A_L^{(N)} P_L \mathbf{f} - P_L A \mathbf{f}\right\|_{V_L} \to 0$ при $L, N \to \infty$ равномерно в шаре $\|\mathbf{f}\|_{C_{l,n}^{B}(\partial\Omega)} \le 1$.

Из теорем 1 – 5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^5$. Тогда операторы $\left(\breve{G}_{i}^{\pm}\right)^{-1}$ ($N \in \mathbf{N}'$) сходятся при $L, N \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\left(G_{i}^{\pm}\right)^{-1}$ ($C_{3,3}^{B}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

Пусть $x \in \Omega$. Тогда функция $a(r,\tau)$ непрерывна по $(x, x', \tau) \in \Omega \times \partial\Omega \times [0, \infty)$ ($a(r, \tau = 0) = 0$). При фиксированном $x \in \Omega$ введем в рассмотрение ограниченные операторы $G_i(x)$ ($C(\partial\Omega) \to L_2$) ($i = 1, 2$) ($\tau > 0$):

$$G_i(x)\mathbf{f} = \int_{I_T} A_i(x,\tau) U(\tau)\mathbf{f}\, d\tau\,,$$

$$\left(A_1(x,\tau)\mathbf{f}\right)(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}_1} a(r,\tau)\mathbf{f}\left(x'\right) ds'\,,\ \left(A_2(x,\tau)\mathbf{f}\right)(x) = \int_{\partial\Omega} a(r,\tau)\mathbf{f}\left(x'\right) ds'\,.$$

Операторы $G_i(x)$ ($x \in \Omega'$) ограничены в совокупности на любом замкнутом подмножестве $\Omega' \subset \Omega$ в силу непрерывности функции $A_i(x,\tau)$ по $(x,\tau) \in \partial\Omega \times [0,\infty)$ в равномерной операторной топологии ($A_i^{(k)}(x,\tau) = 0$).

Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\tilde{G}_i(x)$ ($C(\partial\Omega) \to L_2$):

$$\tilde{G}_i(x) = \int_{I_T} A_i(x,\tau) \tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau)\mathbf{f}\, d\tau = \sum_{m=0}^{\tilde{N}-1} \tilde{G}_{i,m}(x) U(\tilde{\tau}_m)\,,$$

где: $\tilde{N} = MN$, $M \in \mathbf{N}$, $\tilde{\tau}_m = m\tilde{h}_\tau$, $\tilde{h}_\tau = h_\tau / M$; $\tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau)$ – квадратичная функция на каждом интервале $\left[\tau_m, \tau_{m+2}\right]$: $\tilde{U}_{\tilde{N}}(\tilde{\tau}_{m+j}) = U(\tilde{\tau}_{m+j})$ ($m = \overline{0, \tilde{N}/2 - 1}$, $j = \overline{0,2}$).

Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда интеграл $\int_{\partial\Omega} \left|\partial_{\mathbf{n}_i} \ln r^{-1}\right| ds'$ ограничен в области Ω [5, с. 361]. Пусть $\tilde{c}_1 = \left(8\pi a^2\right)^{-1} \max\limits_{x\in\Omega} \int_{\partial\Omega} \left|\partial_{\mathbf{n}_i} \ln r^{-1}\right| ds'$ и $\tilde{c}_2 = \left(4\pi\right)^{-1} 2S$. При $x \in \Omega$ и $\tau > 0$ справедливы оценки:

$$\left\| A_i(x,\tau) \right\| \le \tilde{c}_i^{\Omega} \tau^{-1}, \text{ где } \tilde{c}_i^{\Omega} = \tilde{c}_i \max_{\lambda \in [0,\infty)} \lambda^{2-i} \exp\left[-\lambda \big/ \left(4a^2 \right) \right].$$

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{G}_i(x)$ ($C_3^B(\partial\Omega) \to L_2$) сходятся при $N \to \infty$ и фиксированном M по операторной норме к соответствующим операторам $G_i(x)$ ($C_3^B(\partial\Omega) \to L_2$) равномерно по $x \in \Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(\tilde{h}_\tau^2\right)$.

