Изгиб и колебания пластин

д.ф.-м.н. Кийко И.А.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
8(495)939-55-39. elast@mail.ru

Аннотация. Предложен вариант линейной теории тонких пластин, основанный на предположении о том, что интегральные уравнения динамического равновесия могут быть записаны для произвольного объема в недеформированном состоянии. Точным исследованием этих уравнений после введения понятий кинематически эквивалентных перемещений являются разделенные начально–краевые задачи растяжения–сжатия и изгиба. Основное внимание уделено задаче изгиба. Доказана теорема о единственности решения; приведены примеры тестовых задач об изгибе, собственных колебаниях и панельном флаттере, обнаружена существенная зависимость от коэффициента Пуссона.

Ключевые слова: кинематически эквивалентные перемещения, задача в перемещениях, общее решение, единственность решения, тестовые задачи изгиба, колебаний, флаттера, влияние коэффициента Пуассона.

Предисловие

Несколько лет тому назад Александр Порфирьевич Шмаков обратился ко мне с предложением обсудить идею о том, чтобы построить теорию деформаций пластин без привлечения дополнительных гипотез, а опираясь только на соотношения классической теории упругости. Я согласился, поскольку давно знал Александра Порфирьевича как первоклассного специалиста, глубоко понимающего теорию и методы классической упругости. Спустя некоторое время мы обсудили вариант первой части работы, я занялся ее редактированием; А.П. готовил вариант второй части, будучи в не лучшем физическом состоянии. К сожалению, судьба распорядилась так, что вскоре после того, как я получил черновой вариант второй части работы, Александра Порфирьевича не стало. Я посчитал своим долгом работу завершить: заново отредактировал первую часть, дополнил вторую, стараясь по возможности сохранить стиль изложения А.П.; насколько это получилось, пусть судит читатель.

Работа состоит из двух частей. Первая часть содержит математическую модель деформации пластин, которая включает в себя задачи растяжения-сжатия и изгиба. Основой для рассмотрения служат уравнения динамического равновесия, записанные для выделенной области упругого тела в недеформированном состоянии. Вводится понятие кинематически эквивалентных перемещений, два тензора и вектор деформаций. Из закона Гука, записанного в форме Ламе, выводятся тензор и вектор напряжений, а также тензор моментов. Из теоремы об изменении кинетической энергии, записанной для выделенной области, выводятся граничные условия и смысл введенных векторов и тензоров как обобщенных перемещений и сил, соответственно. Формулируется математическая модель деформации пластин, содержащая уравнения движения, определяющие соотношения и граничные условия; задачи растяжения-сжатия и изгиба оказываются, естественно, разделенными. В дальнейшем изложении внимание уделяется задаче изгиба; доказано, что если решение уравнений математической модели изгиба существует, то оно единственно.

Во второй части приведены некоторые приложения развитой теории, примеры и задачи динамики. Из уравнений совместности (аналог тождествам Сен-Венана) с привлечением уравнений равновесия получена полная система уравнений статического изгиба пластины; в случае, когда пластина изгибается только воздействиями по контуру, построено общее решение этой задачи. Приведено также общее решение задачи в перемещениях. Приведены примеры задач изгиба круговой пластины (осесимметричная задача), полосы (цилиндрический изгиб), прямоугольной пластины. Дано сравнение с результатами классической теории. Показано, что прогибы и касательные напряжения в предложенной теории обнаруживают существенную зависимость от коэффициента Пуассона; наоборот, нормальные напряжения различаются незначительно. В тестовых динамических задачах (собственные колебания полосы и прямоугольной пластины, флаттер полосы при продольном и поперечном обтекании) обнаружен один и тот же результат: частоты собственных колебаний и критические параметры флаттера (частота и скорость потока) в большей степени зависят от коэффициента Пуассона, нежели в классической теории.

Предложенный вариант математической модели изгиба пластин нуждается в более широком сравнении с уже имеющимися; разумеется, лучшая проверка – это сравнение с решениями классов задач по трехмерной упругости, при современном развитии вычислительной техники это вполне возможно. Пожелания и отзывы, в том числе критические, будут с благодарностью приняты.

Часть I. Математическая модель

1. Интегральная форма уравнений движения

В классической теории упругости (малые деформации и перемещения) отсчетная и актуальная конфигурации считаются неразличимыми, поэтому уравнения движения однородной среды принимают вид:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho F_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\ , \tag{1.1}$$

они дополняются условиями симметрии:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\ , \tag{1.2}$$

и соотношениями:

$$T_i=\sigma_{ij}\,n_j\ , \tag{1.3}$$

которые выражают компоненты вектора напряжений T на площадке с нормалью n^0.

Выделим в теле произвольную область V_0 с границей S_0 и проинтегрируем по этой области уравнения (1.1):

$$\int\limits_{V_0}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV+\rho\int\limits_{V_0}F_i dV=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{V_0}u_i dV\ .$$

С учетом равенства:

$$\int\limits_{V_0}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}dV=\int\limits_{\Sigma_0}\sigma_{ij}n_j d\Sigma=\int\limits_{\Sigma_0}T_i dS\,,$$

будем иметь:

$$\int\limits_{\Sigma_0}T_i d\,S+\rho\int\limits_{V_0}f_i\,dV=0\,,\ f_i=F_i-a,\qquad a_i=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{1.4}$$

Запишем это уравнение в векторном виде:

$$\int\limits_{s_0}TdS+\rho\int\limits_{v_0}\mathrm{f}dV=0;\ \mathrm{f}=\mathrm{F}-\mathrm{a},\ \mathrm{a}=\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial t}\ . \tag{1.5}$$

Домножим теперь уравнения (1.1) на x_k и проделаем элементарные преобразования, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}\,x_k-\sigma_{kj}\,x_i\right)+\rho\,(f_i x_k-f_k x_1)=0\ .$$

Проинтегрировав по V_0 с использованием формулы Гаусса-Остроградского, будем иметь:

$$\int_{\Sigma_0}\left(T_i x_k - T_k x_i\right)d\Sigma + \rho\int_{V_0}\left(f_i x_k - f_k x_i\right)dV_0 = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны одному векторному:

$$\int_{s_0}\left(\mathrm{T}\times x\right)dS + \rho\int_{V_0}(\mathrm{f}\times \mathrm{x})\,dV_0 = 0. \qquad (1.6)$$

Таким образом, из уравнений движения (1.1) при условиях (1.2) и (1.3) следуют интегральные соотношения (1.5) и (1.6) – необходимые условия динамического равновесия, дополненные условиями (1.3). Можно показать, что из этих условий следуют уравнения (1.1) и условия (1.2) во всех внутренних точках тела.

2. Уравнения движения пластины в дифференциальной форме

В декартовой системе координат $x_1x_2x_3$ с трехгранником (e_1, e_2, e_3) тонкая упругая пластина занимает область, ограниченную плоскостями $|x_3| = h$ и боковой цилиндрической поверхностью S' с направляющей Γ, лежащей в срединной плоскости $x_3 = 0$; контур Γ ограничивает область S. Лицевые поверхности $|x_3| = h$ обозначим, соответственно, $\sum_+$ и $\sum_-$. Очевидно, область S становится произвольной.

В дальнейшем будут использованы соотношения (H, P – некоторые функции от x_1, x_2):

$$\int_{\Sigma_+} HdS = \int_{\Sigma_-} HdS = \int_S HdS;\ \oint_\Gamma Pn_\alpha ds = \int_S \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}ds, \alpha = 1,2$$

Компонентами вектора $\mathrm{A}=\mathrm{T}\times \mathrm{x}$ $\left(e_j \times e_k\right)T_j x_k$ будут: $A_i = \mathrm{A}\mathrm{e}_\mathrm{i}\left(e_j\times e_k\right) = T_j x_k \equiv \varepsilon_{ijk}T_j x_k$,

здесь: $\varepsilon_{ijk} = e_i\left(e_j \times e_k\right)$ – полностью антисимметричный объект (символ Леви–Чивита);

$\varepsilon_{123} = 1$, поэтому определены и все остальные.

Запишем уравнения (1.5), (1.6) в проекциях на оси координат:

$$\int_{S_0}\sigma_{ij}n_j ds + \rho\int_{V_0} f_i dV = 0,$$

$$\int_{S_0}\varepsilon_{ijk}\sigma_{j\beta}n_\beta x_k ds + \rho\int_{V_0}\varepsilon_{ijk}f_j x_k dV = 0;\ \beta = 1,2\ , \qquad (2.1)$$

здесь: $S_t US\_US'$ – вся поверхность выделенной в пластине области V_0.