Данное утверждение вытекает из следующих оценок:

$$\left\| \int_{h_\tau}^{T} A_i(x,\tau) \left[U(\tau) - \tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau) \right] \mathbf{f}\, d\tau \right\|_{C(\partial\Omega)} \le 2^{-1} \tilde{c}_i^{\Omega} \left\| B^3 \mathbf{f} \right\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau^3 \ln\left(T/h_\tau \right),$$

$$\left\| \int_{0}^{h_\tau} A_i(x,\tau) \left[U(\tau) - \tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau) \right] \mathbf{f}\, d\tau \right\|_{C(\partial\Omega)} \le \tilde{c}_i^{\Omega} \left\| B^3 \mathbf{f} \right\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau^2 .$$

Ко второй оценке приходим в результате следующих выкладок:

$$\left\| U(\tau)\mathbf{f} - \tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau)\mathbf{f} \right\|_{C(\partial\Omega)} \le \left\| 2^{-1} \int_0^\tau U(\tau) B^3 \mathbf{f} (\tau - t)^2 dt + 2^{-1} \left(\tau^2 / h^2 \right) \int_0^h U(\tau) B^3 \mathbf{f} (h-t)^2 dt - \right.$$

$$4^{-1} \left(\tau^2 / h^2 \right) \int_0^{2h} U(\tau) B^3 \mathbf{f} (2h-t)^2 dt - \left(\tau/h \right) \int_0^h U(\tau) B^3 \mathbf{f} (h-t)^2 dt +$$

$$\left. 4^{-1} \left(\tau/h \right) \int_0^{2h} U(\tau) B^3 \mathbf{f} (2h-t)^2 dt \right\|_{C(\partial\Omega)} \le 2 B^3 \mathbf{f}\, \tau\, h_\tau^2 ,$$

осуществленных при условии $\tau \in [0, h_\tau]$.

Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$. Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\breve{G}_i(x)$ ($V_L \to L_2$):

$$\breve{G}_i(x)\mathbf{f}_L = \int_{I_T} A_i(x,\tau) \tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau) P_L \mathbf{f}\, d\tau = \sum_{m=0}^{\tilde{N}-1} \breve{G}_{i,m}(x) U(\tilde{\tau}_m) \mathbf{f}_L .$$

Заметим, что операторы $\breve{G}_{i,m}(x)$ суть скалярные матрицы размерности $1 \times L$.

Далее, пусть $\partial\Omega_d$ – кривая в области Ω, параллельная границе $\partial\Omega$ и находящаяся от нее на расстоянии d [5, с. 263]. Область между $\partial\Omega_d$ и $\partial\Omega$ обозначим через Ω'_d, а через Ω''_d обозначим ее дополнение в области Ω. Если $x \in \partial\Omega''_d$, то $r \ge d$. Если $x \in \Omega'_d$, то $r \ge 2^{-1} r_0 \ge 2^{-1} \tilde{c} |\sigma_0|$, при этом $r_0 = |x' - x_0|$, $\sigma_0 = s' - s_0$. Здесь $x_0 \in \partial\Omega$ – основание перпендикуляра, опущенного из x на $\partial\Omega$; s_0 – значение параметра s, соответствующее точке x_0. Имеем следующие оценки:

$$\int_{\partial\Omega} \int_0^T |a(r,\tau)| d\tau ds' \le (4\pi)^{-1} \max_{\lambda \in [0,\infty)} \left\{ \lambda^{1/4} \exp\left[-\lambda \big/ \left(4a^2 \right) \right] \right\} \int_{-S}^{S} d\sigma \Big/ \sqrt{2^{-1} \tilde{c} |\sigma|} \int_0^T \tau^{-3/4} d\tau \quad (x \in \Omega'_d),$$

$$\int_{\partial\Omega} \int_0^T |a(r,\tau)| d\tau ds' \le \tilde{c}_2 \max_{\tau \in (0,\infty)} \tau^{-1} \exp\left[-d^2 \big/ \left(4a^2 \tau \right) \right] \quad (x \in \Omega''_d),$$

$$\int_{\partial\Omega} \int_0^T \left| \partial_{\mathbf{n}_1} a(r,\tau) \right| d\tau ds' \le \tilde{c}_1 \max_{\lambda \in [0,\infty)} \lambda \exp\left[-\lambda \big/ \left(4a^2 \right) \right] \quad (x \in \Omega). \tag{2.8}$$