При вычислении интегралов (2.1) учтем соотношения $S_+ : n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1;$ $S_- : n_1 = n_2 = 0;\ n_3 = -1; S' : n_3 = 0,\ n_\alpha = n_\alpha(x_1, x_2)$. Из первого уравнения (2.1) имеем:

$$\int_{V_0} f_i\, dV = \int_S\left[\int_{-h}^{h} f_i\, dx_3\right]dS,$$

$$\int_{\Sigma_0}\sigma_{ij}\,n_j\,d\Sigma = \int_{S_+}\sigma_{ij}^+ n_j^+\, dS_+ + \int_{S_-}\sigma_{ij}^- n_j^-\, dS_- + \int_{S'}\sigma_{ij}\,n_j\,dS' = \int_{S_+}\sigma_{i3}^+\, dS_+ - \int_{S_-}\sigma_{i3}^-\, dS_- + \int_{S'}\sigma_{i\beta}\,n_\beta\,dS' = \int_S\left(\sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^-\right)dS +$$

$$+\oint_\Gamma\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{i\beta}\,dx_3\right]^{n_\beta}ds = \int_S\left(\sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}\right)dS + \int_S\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{i\beta}\,dx_3\right]dS = \int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{i\beta}\,dx_3 + \sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^-\right]dS.$$

Теперь первое уравнение из (2.1) принимает вид:

$$\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{i\beta}\,dx_3 + \sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^- + \rho\int_{-h}^{h} f_i\,dx_3\right]dS = 0.$$

Это уравнение должно выполняться для любой произвольной области S в пластине, значит подынтегральное выражение должно обращаться в ноль при всех x_1, x_2:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{i\beta}\,d\,x_3+\sigma_{i3}^{+}-\sigma_{i3}^{-}+\rho\int_{-h}^{h}f_i\,d\,x_3=0,\ (i=1,2,3)\ . \qquad (2.2)$$

Рассмотрим теперь второе уравнение из (2.1):

$$\int_{\Sigma_0}\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_k\,d\,\Sigma+\rho\int_{V_0}\varepsilon_{ijk}\,f_j\,x_k\,d\,V=0\,.$$

Выделяя в подынтегральных выражениях слагаемые с x_3, получаем:

$$\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_k=\varepsilon_{ij\alpha}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_\alpha+\varepsilon_{ij3}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_3\,,$$
$$\varepsilon_{ijk}\,f_j\,x_k=\varepsilon_{ij\alpha}\,f_j\,x_\alpha+\varepsilon_{ij3}\,f_j\,x_3\,.$$

Значит,

$$\int_{\Sigma_0}\varepsilon_{ij\alpha}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_\alpha\,d\,\Sigma+\int_{\Sigma_0}\varepsilon_{ij3}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_3\,d\,\Sigma+\rho\int_{V_0}\varepsilon_{ij\alpha}\,f_j\,x_\alpha\,d\,V_0+\rho\int_{V_0}\varepsilon_{ij3}\,f_j\,x_3\,d\,V_0=0\ . \qquad (2.3)$$

Здесь присутствуют четыре интеграла, вычислением которых и займемся.

$$I_i^{(1)}=\int_{\Sigma_0}\varepsilon_{ij\alpha}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_\alpha\,d\,\Sigma=\int_{S_+}\varepsilon_{ij\alpha}\,\sigma_{j3}^{+}x_\alpha d\,S_+-\int_{S_-}\varepsilon_{ij\alpha}\sigma_{j3}^{-}\,x_\alpha d\,S_-+$$
$$+\int_{S'}\varepsilon_{ij\alpha}\sigma_{j\beta}n_\beta\,x_\alpha d\,S'=\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\left(\sigma_{j3}^{+}-\sigma_{j3}^{-}\right)x_\alpha d\,S+\varepsilon_{ij\alpha}\oint_\Gamma\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}d\,x_3\right]n_\beta x_\alpha d\,s=$$
$$=\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\left(\sigma_{j3}^{+}-\sigma_{j3}^{-}\right)x_\alpha\,d\,S+\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[x_\alpha\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}\,d\,S\right]=$$
$$=\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\left(\sigma_{j3}^{+}-\sigma_{j3}^{-}\right)x_\alpha d\,S+\varepsilon_{ij\alpha}\int_S x_\alpha\,\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}dx_3dS+\varepsilon_{ij\beta}\int_S\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}d\,x_3\right]d\,S=$$
$$=\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}d\,x_3+\sigma_{j3}^{+}-\sigma_{j3}^{-}\right]x_\alpha d\,S+\varepsilon_{ij\beta}\int_S\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{i\beta}d\,x_3\right]d\,S\,,$$

$$I_i^{(2)}=\int_{\Sigma_0}\varepsilon_{ij3}\,\sigma_{jp}\,n_p\,x_3d\,\Sigma=\int_{S_+}\varepsilon_{ij3}\sigma_{j3}^{+}h\,d\,S_++\int_{S_-}\varepsilon_{ij3}\,\sigma_{j3}\,h\,d\,S+$$
$$+\int_{S'}\varepsilon_{ij3}\sigma_{j\beta}n_\beta x_3 d\,S'=\varepsilon_{ij3}h\int_S\left(\sigma_{j3}^{+}+\sigma_{j3}^{-}\right)dS+\varepsilon_{ij3}\oint_\Gamma\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}x_3dx_3\right]n_\beta d\,s=$$
$$=\varepsilon_{ij3}h\int_S\left(\sigma_{j3}^{+}+\sigma_{j3}^{-}\right)d\,S+\varepsilon_{ij3}\int_S\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}x_3\,d\,x_3\right]d\,S=\varepsilon_{ij3}\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}\,x_3\,d\,x_3+h\left(\sigma_{j3}^{+}+\sigma_{j3}^{-}\right)\right]d\,S\,,$$

$$I_i^{(3)}=\rho\,\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\left[\int_{-h}^{h}f_j\,d\,x_3\right]x_\alpha\,d\,S\,,\ I_i^{(4)}=\rho\int_{V_0}\varepsilon_{ij3}\,f_j\,x_3\,d\,V_0=\rho\,\varepsilon_{ij3}\int_S\left[\int_{-h}^{h}f_j\,x_3\,d\,x_3\right]d\,S\,.$$

Согласно (2.3) должно быть:

$$I_1^{(1)}+I_i^{(2)}+I_i^{(3)}+I_i^{(4)}=0\,,$$
$$\varepsilon_{ij\alpha}\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}d\,x_3+\sigma_{j3}^{+}-\sigma_{j3}^{-}+\rho\int_{-h}^{h}f_jdx_3\right]x_\alpha\,d\,S+$$
$$+\varepsilon_{ij3}\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}x_3dx_3+h\left(\sigma_{j3}^{+}+\sigma_{j3}^{-}\right)+\rho\int_{-h}^{h}f_j\,x_3\,d\,x_3\right]d\,S+\ \varepsilon_{ij\beta}\int_S\left[\int_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}\,d\,x_3\right]d\,S=0\,.$$

Подынтегральное выражение в квадратных скобках в первом слагаемом обращается в ноль в силу первых трех уравнений движения (2.2), и потому:

$$\varepsilon_{ij3}\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}x_3\,d\,x_3+h\left(\sigma_{j3}^{+}+\sigma_{j3}^{-}\right)+\rho\int\limits_{h}^{h}f_j\,x_3\,d\,x_3\right]d\,S+\varepsilon_{ij\beta}\int\limits_S\left[\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}\,d\,x_3\right]d\,S=0\,.$$

Первое слагаемое имеет вид $\varepsilon_{ij3}\,A_j$, где: A_j – это интеграл. Но:

$$\varepsilon_{ij3}\,A_j=\varepsilon_{i\alpha3}\,A_\alpha+\varepsilon_{i33}\,A_3=\varepsilon_{i\alpha3}\,A_\alpha\text{, так как }\varepsilon_{is33}=0\,.$$

Значит, предыдущее равенство имеет вид:

$$\varepsilon_{i\alpha3}\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3\,d\,x_3+h\left(\sigma_{\alpha3}^{+}+\sigma_{\alpha3}^{-}\right)+\rho\int\limits_{-h}^{h}f_\alpha\,x_3\,d\,x_3\right]d\,S+\varepsilon_{ij\beta}\int\limits_S\left[\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{j\beta}\,d\,x_3\right]d\,S=0,\ (i=1,2,3)\,.$$

Далее: $\varepsilon_{ij\beta}\,\sigma_{j\beta}=\varepsilon_{i\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}+\varepsilon_{i3\beta}\,\sigma_{3\beta}=\varepsilon_{i\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}+\varepsilon_{i3\alpha}\,\sigma_{3\alpha}=\varepsilon_{i\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}-\varepsilon_{i\alpha3}\,\sigma_{3\alpha}$, и потому предыдущее равенство принимает вид:

$$\varepsilon_{i\alpha3}\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3\,d\,x_3-\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{3\alpha}d\,x_3+h\left(\sigma_{\alpha3}^{+}+\sigma_{\alpha3}^{-}\right)+\rho\int\limits_{-h}^{h}f_\alpha\,x_3d\,x_3\right]d\,S+\varepsilon_{i\alpha\beta}\int\limits_S\left[\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,d\,x_3\right]d\,S=0\,.\quad(2.4)$$

При $i=\gamma\ \ (\gamma=1,2)$ второе слагаемое в (2.4) обращается в ноль и мы получаем:

$$\varepsilon_{\gamma\alpha3}\int\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3d\,x_3-\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{3\alpha}d\,x_3+h\left(\sigma_{\alpha3}^{+}+\sigma_{\alpha3}^{-}\right)+\rho\int\limits_{-h}^{h}f_\alpha\,x_3d\,x_3\right]d\,S=0\,.$$

Обозначим интеграл через A_α, тогда: $\varepsilon_{\gamma\alpha3}\,A_\alpha=0,\qquad \varepsilon_{\gamma13}\,A_1+\varepsilon_{\gamma23}\,A_2=0$.

Полагая $\gamma=1$ и $\gamma=2$, получаем $A_2=0,\ A_1=0$, т.е. $A_\alpha=0$. Вследствие произвольности S отсюда следует:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3d\,x_3-\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{3\alpha}d\,x_3+h\left(\sigma_{\alpha3}^{+}+\sigma_{\alpha3}^{-}\right)+\rho\int\limits_{-h}^{h}f_\alpha\,x_3d\,x_3=0\ .\qquad(2.5)$$

При $i=3$ первое слагаемое в (2.4) обращается в ноль и потому:

$$\varepsilon_{3\alpha\beta}\int\limits_S\left[\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,d\,x_3\right]d\,S=0\,.$$

С учетом равенства $\varepsilon_{3\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{12}-\sigma_{21}$ из последнего выражения получаем:

$$\int\limits_S\left[\int\limits_{-h}^{h}\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)d\,x_3\right]d\,S=0\,.$$

Следовательно, при всех x_1,x_2 имеем:

$$\int\limits_{-h}^{h}\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)d\,x_3=0\ .\qquad(2.6)$$

Непосредственно отсюда равенство $\sigma_{12}-\sigma_{21}=0$ не следует, к нему мы вернемся позже.

Окончательно из (2.2) и (2.5) получаем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}d\,x_3+\sigma_{\alpha3}^{+}-\sigma_{\alpha3}^{-}+\rho\int\limits_{-h}^{h}F_\alpha d\,x_3=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{-h}^{h}u_\alpha\,d\,x_3\,,\\ \frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{3\beta}d\,x_3+\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-}+\rho\int\limits_{-h}^{h}F_3d\,x_3=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{-h}^{h}u_3\,d\,x_3\,,\qquad(2.7)\\ \frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}x_3d\,x_3-\int\limits_{-h}^{h}\sigma_{3\alpha}dx_3+h\left(\sigma_{\alpha3}^{+}+\sigma_{\alpha3}^{-}\right)+\rho\int\limits_{-h}^{h}F_\alpha x_3dx_3=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{-h}^{h}u_\alpha x_3dx_3\,.\end{gathered}$$

Эти уравнения, дополненные начальными и краевыми условиями, составляют математическую модель движения пластины. Подчеркнем, что они получены строго математически из принципа динамического равновесия без привлечения дополнительных гипотез типа обобщенного напряженного состояния или кинематических. Система (2.7) – это еще не теория пластин, в том смысле, что она не содержит соотношений для определения полного напряженно-деформированного состояния пластины. Как видно, в систему (2.7) не входят напряжения σ_{13} при $|x_3| < h$; они входят в нее только как дополнительные массовые силы и моменты через свои значения на границах $|x_3| = h$; по этой причине соотношения упругости $\sigma_{13} = \lambda\theta\delta_{13} + 2\mu\varepsilon_{13}$ при $|x_3| < h$ для исследования системы (2.7) использовать нет необходимости, оставшиеся соотношения из закона Гука запишем в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{kk}, \quad |x_3| < h, \; \sigma_{\alpha\beta} = \lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{3\beta} = 2\mu\varepsilon_{3\beta}, \; \left(\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}\right),$$

$$\theta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{33}, \; \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \; \varepsilon_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_3}\right), \; \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \qquad (2.8)$$

В таком виде они приемлемы, так как относятся к внутренним напряжениям, действующим в пластине; тем самым условие симметрии $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ выполнено.

3. Перемещения и напряжения в точках пластины

Введем обозначения интегралов, входящих в уравнения движения (2.7):

$$\int_{-h}^{h} u_\alpha \, dx_3 = 2h\, v_\alpha\left(x_1, x_2, t\right),$$
$$\int_{-h}^{h} u_3 \, dx_3 = 2h\, w\left(x_1, x_2, t\right), \qquad (3.1)$$
$$\int_{-h}^{h} u_\alpha x_3 \, dx_3 = \frac{2}{3} h^3 \theta_\alpha\left(x_1, x_2, t\right).$$

Таким образом, каждому полю перемещений $\bar{u} = \bar{u}\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$ соответствуют единственные значения v_α, w и θ_α. Наоборот, если заданы v_α, w и θ_α, то полностью восстановить вектор перемещения нельзя. Действительно, общее решение уравнений (3.1) имеет вид:

$$u_\alpha = v_\alpha + x_3\theta_\alpha + \overset{\circ}{u}_\alpha\left(x_1, x_2, x_3, t\right), \; u_3 = w\left(x_1, x_2, t\right) + \overset{\circ}{u}_3\left(x_1, x_2, x_3, t\right), \qquad (3.2)$$

где: $\overset{\circ}{\bar{u}}$ – вектор, удовлетворяющий условиям:

$$\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{\bar{u}} \, dx_3 = 0, \qquad \int_{-h}^{h} \overset{\circ}{u}_\alpha x_3 \, dx_3 = 0. \qquad (3.3)$$

Векторы $\bar{u}$ и $\bar{u}^*$, определенные при $|x_3| < h$, будем называть кинематически эквивалентными, если они удовлетворяют условиям:

$$\int_{-h}^{h} \bar{u} \, dx_3 = \int_{-h}^{h} \bar{u}^* \, dx_3, \qquad \int_{-h}^{h} u_\alpha x_3 \, dx_3 = \int_{-h}^{h} u_\alpha^* x_3 \, dx_3.$$

Значит, вектор $\overset{\circ}{\bar{u}}$ будет кинематически эквивалентен нулевому вектору. Сохранение слагаемого $\overset{\circ}{\bar{u}}$ в выражении для $\bar{u}$ никак не отразится в последующих вычислениях в силу условий (3.3). Поэтому в выражении для $\bar{u}$ это слагаемое опускаем:

$$u_\alpha = v_\alpha + x_3\theta_\alpha, \qquad u_3 = w\left(x_1, x_2, t\right), \qquad (3.4)$$

помня при этом, что фактически это вектор только кинематически эквивалентен истинному вектору перемещения.

Значит, закон движения для пластины имеет вид:

$$y_\alpha = x_\alpha + v_\alpha\left(x_1, x_2, t\right) + x_3\,\theta_\alpha\left(x_1, x_2, t\right)$$

$y_3 = x_3 + w\left(x_1, x_2, t\right)$, причем $v_\alpha = 0, w = 0$ и $\theta_\alpha = 0$ при $t = t_0$ и можно выяснить механический смысл вектора $\overline{\theta} = \theta_\alpha\,\overline{e}_\alpha$ и его компонент θ_α.

Подставим выражения для интегралов из (3.1) в уравнения движения (2.7):

$$\frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}d\,x_3 + \frac{\sigma_{\alpha3}^{+} - \sigma_{\alpha3}^{-}}{2h} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha d\,x_3 = \rho\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{3\beta}d\,x_3 + \frac{\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-}}{2h} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_3 d\,x_3 = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2h}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3 - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{3\alpha}dx_3 + \frac{\sigma_{\alpha3}^{+} + \sigma_{\alpha3}^{-}}{2} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha x_3 d\,x_3 = \rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}.$$

Появились тензоры с компонентами:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,d\,x_3, \qquad M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3\,d\,x_3, \tag{3.6}$$

и вектор с компонентами:

$$Q_\beta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{3\beta}\,d\,x_3. \tag{3.7}$$

С учетом этих обозначений уравнения движения принимают окончательный вид:

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\sigma_{\alpha3}^{+} - \sigma_{\alpha3}^{-}}{2h} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha\,d\,x_3 = \rho\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta} + \frac{\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-}}{2h} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_3\,d\,x_3 = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha + \frac{\sigma_{\alpha3}^{+} + \sigma_{\alpha3}^{-}}{2}\int_{-h}^{h}F_{\alpha\;3}d\,x_3 = \rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}.$$

Отметим, что величины v_α, w и θ_α являются основными неизвестными задачи. Все остальные величины, которые уже появились и которые появятся, должны выражаться через них.

4. Теорема об изменении кинетической энергии пластины

Пусть основания пластины являются свободными и массовых сил нет, тогда уравнения движения становятся однородными:

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \rho\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2},\ \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha = \rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2},\ T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha},\ M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}. \tag{4.1}$$

Предположение сделано для краткости при проведении выкладок, это не повлияет на выводы, которые будут сделаны.

Первое уравнение свернем с $\dot{v}_\alpha$, второе домножим на $\dot{w}$, третье – свернем с $\dot{\theta}_\alpha$ и результаты сложим; получим:

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\dot{v}_\alpha + \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta}\dot{w} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\dot{\theta} - Q_\beta\dot{\theta}_\alpha = \frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{v}_\alpha\dot{v}_\alpha + \dot{w}\dot{w} + \frac{h^2}{3}\dot{\theta}_\alpha\dot{\theta}_\alpha\right).$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по t. Выделим в левой части этого равенства дивергентную составляющую. Так как $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}, M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$, то будем иметь:

$$T_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial x_\beta}=T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_{\alpha\beta},\qquad \dot{v}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial \dot{v}_\beta}{\partial x_\alpha}\right),\ M_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{\theta}_\alpha}{\partial x_\beta}=M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_{\alpha\beta}\ ,\quad \dot{\theta}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\theta}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial \dot{\theta}_\beta}{\partial x_\alpha}\right),$$

и потому:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_\alpha+Q_\beta\,\dot{w}+M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_\alpha\right)-T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_{\alpha\beta}-Q_\beta\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x_\beta}+\dot{\theta}_\beta\right)-M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_{\alpha\beta}=\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{v}_\alpha\,\dot{v}_\alpha+\dot{w}\dot{w}+\frac{h^2}{3}\dot{\theta}_\alpha\,\dot{\theta}_\alpha\right).\ (4.2)$$

Обозначим $\dot{\varepsilon}_\beta=\dfrac{\partial \dot{w}}{\partial x_\beta}+\dot{\theta}_\beta$, тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_\alpha+Q_\beta\,\dot{w}+M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_\alpha\right)-\left(T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_{\alpha\beta}+Q_\beta\,\dot{\varepsilon}_\beta+M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_{\alpha\beta}\right)=\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{v}_\alpha\,\dot{v}_\alpha+\dot{w}\dot{w}+\frac{h^2}{3}\dot{\theta}_\alpha\,\dot{\theta}_\alpha\right).$$

Пусть V – объем всей пластины и Σ – площадь срединной плоскости, отсекаемая боковой поверхностью. Через Γ обозначим плоский контур, ограничивающий Σ, через $\overline{n}$ – внешнюю нормаль к Γ и через s – длину на Γ.