По аналогии с определением 1 будем понимать сходимость по операторной норме ограниченных операторов $A_L(x)$ ($V_L \to L_2$) к соответствующим ограниченным операторам $A(x)$ ($C^k(\partial\Omega) \to L_2$). На основании оценок (2.5), (2.8) и $\left\| \tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau) \right\| \le 3$ получаем следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\breve{G}_i(x)$ сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}_i(x)$ ($C^3(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$) равномерно по N и $x \in \Omega$ (M фиксировано) с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

Введем обозначения: $R_i^{\pm}(x) = G_i(x)\left(G_i^{\pm}\right)^{-1}$, $\breve{R}_i^{\pm}(x) = \breve{G}_i(x)\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$. По аналогии с определением 2 будем понимать сходимость по операторной норме ограниченных операторов $A_L^{(N)}(x)$ ($V_L \to L_2$) к соответствующим ограниченным операторам $A(x)$ ($C_{l,n}^B(\partial\Omega) \to L_2$) при $L, N \to \infty$.

В силу оценок (2.8), $\left\|\tilde{U}_{\tilde{N}}(\tau)\right\| \le 3$ и $\left\|P_L\right\| \le 3$ операторы $\breve{G}_i(x)$ ($L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}'$, $x \in \Omega$) при фиксированном M ограничены в сокупности. Поэтому на основании теорем 6, 7 и следствия 1 делаем вывод о равномерной сходимости операторов $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ в области Ω.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^5$. Тогда операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ ($N \in \mathbf{N}'$) сходятся при $L, N \to \infty$ и фиксированном M по операторной норме к соответствующим операторам $R_i^{\pm}(x)$ ($C_{3,3}^B(\partial\Omega) \to L_2$) равномерно по $x \in \Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^2 + h_s^3\right)$.

Операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ имеют вид:

$$\breve{R}_i(x) = \sum_{m=0}^{\tilde{N}-1} \breve{R}_{i,m}(x) U(\tilde{\tau}_m),$$

где: $\breve{R}_{i,m}(x)$ – матрицы размерности $1 \times L$, вычисляемые с помощью уравнений:

$$\breve{R}_{i,nM+m}(x) = \sum_{k=0}^{n} \breve{G}_{i,(n-k)M+m}(x) \breve{G}_{i,k}^{\pm(-1)} \quad (k = \overline{0, N-1},\ m = \overline{0, M-1}). \tag{2.9}$$

При вычислении матриц $\breve{G}_{i,n}$, $\breve{G}_{i,m}(x)$ интегрирование по τ осуществляется точно, а по s' с помощью элементарных формул Гаусса с четным количеством узлов.

Учитывая ограниченность в совокупности операторов $G_i(x)$ ($x \in \Omega'$) на любом замкнутом подмножестве $\Omega' \subset \Omega$ несложно получить следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^5$ и $\Omega' \subset \Omega$ – замкнутое подмножество. Тогда операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ ($N \in \mathbf{N}'$) сходятся при $L, N \to \infty$ и фиксированном M по операторной норме к соответствующим операторам $R_i^{\pm}(x)$ ($C_{3,3}^B(\partial\Omega) \to L_2$) равномерно по $x \in \Omega'$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3 + h_s^3\right)$.

В силу следствий 2 и 3 точность решения задачи (1.1), полученного с помощью оператора $\breve{R}_i^{\pm}(x)$, может снижаться при приближении к границе области $\partial\Omega$. С этой целью введен параметр M, который позволяет в силу тех же утверждений скомпенсировать уменьшение точности вычисления при приближении точки x к границе $\partial\Omega$, не увеличивая объема вычислений, необходимых для получения оператора $\breve{G}_i(x)$ (последнее обстоятельство более подробно обсуждается в конце параграфа).

Операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ являются дискретными лишь по координатной переменной s. Для завершения построения вычислительного алгоритма остается осуществить их дискретизацию по координатным переменным t и y в случае $B = B_t + B_y + p$ или только по t в случае $B = B_t + p$.

Рассмотрим вначале случай $B = B_t + B_y + p$, $L_2 = L_2(I_Y \times I_T)$. Введем в рассмотрение пространства $C^{m,n}$ ($m,n=0,1,...$), состоящие из функций $f(x,y,t)$, имеющих непрерывные на множестве $\partial\Omega\times\overline{I}_Y\times\overline{I}_T$ производные $\partial_y^j f(x,y,t)$ ($j=\overline{0,m}$) и $\partial_t^k f(x,y,t)$ ($k=\overline{0,n}$). В пространстве $C^{0,0}$ введем норму: $\|\mathbf{f}\|_{C^{0,0}}=\max\limits_{(x,y,t)\in\partial\Omega\times I_Y\times I_T}|f(x,y,t)|$, и будем считать, что $C^{0,0}\subset C(\partial\Omega)$.