Интегрируя предыдущее равенство по Σ и используя формулу преобразования интегралов $\int\limits_\Sigma\dfrac{\partial F}{\partial x_\beta}d\,\Sigma=\oint\limits_\Gamma F\,n_\beta\,d\,s$, получим:

$$\int\limits_\Gamma\left[\left(T_{\alpha\beta}\,n_\beta\right)\dot{v}_\alpha+\left(Q_\beta\,n_\beta\right)\dot{w}+\left(M_{\alpha\beta}\,n_\beta\right)\dot{\theta}_\alpha\right]ds-\int\limits_\Sigma\left(T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_{\alpha\beta}+Q_\beta\,\dot{\varepsilon}_\beta+M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_{\alpha\beta}\right)d\,\Sigma=$$

$$=\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Sigma\left(\dot{v}_\alpha\,\dot{v}_\alpha+\dot{w}\dot{w}+\frac{h^2}{3}\dot{\theta}_\alpha\,\dot{\theta}_\alpha\right)d\,\Sigma.$$

В этом равенстве $K=\dfrac{\rho}{2}\displaystyle\int\limits_S\left(\dot{v}_\alpha\dot{v}_\alpha+\dot{w}\dot{w}+\frac{h^2}{3}\dot{\theta}_\alpha\dot{\theta}_\alpha\right)dS$ – кинетическая энергия пластины, $R=\displaystyle\int\limits_\Sigma\left(T_{\alpha\beta}\,\dot{v}_{\alpha\beta}+Q_\beta\,\dot{\varepsilon}_\beta+M_{\alpha\beta}\,\dot{\theta}_{\alpha\beta}\right)d\,\Sigma-$ мощность внутренних напряжений в пластине; $A=\displaystyle\oint\limits_\Gamma\left[\left(T_{\alpha\beta}\,n_\beta\right)\dot{v}_\alpha+\left(Q_\beta\,n_\beta\right)\dot{w}+\left(M_{\alpha\beta}\,n_\beta\right)\dot{\theta}_\alpha\right]d\,s-$ работа (в единицу времени) обобщенных сил на контуре.

Значит, обобщенными силами, действующими на контуре Γ и совершающими работу, являются выражения:

$$T_\alpha=T_{\alpha\beta}\,n_\beta,\quad Q=Q_\beta\,n_\beta,\quad M_\alpha=M_{\alpha\beta}\,n_\beta.\qquad(4.3)$$

Величины $T_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\beta}$ являются компонентами двух симметричных тензоров $\tilde{T}$ и $\tilde{M}$ второго ранга на плоскости (x_1,x_2); согласно тензорному исчислению, их свертки:

$$T_\alpha=T_{\alpha\beta}\,n_\beta \text{ и } M_\alpha=M_{\alpha\beta}\,n_\beta,$$

с вектором $\left(n_\beta\right)$ на плоском контуре Γ образуют векторы $\tilde{T}$ и $\overline{M}$, лежащие в плоскости $\left(x_1,x_2\right)$: $\overline{T}=T_\alpha\,\overline{e}_\alpha=T_1\overline{e}_1+T_2\overline{e}_2,\quad \overline{M}=M_\alpha\,\overline{e}_\alpha$.

Нормальная составляющая вектора момента M_n: $M_n=\overline{M}\cdot n_\alpha=M_{\alpha\beta}n_\beta\,n_\alpha$, называется скручивающим моментом, а касательная составляющая M_t:

$$M_t=\overline{M}\cdot\overline{t}=M_\alpha\,t_\alpha=M_{\alpha\beta}\,n_\beta\,t_\alpha,$$

где: $t_\alpha = \dfrac{d\,x_\alpha}{d\,s}$, $x_\alpha = x_\alpha(s)$ – натуральное уравнение Γ, называется изгибающим моментом.

Величина $Q = Q_\beta\, n_\beta$ на Γ называется перерезывающей (или поперечной) силой. Тензор $\tilde{T} = \left(T_{\alpha\beta}\right)$ будем называть тензором напряжений, а тензор $\tilde{M} = \left(M_{\alpha\beta}\right)$ – тензором моментов напряжений в пластине.

Если в трехмерной задаче на боковой поверхности S_i пластины задан вектор напряжения, то граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{\alpha\beta}\Big|_{S_\delta} = \overset{\circ}{T}_\alpha\left(x_3, s\right), \qquad \sigma_{3\beta}\, n_\beta\Big|_{S_\delta} = \overset{\circ}{T}_3\left(x_3, s\right). \tag{4.4}$$

Интегрируя эти соотношения по толщине и учитывая, что n_β не зависят от x_3, получаем:

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}\, d\,x_3 \cdot n_\beta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{T}_\alpha\left(x_3, s\right) d\,x_3\,,\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \sigma_{3\beta}\, d\,x_3 \cdot n_\beta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{T}_3\left(x_3, s\right) d\,x_3\,.$$

Эти условия принимают вид:

$$T_{\alpha\beta}\, n_\beta\Big|_\Gamma = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{T}_\alpha\left(x_3, s\right) d\,x_3\,,\ Q\big|_\Gamma = Q_\beta\, n_\beta\Big|_\Gamma = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{T}_3\left(x_3, s\right) d\,x_3\,. \tag{4.5}$$

Умножая первые два условия из (4.4) на x_3 и интегрируя по толщине, получаем:

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}\, x_3\, d\,x_3 \cdot n_\beta = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{T}_\alpha\left(x_3, s\right) x_3\, d\,x_3\,,\ M_{\alpha\beta}\, n_\beta\Big|_\Gamma = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{T}_\alpha\left(x_3, s\right) x_3\, d\,x_3\,. \tag{4.6}$$

В этом случае условия (4.5) и (4.6) и будут граничными условиями на контуре пластины (их пять).

Если же на боковой поверхности задан вектор перемещения:

$$u_\alpha\big|_{S_\delta} = \overset{\circ}{u}_\alpha\left(x_3, s\right), \qquad u_3\big|_{S_\delta} = \overset{\circ}{u}_3\left(x_3, s\right)$$

(не путать с (3.2),(3.3), то граничные условия на контуре пластины будут такими (их также пять):

$$v_\alpha\big|_\Gamma = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{u}_\alpha\left(x_3, s\right) d\,x_3\,,\ w\big|_\Gamma = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{u}_3\left(x_3, s\right) d\,x_3\,,\ \theta_\alpha\big|_\Gamma = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} \overset{\circ}{u}_\alpha\left(x_3, s\right) x_3\, d\,x_3\,.$$

Мы рассмотрели два типа краевых условий, однако возможны и другие, смешанные.

Из выражения для мощности внутренних напряжений R в пластине следует, что величины:

$$\dot{v}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{v}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \dot{v}_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \qquad \dot{\varepsilon}_\beta = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x_\beta} + \dot{\theta}_\beta\,, \qquad \dot{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{\theta}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \dot{\theta}_\beta}{\partial x_\alpha}\right), \tag{4.7}$$

определяют скорости деформации пластины. Интегрируя эти соотношения и учитывая, что при $t = t_0$ $v_{\alpha\beta} = 0$, $\varepsilon_\beta = 0$, $\theta_{\alpha\beta} = 0$, получим деформации пластины.

Таким образом, деформация пластины определяется двумя симметричными тензорами второго ранга $\left(v_{\alpha\beta}\right), \left(\theta_{\alpha\beta}\right)$ и вектором $\bar{\varepsilon}$ с компонентами ε_β.

Примечание: Рассмотрим малые пространственные перемещения тела как абсолютно твёрдого $\bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{x} + \bar{b}$, $\bar{\omega} = const$, $\bar{b} = const$ или в компонентах:

$$u_1 = \omega_2\, x_3 - \omega_3\, x_2 + b_1\,, \quad u_2 = \omega_3\, x_1 - \omega_1\, x_3 + b_2\,, \quad u_3 = \omega_1\, x_2 - \omega_2\, x_1 + b_3\,.$$

В этом случае:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=0\,.$$

Для пластины по формулам (3.1) находим:

$$v_1=-\omega_3\,x_2+b_1\,,\quad v_2=\omega_3\,x_1+b_2\,,\quad w=\omega_1\,x_2-\omega_2\,x_1+b_3\,,\quad \theta_1=\omega_2\,,\quad \theta_2=-\omega_1\,,$$

и поэтому

$$v_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right)=0,\quad \theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial \theta_\beta}{\partial x_\alpha}\right)=0,\quad \varepsilon_\beta=\frac{\partial w}{\partial x_\beta}+\theta_\beta=0\,.$$

Итак, для пластины введены обобщённые перемещения $v_\alpha\,,w,\theta_\alpha$ и обобщенные напряжения $T_{\alpha\beta}\,,Q_\beta$ и $M_{\alpha\beta}$, которые должны удовлетворять уравнениям движения; введены величины $v_{\alpha\beta}\,,\varepsilon_\beta$ и $\theta_{\alpha\beta}$, определяющие деформированное состояние, поставлены также краевые условия. Для замыкания системы уравнений не хватает соотношений:

$$T_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}\left(v_{\gamma\delta}\,,\varepsilon_\gamma\,,\theta_{\gamma\delta}\right),\quad M_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}\left(v_{\gamma\delta}\,,\varepsilon_\gamma\,,\theta_{\gamma\delta}\right),\quad Q_\beta=Q_\beta\left(v_{\gamma\delta}\,,\varepsilon_\gamma\,,\theta_{\gamma\delta}\right),$$

определяющих упругое поведение пластины.