Пусть $y_j=jh_y$ ($h_y=Y/J$, $j=\overline{0,J}$, $J/2\in\mathbf{N}$). В пространстве $C^{0,0}$ определим проекционные операторы P_J: $\mathbf{f}_J=P_J\mathbf{f}$, при этом $f_J(x,y_j,t)=f(x,y_j,t)$, и на каждом промежутке $[y_{2j},y_{2j+2}]$ ($j=\overline{0,J/2-1}$) функции $f_J(x,y,t)$ при фиксированных (x,t) описываются квадратными трехчленами. Кроме того, пусть $t_n=\tau_n=n\,h_t$ ($h_t=h_\tau$, $n=\overline{0,N}$, $N/2\in\mathbf{N}$). Аналогично с помощью кусочно-квадратичной интерполяции вдоль переменной t определим в пространстве $C^{0,0}$ операторы P_N: $\mathbf{f}_N=P_N\mathbf{f}$ ($f_N(x,y,t_n)=f(x,y,t_n)$). Операторы P_J и P_N ограничены: $\|P_J\|\le 3$, $\|P_N\|\le 3$. Если $\mathbf{f}\in C^{3,3}$, то имеют место оценки:

$$\|P_J P_N\mathbf{f}-\mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)}\le(3/2)\sqrt{YT}\left(\left\|\partial_y^3 f(x,y,t)\right\|_{C^{0,0}}h_y^3+\left\|\partial_t^3 f(x,y,t)\right\|_{C^{0,0}}h_\tau^3\right). \tag{2.10}$$

При фиксированном $M\in\mathbf{N}$ операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ ($L\in\mathbf{N}$, $N\in\mathbf{N}'$, $x\in\Omega$) ограничены в совокупности в силу такой же ограниченности операторов $\breve{G}_i(x)$ ($L,N\in\mathbf{N}$, $x\in\Omega$) и $\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ ($L\in\mathbf{N}$, $N\in\mathbf{N}'$, $x\in\Omega$). Операторы P_L, P_J, P_N ($L,J,N\in\mathbf{N}$) также ограничены в совокупности. Поэтому на основании следствий 2, 3 и оценки (2.10) имеем следующее утверждение.

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega\in C^5$ и $\Omega'\subset\Omega$ – замкнутое подмножество. Если $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C_{3,3}^B(\partial\Omega)\cap C^{3,3}$, то функции $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)=\breve{R}_i^{\pm}(x)P_L P_J P_N\mathbf{w}_i^{\pm}$ ($N\in\mathbf{N}'$) сходятся при $L,J,N\to\infty$ и фиксированном M к решению задачи (1.1) в норме пространства L_2 равномерно по $x\in\Omega'$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3+h_s^3+h_y^3+h_t^3\right)$ и равномерно по $x\in\Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^2+h_s^3+h_y^3+h_t^3\right)$. Если же $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C^{0,0}$, то существует число $c>0$, не зависящее от $L,J\in\mathbf{N}$ и $N\in\mathbf{N}'$, такое, что $\max\limits_{x\in\Omega}\left\|\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)\right\|_{L_2}\le c\left\|\mathbf{w}_i^{\pm}\right\|_{C^{0,0}}$.

Для сравнения: аналогичные функции $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)$, полученные в работе [2], сходятся равномерно по $x\in\Omega'$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^{3/2}+h_s^2\ln h_s+h_y^3+h_t^3\right)$ и равномерно по $x\in\Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau+h_s+h_y^3+h_t^3\right)$.