5. Определяющие соотношения; замкнутая система уравнений

Так как перемещения определяются по формулам (3.4):

$$u_\alpha=v_\alpha+x_3\,\theta_\alpha\,,\qquad u_3=w\left(x_1\,,x_2\,,t\right),\ v_\alpha=v_\alpha\left(x_1\,,x_2\,,t\right),\qquad \theta_\alpha=\theta_\alpha\left(x_1\,,x_2\,,t\right),\tag{5.1}$$

то деформации будут равны:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\ \varepsilon_{\alpha\beta}=v_{\alpha\beta}+x_3\,\theta_{\alpha\beta}\,,\quad \varepsilon_{3\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\theta_\alpha\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_\alpha\,,\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0\,.\tag{5.2}$$

Соотношения (2.8) теперь уточняются:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\lambda\theta\delta_{\alpha\beta}+2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\,,\quad \sigma_{3\alpha}=2\mu\varepsilon_{3\alpha}\,,\quad \theta=\varepsilon_{\alpha\alpha}\,,$$

и принимают вид:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\left(\lambda\,v_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,v_{\alpha\beta}\right)+x_3\left(\lambda\,\theta_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,\theta_{\alpha\beta}\right),\quad \sigma_{3\beta}=\mu\,\varepsilon_\beta\,.\tag{5.3}$$

Значит,

$$\int_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}d\,x_3=2h\left(\lambda\,v_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,v_{\alpha\beta}\right),\ \int_{-h}^{h}\sigma_{3\beta}\,d\,x_3=2h\,\mu\,\varepsilon_\beta\,,\ \int_{-h}^{h}\sigma_{\alpha\beta}\,x_3\,d\,x_3=\frac{2}{3}h^3\left(\lambda\,\theta_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,\theta_{\alpha\beta}\right).$$

Отсюда получаем определяющие соотношения:

$$T_{\alpha\beta}=\lambda\,v_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,v_{\alpha\beta}\,,\quad M_{\alpha\beta}=\frac{h^2}{3}\left(\lambda\,\theta_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,\theta_{\alpha\beta}\right),\quad Q_\beta=\mu\,\varepsilon_\beta\tag{5.4}$$

Итак, замкнутая система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\frac{\sigma^+_{\alpha3}-\sigma^-_{\alpha3}}{2h}+\frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha\,d\,x_3=\rho\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2},\ (\alpha=1,2)\,,$$

$$\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta}+\frac{\sigma^+_{33}-\sigma^-_{33}}{2h}+\frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_3\,d\,x_3=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,,$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-Q_\alpha+\frac{\sigma^+_{\alpha3}+\sigma^-_{\alpha3}}{2}+\frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha\,x_3\,d\,x_3=\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}\,,$$

$$T_{\alpha\beta}=\lambda\,v_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,v_{\alpha\beta}\,,\qquad v_{\gamma\gamma}=v_{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta}\,,\ Q_\beta=\mu\,\varepsilon_\beta,\quad \theta_{\gamma\gamma}=\theta_{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta}\,,\tag{5.5}$$

$$M_{\alpha\beta}=\frac{h^2}{3}\left(\lambda\,\theta_{\gamma\gamma}\,\delta_{\alpha\beta}+2\mu\,\theta_{\alpha\beta}\right),\ v_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}\right),\quad \theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial x_\alpha}\right),\quad \varepsilon_\beta=\frac{\partial w}{\partial x_\beta}+\theta_\beta\,.$$

Исключая из первых двух уравнений движения $T_{\alpha\beta}$, получаем:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}v_{\gamma\gamma}+\mu\Delta v_\alpha+\frac{\sigma_{\alpha3}^{+}-\sigma_{\alpha3}^{-}}{2h}+\frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha d\,x_3=\rho\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2},\ v_{\gamma\gamma}=\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma},\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.\ (5.5)'$$

Исключая из оставшихся трех уравнений движения (5.5) величины $M_{\alpha\beta}$ и Q_β, получаем:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right)+\frac{\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-}}{2h}+\frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_3\,d\,x_3=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{h^2}{3}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha}+\mu\Delta\theta_\alpha-\rho\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}\right]-\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\theta_\alpha\right)+\frac{\sigma_{\alpha3}^{+}+\sigma_{\alpha3}^{-}}{2}+\frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h}F_\alpha\,x_3\,d\,x_3=0.\quad(5.5)''$$

Как видим, система уравнений разбивается на две подсистемы $(5.5)'$ и $(5.5)''$, причем это же происходит и с граничными условиями. В дальнейшем сосредоточим внимание на задаче изгиба пластин.

6. Математическая модель изгиба

Рассмотрим задачу о статическом изгибе пластины под действием нормальной нагрузки $p=-\left(\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-}\right)$ и при $\sigma_{\alpha3}^{-}=\sigma_{\alpha3}^{+}=0, F_\alpha=0$. Система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=Q_\alpha;\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha}=\frac{\rho}{2h};\ M_{\alpha\beta}=\frac{h^2}{3}\left(\lambda\theta\delta_{\alpha\beta}+2\mu\theta_{\alpha\beta}\right);\ Q_\alpha=\mu\varepsilon_\alpha;\ \varepsilon_\alpha=\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\theta_\alpha;\ \theta=\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\alpha};\ \theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial x_\alpha}\right).$$

Запишем ее в перемещениях:

$$\frac{h^2}{3}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha}+\mu\Delta\theta_\alpha\right]-\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\theta_\alpha\right)=0,\qquad(6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}+\theta_\alpha\right)=\frac{\rho}{2\mu h}.\qquad(6.2)$$

Исключив из этих уравнений w, получим первое из основных соотношений:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\theta=\frac{3p}{2h^3},\qquad(6.3)$$

второе основное соотношение – это уравнение (6.2):

$$\Delta w+\theta=\frac{p}{2\mu h}.\qquad(6.4)$$

Отсюда следует $\Delta^2 w+\Delta\theta=\Delta p/(2\mu h)$; после этого из (6.3) находим:

$$\Delta^2 w=-\frac{3p}{2(\lambda+2\mu)h^3}+\frac{\Delta p}{2\mu h}.\qquad(6.5)$$

Это уравнение существенно отличается от основного уравнения классической теории изгиба пластин: в нем есть второе слагаемое и нет привычной всем цилиндрической жесткости. Если условно в (6.5) изгибной жесткостью D_1 D_1 посчитать обратную величину коэффициента при p, то получим отношение:

$$\frac{D_1}{D}=\frac{\lambda+2\mu}{E}(1-\nu^2)=\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}=1+\frac{\nu^2}{1-2\nu}.$$

Это отношение может заметно превышать единицу.

Недостающие уравнения для определения вектора (θ_1,θ_2) получаются из системы (6.1):

$$\Delta\theta_\alpha - \frac{3}{h^2}\theta_\alpha = \frac{3}{h^2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha}. \qquad (6.6)$$

Система (6.5), (6.6), дополненная граничными условиями, которые известным образом выражаются через w и θ_α, составляют математическую модель статического изгиба пластин. Чтобы завершить теорию изгиба, необходимо определить полное напряженно-деформированное состояние пластины. Для этого следует воспользоваться выражениями (3.2) для полного вектора перемещений (при $v_\alpha = 0$) и составить уравнения равновесия в форме Ламе; решение этой неоднородной системы относительно функций $u_\alpha^0(x_1,x_2,x_3)$ и $u_3^0(x_1,x_2,x_3)$ следует подчинить реальным граничным условиям на поверхности пластины и условиям (3.3) кинематической эквивалентности нулю.

Замечание. Этой задачей мы заниматься не будем; отметим лишь, что аналогично тому, как это делается в классической теории, могут быть получены выражения для касательных напряжений σ_{13},σ_{23}:

$$\sigma_{13} = \frac{3}{2}Q_1\left(1-\frac{4x_3^2}{h^2}\right),\ \sigma_{23} = \frac{3}{2}Q_2\left(1-\frac{4x_3^2}{h^2}\right).$$

Через Q_α обозначены перерезывающие усилия, отнесенные к толщине пластины.

7. Краевая задача, единственность решения

Состояние статического изгиба пластины определяется уравнениями

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha = -F_\alpha;\quad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} = -F_3; \qquad (7.1)$$

$$F_\alpha = \frac{\sigma_{\alpha3}^+ - \sigma_{\alpha3}^-}{2} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h} F_\alpha x_3 dx_3;\quad F_3 = \frac{\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-}{2h} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h} F_3 dx_3;$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{h^2}{3}\left(\lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\theta_{\alpha\beta}\right);\quad Q_\alpha = \mu\varepsilon_\alpha; \qquad (7.2)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha;\ \theta = \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\alpha};\ \theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\theta_\beta}{\partial x_\alpha}\right).$$

Параметры θ_α введены соотношениями:

$$\theta_\alpha = \frac{3}{2h}\int_{-h}^{h} u_\alpha x_3 dx_3,$$

в которых $u_\alpha(x_1,x_2,x_3,t)$ – вектор перемещений. Система (7.1), (7.2) дополняется краевыми условиями на контуре Γ; в зависимости от вида условий могут быть сформулированы следующие задачи:

1. задача в перемещениях – на Γ заданы w,θ_α;
1. задача в напряжениях – на Γ заданы $\bar{M}$ и $\bar{Q}$, при этом $M_\alpha = M_{\alpha\beta}n_\beta$, $\bar{Q} = Q_\beta n_\beta$;
2. первая смешанная задача – на Г заданы $\bar{M},w$;
3. вторая смешанная задача – на Г заданы $\theta_\alpha,\bar{Q}$; на разных частях Г могут быть заданы различные из перечисленных выше условий.