Интегральные выражения (1.3) позволяют вычислить полугрупповые операторы $T_y(\tau)$ ($\tau>0$) на интерполянтах $P_J\mathbf{f}$ в виде конечных сумм:

$$\left(T_y(\tau)P_J\mathbf{f}\right)(x,y,t)=\sum_{j=0}^{J}\eta_j(\tau,y)f(x,y_j,t), \tag{2.11}$$

причем значения функций $\eta_j(\tau,y)$ вычисляются точно. Действие тождественного оператора $T_y(0)$ на интерполянтах также описывается равенствами (2.11), где $\eta_{2j+k}(\tau,y)=\varphi_k((y-y_{2j})/h_y)$, при этом $y\in[y_{2j},y_{2j+2}]$, $j=\overline{0,J/2-1}$,

$$\varphi_k(x)=\prod_{k'=0,2(k'\ne k)}\left(x-k'\right)\Big/\prod_{k'=0,2(k'\ne k)}\left(k-k'\right)\ (x\in[0,2]),\ k=\overline{0,2}.$$

Окончательно равенство $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)=\breve{R}_i^{\pm}(x)P_L P_J P_K\mathbf{w}_i^{\pm}$ может быть записано в следующем скалярном виде:

$$\breve{u}_i^{\pm}(x,t,y)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=0}^{J}\sum_{n=0}^{N_t+2}\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)\,w_i^{\pm}(x_l,y_j,t_{N_t+2-n})\,. \tag{2.12a}$$

Здесь $N_t/2$ – целая часть дроби $t/(2h_t)$; коэффициенты $\theta_{i,l,j,k}^{\pm}(x,y,t)$ вычисляются с помощью формул:

$$\theta_{i,l,j,0}^{\pm}(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\tilde{N}_{t0}}\mu_{i,l,j,m}^{\pm}(x,y)\,\varphi_2\left((t-\tilde{\tau}_m-t_{N_t})/h_t\right),$$

$$\theta_{i,l,j,2n+1}^{\pm}(x,y,t)=\sum_{m=K_n}^{K_{n+1}-1}\mu_{i,l,j,m}^{\pm}(x,y)\,\varphi_1\left((t-\tilde{\tau}_m-t_{N_t-2n})/h_t\right)\ \ (n=\overline{0,N_t/2}),$$

$$\theta_{i,l,j,2n}^{\pm}(x,y,t)=\sum_{k=0,1}\sum_{m=K_{n-k}}^{K_{n+1-k}-1}\mu_{i,l,j,m}^{\pm}(x,y)\,\varphi_{2-2k}\left((t-\tilde{\tau}_m-t_{N_t-2(n-k)})/h_t\right)\ \ (n=\overline{1,N_t/2}),$$

$$\theta_{i,l,j,N_t+2}^{\pm}(x,y,t)=\sum_{m=\tilde{N}_t-2M+1}^{\tilde{N}_t}\mu_{i,l,j,m}^{\pm}(x,y)\,\varphi_0\left((t-\tilde{\tau}_m)/h_t\right). \tag{2.12b}$$

В свою очередь, здесь $\mu_{i,l,j,m}^{\pm}(x,y)=\breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x)e^{-p\tilde{\tau}_m}\eta_j(\tilde{\tau}_m,y)$, где $\breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x)$ – элементы матриц $\breve{C}_{i,m}^{\pm}(x)$; $\tilde{N}_t$ – целая часть дроби $t/\tilde{h}_\tau$, $\tilde{N}_{t0}=\tilde{N}_t-MN_t$; $K_n=2M(n-1)+\tilde{N}_{t0}+1$ ($n=\overline{1,N_t/2+1}$), $K_0=0$.

Заметим, что увеличение параметра M не приводит к измельчению временнóй сетки, а лишь к увеличению объема вычислений разрешающего оператора, определяемого коэффициентами $\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)$. Заметим также, что хотя в данной реализации шаг по времени h_t совпадает с шагом по параметру полугруппы h_τ (но не совпадает с $\tilde{h}_\tau$!), но ничто не мешает сделать его не зависящим от h_τ. Если, например, $h_t/h_\tau=M_1\in\mathbf{N}$ и $h_\tau/\tilde{h}_\tau=M_2\in\mathbf{N}$, то будут иметь место формулы (2.12), где $M=M_1M_2$.