Допустим, что имеется два решения какой-либо из краевых задач 1 – 4; разности этих решений удовлетворяют соотношениям (7.2) однородным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha = 0;\ \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta} = 0, \qquad (7.3)$$

и однородным граничным условиям.

Предварительно выведем интегральное равенство, которое следует из (7.3) и одного из однородных граничных условий. Первое из уравнений (7.3) свернем с θ_α, второе домножим на w и результаты сложим, получим:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\theta_\alpha - Q_\alpha\theta_\alpha + \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta}w = 0\,. \qquad (7.4)$$

Выделим в этом уравнении дивергентную часть и учтем, что вследствие симметрии моментов $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ будет $M_{\alpha\beta}(\partial\theta_\alpha / \partial x_\beta) = M_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}$; из (7.4) получим:

$$M_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} + Q_\beta\varepsilon_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(M_{\alpha\beta}\theta_\alpha + Q_\beta w\right).$$

Проинтегрируем это равенство по области S, занятой пластиной, будем иметь:

$$\int_S \left(M_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} + Q_\beta\varepsilon_\beta\right)dS = \oint_\Gamma \left(M_{\alpha\beta}n_\beta\theta_\alpha + Q_\beta n_\beta w\right)ds\,. \qquad (7.5)$$

В любой из краевых задач, отмеченных выше, выражение под знаком интеграла справа равно нулю, поэтому из (7.5) последует необходимое интегральное равенство:

$$\int_S \left(M_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} + Q_\beta\varepsilon_\beta\right)dS = 0\,. \qquad (7.6)$$

С учетом соотношений (7.2) выражение под интегралом в (7.6) примет вид:

$$A = M_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} + Q_\beta\varepsilon_\beta\left(\lambda\theta^2 + 2\mu\theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}\right)\frac{h^2}{3} + \mu\varepsilon_\beta\varepsilon_\beta\,. \qquad (7.7)$$

Обозначим θ_1^0, θ_2^0 – инварианты тензора $\theta_{\alpha\beta}$, тогда $\theta = \theta_1^0 + \theta_2^0, \theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} = \theta_1^{0^2} + \theta_2^{0^2}$, поэтому (7.7) примет вид:

$$A = \frac{h^2}{3}\left[\lambda\left(\theta_1^0 + \theta_2^0\right)^2 + 2\mu\left(\theta_1^{0^2} + \theta_2^{0^2}\right)\right] + \mu\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right).$$

Следовательно, А – квадратичная форма с положительными коэффициентами, т.е. А – положительно определенная квадратичная форма: $A \geq 0$. Равенство (7.7):

$$\int_S A dS = 0\,,$$

возможно поэтому лишь при условии, что в каждой точке пластины $A = 0$. Это влечет за собой равенства $\theta_1^0 = \theta_2^0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, откуда следует, что $\theta_{\alpha\beta} = 0, \varepsilon_\beta = 0$, $M_{\alpha\beta} = 0, Q_\beta = 0$. Доказано, таким образом, что решения начально-краевых задач 1 – 4 определяются единственным образом, если они существуют.

Замечание. В работе [2] предложен вариант теории пластин, основанный на известных гипотезах (автор называет их физическими): первая относится к перемещениям u_α и по существу совпадает с аппроксимацией Генки $u_\alpha = x_3\theta_\alpha$; вторая устанавливает малость напряжения σ_{33} по сравнению с напряжениями $\sigma_{\alpha\alpha}$. Далее, как отмечает автор, уравнения равновесия пластины стандартными преобразованиями приводятся к трем уравнениям относительно трех функций: w и θ_α . Эту систему (вместе с граничными условиями) следовало бы, по нашему мнению, выписать и проанализировать. Вместо этого предлагается привести систему к виду, аналогичному уравнениям Рейсснера. Исключение Q_α из уравнений равновесия приводят к соотношению (аналог (6.3)):

$$D\Delta\theta + p = 0\,.$$

Далее цитируем: «Структура этого уравнения показывает, что введением потенциальной функции $\varphi(x,y)$ такой, что $\theta_x = -\partial\varphi/\partial x,\ \theta_y = -\partial\varphi/\partial y$, его можно привести к следующей форме: $D\Delta^2\varphi = p''$». Это утверждение ошибочно, поскольку противоречит известной из анализа теореме: векторное поле тогда и только тогда имеет потенциал, когда оно безвихревое. Но при произвольной нагрузке $p(x, y)$ и граничных условиях будет, вообще говоря, выполняться неравенство $\partial\theta_x/\partial y - \partial\theta_y/\partial x \neq 0$, а это означает, что векторное поле (θ_x, θ_y) не может быть потенциальным. Хорошо известно, однако, что любое векторное поле может быть представлено суммой потенциального и соленоидального; в нашем случае двухмерного вектора (θ_1, θ_2) имеем:

$$\theta_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \quad \theta_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\ . \tag{7.8}$$

Из уравнений (7.1) последует:

$$\Delta\left[\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{3\mu}\Delta\varphi - w - \varphi\right] = 0\,,\ \Delta\left(\Delta\psi - \frac{3}{h^2}\psi\right) = 0\,.$$

Откуда получаем соотношения:

$$\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{3\mu}\Delta\varphi - w - \varphi = \varphi_0(x_1, x_2)\,,\ \Delta\psi - \frac{3}{h^2}\psi = \psi_0(x_1, x_2)\,,$$

в которых φ_0, ψ_0 – произвольные гармонические функции. В аналогичных уравнениях работы [2], вследствие некорректных математических построений, вместо функций φ_0, ψ_0 стоят постоянные, которые затем полагаются равными нулю. Вопрос об определении функций φ_0, ψ_0 в каждом конкретном случае должен решаться отдельно; полагать их заранее равными нулю нам представляется необоснованным, более того, они могут оказаться необходимыми при определении полного вектора перемещений. В свете высказанных соображений заявление автора [2] о том, что его работа «…посвящена обоснованию теории, которую предлагается считать современной формой классической теории пластин», оказывается преждевременным.

Часть II. Некоторые методы исследования; примеры

Выведены уравнения совместности (тождества, их два) деформаций в задаче об изгибе пластин (по аналогии с тождествами Сен-Венана в линейной теории упругости). Получена полная система уравнений статического изгиба; для случая, когда пластина изгибается только воздействиями по контуру, сформулирована задача в напряжениях. Представлено общее решение задачи в перемещениях. Приведены примеры статического изгиба пластин, выяснено влияние коэффициента Пуассона; выявлены параметры подобия и условия моделирования. Рассмотрены некоторые задачи свободных колебаний, а также панельного сверхзвукового флаттера в рамках поршневой теории

1. Условия совместности; задача в напряжениях

Запишем основные соотношения теории изгиба пластин:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha;\ \theta = \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\alpha};\ \ \theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\theta_\beta}{\partial x_\alpha}\right);\ Q_\alpha = \mu\varepsilon_\alpha;\ \ M_{\alpha\beta} = \frac{h^2}{3}\left(\lambda\theta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\theta_{\alpha\beta}\right).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = \varepsilon_\alpha - \theta_\alpha;\ \Delta\varepsilon_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Delta w + \Delta\theta_\alpha\,,$$

поэтому

$$\Delta w = \varepsilon - \theta, \quad \varepsilon = \frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial x_\alpha}\,.$$

Из двух последних соотношений получаем:

$$\Delta\varepsilon_\alpha = \Delta\theta_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\varepsilon - \theta) .$$

Далее имеем:

$$2\theta_{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\theta_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad \Delta\theta_\alpha = 2\frac{\partial\theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} .$$

Из последних трех соотношений окончательно получаем:

$$\Delta\varepsilon_\alpha = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha} + 2\left(\frac{\partial\theta_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha}\right) . \qquad (1.1)$$

Таким образом, получено два уравнения совместности (тождества) деформаций в задаче об изгибе пластины. Выразим деформации ε_α и $\theta_{\alpha\beta}$ через моменты $M_{\alpha\beta}$ и перерезывающие силы Q_α. Из выражений для моментов имеем:

$$2\mu\theta_{\alpha\beta} = \frac{3}{h^2}M_{\alpha\beta} - \lambda\theta\delta_{\alpha\beta} .$$

Отсюда следует: $\theta = 3M / \left((\lambda+\mu)h^2\right), 2M + M_{11} + M_{12}$, поэтому окончательно получим:

$$2\mu\theta_{\alpha\beta} = \frac{3}{h^2}M_{\alpha\beta} - 2\nu\frac{3}{h^2}M\delta_{\alpha\beta} .$$

Примем во внимание очевидные равенства:

$$\mu\theta = (1-2\nu)\frac{3}{h^2}M; \; \mu\varepsilon_\beta = Q_\beta; \; \mu\varepsilon = \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta},$$

и подставим все в соотношение (1.1). Получим:

$$\Delta Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta}\right) + \frac{3}{h^2}\left(\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + 2(1-\nu)\frac{\partial M}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (1.2)$$

Теперь это два уравнения, связывающие между собой вектор Q_α и тензор $M_{\alpha\beta}$.