Итак, формула (2.12a) позволяет вычислить приближенное решение $\breve{u}_i^{\pm}(x,t,y)$ задачи (1.1) в цилиндре в любой точке $(x,y,t)\in\Omega\times I_Y\times I_T$. При наличии готовых коэффициентов $\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)$ для этого требуется $\approx LJN$ умножений и делений (УД). Коэффициенты $\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)$ вычисляются с помощью коэффициентов $\breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x)$ и $\eta_j(\tau_m,y)$, которые получаем независимо друг от друга, при этом основные затраты $O(L^3N^2)$ УД приходятся на вычисление элементов обратной матрицы $\breve{G}_{i,n}^{\pm(-1)}$ по формуле (2.7), т.е. получение сеточного оператора, разрешающего двумерное ГИУ. Так, например, непосредственно на вычисление $\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)$ по формулам (2.12b) требуется $O(LJN)$ УД, на $\breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x)$ по формулам (2.9) – $O(L^2N^2M)$ УД. Если решение $\breve{u}_i^{\pm}(x,t,y)$ получаем при L_0, J_0, N_0 значениях переменных x, y, t, соответственно, то затраты на вычисление $\breve{G}_{i,n}^{\pm(-1)}$ остаются прежними, тогда как, например, объем вычислений для $\breve{u}_i^{\pm}(x,t,y)$ и $\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)$ возрастает в $L_0J_0N_0$ раз, для $\breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x)$ – в L_0 раз.

Таким образом, в рамках данной задачи используется возможность разделения вычислений по переменным x и y. Это позволяет значительно сократить расходы на получение разрешающих ее сеточных операторов, которые, в свою очередь, обеспечивают выигрыш при получении решения в случае $L_0J_0N_0<<LJN$. Действительно, если не использовать раз-

деления переменных x и y, то для нахождения сеточного оператора, разрешающего трехмерное ГИУ на полной поверхности цилиндра $\partial\Omega\times Y$ и равномерной временнóй сетке, требуется $O(L^3J^3N^2)$ УД. Если же решать трехмерное ГИУ методом Гаусса, то каждый раз при изменении значений граничной функции $w_i^{\pm}(x,y,t)$ необходимо $O(L^2J^2N^2)$ УД, поэтому при условии $L_0J_0N_0 << LJN$ использование готовых разрешающих операторов более эффективно.

Реализации схем, описанных в работе [2] и в настоящей статье, отличаются лишь на этапе вычислений матриц $\breve{G}_{i,n}$, $\breve{G}_{i,m}(x)$, требующих, соответственно, $O(L^2N)$, $O(LNM)$ УД. Поскольку $L^2N << L^3N^2$ и $LNM << L^3N^2$, то можно считать, что в целом объем вычислений в обоих случаях одинаков.

В случае $B = B_t + p$, $L_2 = L_2(I_T)$ по аналогии получаем утверждение:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega\in C^5$. Если $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C_{3,3}^{B}(\partial\Omega)\cap C^3$, то функции $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)=\breve{R}_i^{\pm}(x)P_LP_N\mathbf{w}_i^{\pm}$ ($N\in\mathbf{N}'$) сходятся при $L,N\to\infty$ и фиксированном M к решению задачи (1.1) в норме пространства L_2 равномерно по $x\in\Omega'$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^3+h_s^3+h_t^3\right)$ и равномерно по $x\in\Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^2+h_s^3+h_t^3\right)$. Если же $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C^0$, то существует число $c>0$, не зависящее от $L\in\mathbf{N}$ и $N\in\mathbf{N}'$, такое, что $\max\limits_{x\in\Omega}\left\|\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)\right\|_{L_2}\le c\left\|\mathbf{w}_i^{\pm}\right\|_{C^0}$.

Для сравнения: аналогичные функции $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)$, полученные в работе [2], сходятся равномерно по $x\in\Omega'$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^{3/2}+h_s^2\ln h_s+h_t^3\right)$ и равномерно по $x\in\Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau+h_s+h_t^3\right)$.

Удаляя переменную y и индекс j, получаем формулы, аналогичные (2.12), где $\mu_{i,l,m}^{\pm}(x)=\breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x)e^{-p\tilde{\tau}_m}$. Заметим, что при $M=1$ формулы (2.12) определяют приближенные решения задач (1.1) в плоской области Ω, полученные в рамках МГЭ в непрямой формулировке на основе кусочно-квадратичной аппроксимации граничной функции $w_i^{\pm}(x,t)$ [6, с. 168].

3. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренних трехмерных и “плоских” задач (1.1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R=1$, при этом $T=Y=1$, $a=1$, $p=0$. Решения “плоских” задач вычисляются на окружностях $\partial\Omega_d$, отстоящих от границы $\partial\Omega$ на расстоянии d, в узлах $(\tilde{s}_l,t_n)$ (точки $\tilde{s}_l$ получаются из s_l в результате подобного отображения $\partial\Omega$ на $\partial\Omega_d$). Решения трехмерных задач вычисляются на круговых цилиндрических поверхностях $\partial\Omega_d\times I_Y$ в узлах $(\tilde{s}_l,y_j,t_n)$. Таким образом, $L_0=L$, $J_0=J$, $N_0=N$. Мелкость пространственно-временнóй сетки определяется значениями $L=N=30$, $J=16$. При вычислении матриц $\breve{G}_{i,n}$, $\breve{G}_{i,m}(x)$ интегрирование по s' осуществляется с помощью 12-точечной формулы Гаусса. Граничная функция w_i^{+} на цилиндрической поверхности задается формулой $w_i^{+}(\varphi,y,t)=f(y)f(t)\sin\varphi$ (φ – полярный угол), а на границе круга – формулой $w_i^{+}(\varphi,t)=f(t)\sin\varphi$, при этом $f(x)=16x^2\left(1-x\right)^2$. “Точные” решения $\bar{\mathbf{u}}_i$ ($i=1,2$) “плоских” и трехмерных задач (1.1), заданные в узлах $(\tilde{s}_l,t_n)$ и $(\tilde{s}_l,y_j,t_n)$, соответственно, находятся с помощью функций Грина, причем интегрирование функции Грина по временнóй переменной на интервале $[0;\, 5\times10^{-4}]$ осуществляется численно с помощью 12-точечной формулы Гаусса, а все остальные интегралы от функции Грина вычисляются с помощью точного почленного интегрирования ее как ряда.

Приближенные решения “плоских” и трехмерных задач (1.1), полученные с помощью формулы (2.12) в точках $(\tilde{s}_l, t_n)$ и $(\tilde{s}_l, y_j, t_n)$, соответственно, обозначим через $\breve{\mathbf{u}}_i$. Близость сеточных функций $\breve{\mathbf{u}}_i^+$ и $\overline{\mathbf{u}}_i^+$ определяется величиной относительного среднеквадратичного отклонения: $\delta u_i = \|\Delta\mathbf{u}_i\| / \|\overline{\mathbf{u}}_i^+\| \times 100\%$, где $\Delta\mathbf{u}_i = \breve{\mathbf{u}}_i^+ - \overline{\mathbf{u}}_i^+$, $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма. Будем обозначать через $\delta\overline{u}_i^M$ и $\delta\breve{u}_i^M$ значения δu_i для “плоских” и трехмерных задач, соответственно, при заданном значении M.

Как уже отмечалось, решения $\breve{\mathbf{u}}_i$ “плоской” задачи при $M = 1$ можно считать полученными в рамках классического “двумерного” МГЭ на основе кусочно-квадратичной аппроксимации. Можно предположить, что его точность не ниже точности соответствующего “трехмерного” МГЭ, примененного к задачам (1.1) в цилиндре $\Omega\times I_Y$ и реализованного на $L\times J\times N$ граничных элементов (при равных в обоих случаях L и N). Поэтому будем сравнивать точность предлагаемого метода с точностью $\delta\overline{u}_i^1$. Кроме того, в приведенной ниже таблице в скобках указаны значения среднеквадратичного отклонения, полученные в рамках схемы, описанной в работе [2] (кусочно-постоянная аппроксимация вдоль параметра полугруппы τ и вдоль кривой $\partial\Omega$).

Таблица

Относительные среднеквадратичные отклонения δu_i (в процентах)