Введем обозначения $\frac{\overset{+}{\sigma}_{33} - \overset{-}{\sigma}_{33}}{2h} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h} F_3 dx_3 = \rho F_3$, $\frac{\overset{+}{\sigma}_{\alpha 3} + \overset{-}{\sigma}_{\alpha 3}}{2} + \frac{\rho}{2h}\int_{-h}^{h} F_\alpha x_3 dx_3 = \rho F_\alpha$, тогда система уравнений изгиба примет при этом вид:

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} + \rho F_3 = 0; \quad \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha + \rho F_\alpha = 0 . \qquad (1.3)$$

С учетом этих соотношений уравнения (1.2) преобразуются:

$$\Delta Q_\alpha - \frac{3}{h^2}Q_\alpha + \frac{6(1-\nu)}{h^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial x_\alpha} = -\rho\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_\alpha} + \frac{3}{h^2}F_\alpha\right). \qquad (1.4)$$

Таким образом, получена полная система уравнений статического изгиба пластины. Рассмотрим случай, когда пластина изгибается воздействиями по контуру; система (1.3), (1.4) запишется в виде:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - Q_\alpha = 0; \quad \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 , \qquad (1.5)$$

$$\Delta Q_\alpha - \frac{3}{h^2}Q_\alpha + \frac{6(1-\nu)}{h^2}\frac{\partial M}{\partial x_\alpha} = 0 . \qquad (1.6)$$

Положим:

$$Q_1 = \frac{\partial F}{\partial x_2}; \; Q_2 = -\frac{\partial F}{\partial x_1}; \; F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \qquad (1.6^1)$$

$$M_{11} = 2\frac{\partial F_1}{\partial x_2};\ M_{22} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_1};\ M_{12} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_1};\ M = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}.$$

Введенные функции F, F_α считаем пока произвольными. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что уравнения (1.5) при этом обращаются в тождества; оставшиеся уравнения (1.6) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Delta F - \frac{3}{h^2}F\right) = +\frac{6(1-\nu)}{h^2}\cdot\frac{\partial M}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Delta F - \frac{3}{h^2}F\right) = -\frac{6(1-\nu)}{h^2}\frac{\partial M}{\partial x_1}.$$

Введем обозначения:

$$\varphi = \Delta F - \frac{3}{h^2}F;\ \psi = -\frac{6(1-\nu)}{h^2}M. \qquad (1.7)$$

Из предыдущих уравнений следует, что функции φ и ψ удовлетворяют условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2};\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

следовательно, они являются сопряженными гармоническими функциями:

$$\varphi + i\psi = \Phi^*(z), \quad z = x_1 + ix_2.$$

Таким образом, для определения F_α и M имеем систему уравнений:

$$\Delta F - \frac{3}{h^2}F = \varphi;\ \ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = F;\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = M;\ \psi = \frac{6(1-\nu)}{h^2}M. \qquad (1.8)$$

Функция F удовлетворяет неоднородному уравнению Гамильтона; поскольку φ – гармоническая функция, его частным решением будет $F_0 = -(h^2/3)\varphi$; общее решение, следовательно, имеет вид:

$$F = -\frac{h^2}{3}\varphi + H,\ \Delta H - \frac{3}{h^2}H = 0.$$

В результате система (1.8) примет окончательную форму:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = H - \frac{h^2}{3}\varphi;\ \Delta\varphi = 0;\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = H - \frac{h^2}{3}\varphi;\ \Delta\varphi = 0;\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = M;\ \Delta M = 0 \ \ (1.8^1)$$

$$\Delta H - \frac{3}{h^2}H = 0.$$

Эту систему удобно записать в комплексном виде.

Домножим второе уравнение из (1.8^1) на i и вычтем из первого. После известных преобразований получим:

$$2\frac{\partial}{\partial z}\left(F_1 + iF_2\right) = H - \frac{h^2}{3}\varphi - iM,\ 4\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial z} - \frac{3}{h^2}H = 0,$$

выразим из второго уравнения H и подставим в первое, будем иметь:

$$2\frac{\partial}{\partial z}(F_1 + iF_2) = \frac{4h^2}{3}\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial\overline{z}} - \left(\frac{h^2}{3}\varphi + iM\right). \qquad (1.8^{11})$$

На основании уравнений (1.8) можем написать:

$$\frac{h^2}{3}(\varphi + i\psi) = \frac{h^2}{3}\varphi + 2(1-\nu)iM,$$

тогда произвольную аналитическую функцию $(h^2/3)(\varphi + i\psi)$ можно записать в виде:

$$\frac{h^2}{3}\varphi + 2i(1-\nu)M = -8(1-\nu)\Phi'(z).$$

Из последних двух равенств следует:

$$\frac{h^2}{3}\varphi = -4(1-\nu)\left[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}\right];\ iM = -2\left[\Phi'(z)-\overline{\Phi^1(z)}\right],$$

и окончательно:

$$\frac{h^2}{3}\varphi + iM = -2\left[(3-2\nu)\Phi'(z)+(1-2\nu)\overline{\Phi^1(z)}\right].$$

Подставим это выражение в (1.8^{11}), получим:

$$\frac{\partial}{\partial z}(F_1+iF_2)=\frac{2h^2}{3}\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial z}+(3-2\nu)\Phi(z)+(1-2\nu)\overline{\Phi^1(z)}\ .$$

После интегрирования отсюда последует:

$$F_1+iF_2=\frac{2h^2}{3}\frac{\partial H}{\partial z}+(3-2\nu)\Phi(z)+(1-2\nu)z\Phi'(z)+\overline{\Psi'(z)}, \qquad (1.10)$$

здесь: $\Psi(z)$ – произвольная аналитическая функция.

Из первой формулы (1.8^1) и формулы (1.9) нетрудно получить:

$$F=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}=H+4(1-\nu)\left[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}\right]. \qquad (1.11)$$

Эта формула будет использована при формулировке граничных условий, которые имеют вид:

$$Q_\beta n_\beta\,|_\Gamma = Q^0(s);\ M_{\alpha\beta} n_\beta\,|_\Gamma = M^0_\alpha(s),\ \left\{n_\alpha, n_\beta\right\}=n^0\ ,$$

здесь: $Q^0(s), M^0_\alpha(s)$ – известные на контуре функции от длины дуги.

Подставим сюда выражения Q_β и $M_{\alpha\beta}$ через F_α , получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}n_1-\frac{\partial F}{\partial x_1}n_2=Q^0, \qquad (a)$$

$$2\frac{\partial F_1}{\partial x_2}n_1+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}-\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)n_2=M^0_1, \qquad (в)$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}-\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)n_1-2\frac{\partial F_2}{\partial x_1}n_2=M^0_2\ . \qquad (c)$$

Подставим в (в) вместо $\partial F_2/\partial x_2$ выражение $\frac{\partial F_2}{\partial x_2}=F-\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$, аналогично в (с) $\partial F_1/\partial x_1$ заменим на выражение $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}=F-\frac{\partial F_2}{\partial x_2}$, в результате граничные условия (а), (в), (с) примут вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}n_1-\frac{\partial F}{\partial x_1}n_2=Q^0\ ,\ 2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}n_1-\frac{\partial F_1}{\partial x_1}n_2\right)=M^0_1-F\,n_2\ ,\ 2\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}n_1-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}n_2\right)=M^0_2+F\,n_1\ .$$

Обозначим $t^0=\left\{t_1,t_2\right\}$ – единичный вектор касательной, повернутый по отношению к n^0 против часовой стрелки; α – угол, образуемый вектором n^0 с осью x_1. Тогда:

$$n_1=\cos\alpha=t_2;\ \ n_2=\sin\alpha=-t\ .$$

Пусть $x_1=x_1(s),\ x_2=x_2(s)$ – натуральные уравнения контура, тогда будем иметь:

$$t_1=\frac{dx_1}{ds};\ \ t_2=\frac{dx_2}{ds}\,,$$

поэтому:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}n_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}n_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial F}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}t_2 = \frac{dF}{ds}.$$

Граничные условия теперь можно переписать в интегрируемой форме:

$$\frac{dF}{ds} = Q^0(s),\ 2\frac{dF_1}{ds} = M_1^0(s) + F\,t_1,\ 2\frac{dF_2}{ds} = M_2^0(s) + F\,t_2.$$

Эти уравнения можно преобразовать на основании соотношений:

$$F\,t_1 = F\frac{dx_1}{ds} = \frac{d}{ds}(F\,x_1) - x_1\frac{dF}{ds} = \frac{dF}{ds}(F\,x_1) - x_1 Q^0,$$

$$Ft_2 = F\frac{dx_2}{ds} = \frac{d}{ds}(Fx_2) - x_2\frac{dF}{ds} = \frac{d}{ds}(Fx_2) - x_2 Q^0.$$

В результате имеем:

$$\frac{dF}{ds} = Q^0(s),\ \frac{d}{ds}(2F_1 - Fx_1) = M_1^0(s) - x_1 Q^0(s),\ \frac{d}{ds}(2F_2 - Fx_2) = M_2^0(s) - x_2 Q^0(s).$$

Интегрируя эти равенства по замкнутому контуру Γ, придем к необходимым условиям равновесия:

$$\oint_\Gamma Q^0(s)ds = 0;\ \oint_\Gamma M^0\left((s) - xQ^0(s)\right)ds = 0,$$

здесь: $x = \{x_1, x_2\}$.