d	M	“плоские”		$h_0 = h_Y = \infty$		$h_0 = h_Y = 0$		$h_0 = h_Y = 1$	
		δu_1	δu_2	δu_1	δu_2	δu_1	δu_2	δu_1	δu_2
0.9	1	0.013 (0.21)	0.0067 (0.28)	0.54 (0.27)	0.22 (0.63)	0.31 (0.29)	0.059 (0.28)	0.39 (0.31)	0.090 (0.25)
	2	0.0028 (0.17)	0.0038 (0.24)	0.028 (0.26)	0.014 (0.24)	0.016 (0.23)	0.0029 (0.24)	0.017 (0.21)	0.0027 (0.20)
	4	0.0035 (0.16)	0.0042 (0.22)	0.022 (0.25)	0.014 (0.23)	0.0087 (0.22)	0.0027 (0.23)	0.0081 (0.20)	0.0031 (0.20)
0.5	1	0.012 (0.23)	0.0069 (0.27)	0.22 (0.41)	0.29 (0.53)	0.25 (0.27)	0.11 (0.29)	0.29 (0.32)	0.16 (0.27)
	2	0.012 (0.17)	0.0069 (0.24)	0.13 (0.28)	0.043 (0.25)	0.072 (0.18)	0.0078 (0.25)	0.086 (0.21)	0.011 (0.21)
	4	0.0051 (0.16)	0.0042 (0.22)	0.026 (0.23)	0.015 (0.22)	0.22 (0.16)	0.0035 (0.23)	0.22 (0.20)	0.0044 (0.20)
0.1	1	0.26 (0.81)	0.093 (0.44)	2.31 (5.31)	0.98 (2.77)	1.91 (7.19)	0.35 (1.85)	2.22 (7.31)	0.50 (2.25)
	2	0.018 (0.34)	0.019 (0.26)	0.83 (2.52)	0.23 (0.91)	0.44 (3.13)	0.077 (0.61)	0.58 (3.28)	0.11 (0.71)
	4	0.020 (0.13)	0.0056 (0.24)	0.23 (0.77)	0.049 (0.27)	0.095 (0.74)	0.019 (0.30)	0.13 (0.88)	0.028 (0.29)
0.05	1	0.29 (0.63)	0.21 (0.41)	1.67 (3.84)	1.32 (3.52)	1.28 (5.35)	0.61 (2.34)	1.44 (5.76)	0.94 (2.96)
	2	0.29 (0.33)	0.085 (0.35)	0.80 (2.22)	0.37 (1.11)	0.48 (2.87)	0.12 (0.84)	0.72 (3.02)	0.27 (1.12)
	4	0.29 (0.15)	0.050 (0.27)	0.44 (1.08)	0.14 (0.42)	0.35 (1.24)	0.050 (0.40)	0.43 (1.36)	0.18 (0.56)

Согласно данным, приведенным в таблице, точность $\delta\breve{u}_i^M$ меньше $\delta\overline{u}_i^M$, но

$\delta \breve{u}_i^{M_1} \approx \delta \bar{u}_i^{M_2}$ уже при небольших значениях M_1/M_2 ($\delta \breve{u}_i^4 \approx \delta \bar{u}_i^1$). Напомним, что увеличение M влечет увеличение объема вычисления сеточных операторов, но не измельчение временно́й сетки. Это позволяет быстро вычислять высокоточные разрешающие операторы, допускающие также экономную реализацию. Действительно, вычисление аналогичных сеточных операторов на основе классического “трехмерного” МГЭ требует в $J^3/M \approx 500$ раз бо́льших затрат, поэтому преимущества предлагаемого метода, основанного на разделении переменных, очевидны. Заметим также, что согласно данным таблицы схема, описанная в настоящей работе и основанная на квадратичной интерполяции вдоль параметра полугруппы τ и вдоль кривой $\partial\Omega$, дает ощутимое увеличение точности по сравнению со схемой [2], хотя при этом объем вычислений, необходимых для получения разрешающих операторов, практически не возрастает.

Заключение

Итак, в настоящей работе предлагается операторный метод решения задач теплопроводности в прямых цилиндрах. Хотя рассматриваемые задачи достаточно просты (уравнения с постоянными коэффициентами) и имеют достаточно частный характер (граничные условия на основаниях цилиндра нулевые), тем не менее в силу их трехмерности требуют больших затрат при получении решения. Предлагаемая схема, основанная на разделении вычислений вдоль основания и образующей цилиндра, дает значительный экономический выигрыш по сравнению с известными методиками, не использующими такой возможности. Поэтому, как нам кажется, данная методика представляет интерес, тем более что она может быть использована для решения обратных граничных задач, сложность которых помимо вопросов устойчивости также определяется затратами на вычисление.

Литература

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложение к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 287 с.
2. Иванов Д.Ю. Экономичный метод вычисления операторов, разрешающих некоторые задачи теплопроводности в прямых цилиндрах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2014. № 9(68). С. 16 – 32.
3. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1094 – 1103.
4. Иванов Д.Ю. Обоснование одного алгоритма численного решения обратных граничных задач теплопроводности, построенного с учетом полугрупповой симметрии таких задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 12. С. 2028 – 2042.
5. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. – 575 с.
6. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. – 524 с.