Теперь, зная на контуре Γ значения функций F_1, F_2 и F, можно сформулировать граничные условия для функций $H, \Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Из (1.10) и (1.11) получим:

$$\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial H}{\partial x_1} + i\frac{\partial H}{\partial x_2}\right) + (3-2\nu)\Phi(z) + (1-2\nu)z\bar{\Phi}'(z) + \Psi(z) = F_1 + iF_2.$$

Таким образом, сформулирована краевая задача для однородной системы (1.5), (1.6).

Запишем выражения для функций F_1, F_2 в действительной форме и положим:

$$\Phi(z) = \varphi_1 + i\varphi_2; \Psi(z) = \Psi_1 + i\Psi_2; \Phi'(z) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}.$$

Из формул (1.10) тогда получим:

$$F_1 = \frac{h^2}{3}\frac{\partial H}{\partial x_1} + (3-2\nu)\varphi_1 + (1-2\nu)\left(x_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) + \Psi_1,$$

$$F_2 = \frac{h^2}{3}\frac{\partial H}{\partial x_2} + (3-2\nu)\varphi_2 + (1-2\nu)\left(x_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right) - \Psi_2.$$

Учтем соотношения:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}; \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}; \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}; \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1},$$

и введем функцию ψ, положив $\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1},\ \psi_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2},\quad \Delta\psi = 0$.

После этого из формул (1.12) окончательно получим:

$$F_1 = 2\varphi_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{h^2}{3}H + (1-2\nu)(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + \Psi\right],$$

$$F_2 = 2\varphi_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{h^2}{3}H(1-2\nu)(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + \Psi\right],\ \Delta\psi = 0,\ \Delta H - \frac{3}{h^2}H = 0, \quad (1.13)$$

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = H + 4(1-\nu)\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) = H + 8(1-\nu)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}.$$

2. Определение перемещений w, θ_α

По формулам (1.6^1) и (1.13) предыдущего параграфа вычислим $Q_\alpha, M_{\alpha\beta}$ и M.

Подставив сюда предыдущие выражения, получим:

$$2\mu\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} = (\nu-4)(1-2\nu)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\frac{h^2}{3}H + (1-2\nu)(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + \Psi\right],$$

$$2\mu\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2} = 4(1-2\nu)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\frac{h^2}{3}H + (1-2\nu)(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + \Psi\right].$$

После интегрирования из первых двух уравнений найдем (с точностью до поворотов пластины как жесткого целого):

$$\mu\vartheta_1 = -2(1-2\nu)\varphi_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{h^2}{3}H + (1-2\nu)(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + \Psi\right],$$

$$\mu\vartheta_2 = 2(1-2\nu)\varphi_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{h^2}{3}H + (1-2\nu)(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2) + \Psi\right].$$

Третье уравнение, как нетрудно убедиться, выполняется тождественно.

Далее имеем:

$$\mu\frac{\partial w}{\partial x_1} = Q_1 - \frac{3}{h^2}\mu\vartheta_1; \quad \mu\frac{\partial w}{\partial x_2} = Q_2 - \frac{3}{h^2}\mu\vartheta_2.$$

Подставив сюда выражения (2.1) и (2.2), после очевидных преобразований получим:

$$\mu\frac{\partial w}{\partial x_1} = 8(1-\nu)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (1-2\nu)\frac{3}{h^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1\right) - \frac{3}{h^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2},$$

$$\mu\frac{\partial w}{\partial x_2} = 8(1-\nu)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_2^2} + (1-2\nu)\frac{3}{h^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1\right) - \frac{3}{h^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}.$$

Введем функцию Ψ_*, сопряженную с Ψ, так что:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi_*}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi_*}{\partial x_1},$$

тогда последние уравнения могут быть представлены в форме: $grad(\mu w - \Omega(x_1, x_2)) = 0$; следовательно, с точностью до перемещений пластины, как жесткого целого, можем принять:

$$\mu w = 8(1-\nu)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + (1-2\nu)\frac{3}{h^2}(x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1) + \frac{3}{h^2}\Psi_*.$$

3. Некоторые примеры

В качестве первого примера рассмотрим задачу об изгибе круглой пластины под действием равномерной нагрузки.

В плоскости x_1x_2 пластина занимает область $0 \le ra,\ a = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, она нагружена перепадом давлений $\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- = -p = const > 0$; о граничных условиях сказано ниже.

Задачу будем решать в перемещениях, для чего воспользуемся уравнениями (6.3),(6.4) из части I, при этом полную толщину пластины обозначим h. Уравнения имеют вид:

$$\Delta\theta = \frac{12p}{(\lambda + 2\mu)h^3}, \quad \Delta w = -\theta + \frac{p}{\mu h}; \quad \theta = \partial\theta_\alpha / \partial x_\alpha.$$

В полярной системе координат при осевой симметрии оператор Лапласа имеет вид: $\Delta f = (rf')'/r$, где штрих обозначает производную по r, поэтому предыдущая система запишется в виде:

$$\left(r\theta'\right)' = \frac{12pr}{(\lambda+2\mu)h^3} \equiv A_0 r,\ \left(rw'\right)' = -\theta r + \frac{pr}{\mu h} \equiv -\theta r + A_1 r.$$

Последовательно проинтегрируем каждое из этих уравнений, получим в результате:

$$\theta = \frac{A_0}{4}r^2 + c_1 \ln r + c_2,\ w = -\frac{A_0}{64}r^4 - c_1\left(\frac{r^2}{4}\ln r - \frac{r^2}{8} + \frac{1}{8}\ln r\right) - \frac{c_2}{4}r^2 + \frac{A_1}{4}r^2 + b_1 \ln r + b_2.$$

Решение должно быть ограничено в начале координат $r=0$, поэтому полагаем $c_1 = b_1 = 0$; окончательно для θ и w получим выражения:

$$\theta = \frac{1}{4}A_0 r^2 + c_2, \tag{3.1}$$

$$w = -\frac{1}{64}A_0 r^4 - \frac{1}{4}c_2 r^2 + \frac{1}{4}A_1 r^2 + b_2. \tag{3.2}$$

Для формулировки граничных условий понадобится вектор θ_α; примем для него представление $\theta_\alpha = u(r)x_\alpha$ и составим уравнение $\partial\theta_\alpha/\partial x_\alpha = \theta$: с учетом выражения (3.1) получим для $u(r)$ уравнение:

$$ru' + 2u = \frac{1}{4}A_0 r^2 + c_2.$$

Ограничение при $r=0$ решение этого уравнение имеет вид:

$$u = \frac{A_0}{16}r^2 + \frac{1}{2}c_2. \tag{3.3}$$

Итак, прогиб w и вектор θ_α определены с точностью до двух постоянных b_2 и c_2, которые находятся из граничных условий. Рассмотрим два случая: заделка, шарнирная опора.

а. Край $r=a$ жестко закреплен: $w(a)=0, \theta_\alpha(a)=0$.

Последнее условие будет выполнено, если $u(a)=0$; из выражения (3.3) находим $c_2 = -A_0 a^2/8$. Подставим это в (3.2) и выполним условие $w(a)=0$; определим b_2:

$$b_2 = -\frac{1}{64}A_0 a^4 - \frac{1}{4}A_1 a^2.$$

Окончательно для прогиба $w(r)$ будем иметь:

$$w = -\frac{1}{64}A_0(a^2-r^2)^2 - \frac{1}{4}A_1(a^2-r^2).$$

Подставим сюда значения параметров A_0 и A_1, выразив предварительно константы Ламе λ и μ через модуль Юнга Е и коэффициент Пуассона ν, получим:

$$\frac{w}{h} = -\frac{12(1-\nu^2)p}{64E}\cdot\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{(a^2-r^2)^2}{h^4} - \frac{(1+\nu)p}{4E}\frac{a^2-r^2}{h^2}. \tag{3.4}$$

Заметим, что второе слагаемое имеет порядок h^2/a^2 по отношению к первому и в случае достаточно тонких пластин им можно пренебречь. Для сравнения запишем формулу «классической» теории:

$$\frac{w_{кл}}{h} = \frac{12(1-\nu^2)p}{64E}\frac{(a^2-r^2)^2}{h^4}.$$

Отношение $w_{кл}/w$ по главному слагаемому в (3.4) будет равно:

$$\left|\frac{w_{кл}}{w}\right| \cong \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} = 1+\frac{\nu^2}{1-2\nu}.$$

Как видно, оно существенно зависит от коэффициента Пуассона ν .

б. На границе $r=a$ выполнено условие шарнирной опоры. Это первая смешанная краевая задача, на границе $\Gamma(r=a)$ заданы нулевые значения вектора $M=\{M_1, M_2\}$ и перемещения w; при этом $M_\alpha = M_{\alpha\beta}n_\beta, n_\beta, n_\beta$ – компоненты вектора внешней нормали к контуру, в нашем случае $n_1 = x_1/a,\ n_2 = x_2/a$. Выпишем тензор $M_{\alpha\beta}$:

$$M_{11}=\frac{h^2}{3}\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right);\ M_{12}=\frac{h^2}{3}\mu\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}\right);M_{22}=\frac{h^2}{3}\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right).$$

Граничные условия теперь запишутся следующим образом:

$$w(a)=0, \qquad (3.5)$$

$$\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right)_{r=\alpha}\cdot\frac{x_1}{a}+\mu\cdot\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}\right)_{r=\alpha}\cdot\frac{x_2}{a}=0,$$

$$\left(\lambda\theta+2\mu\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2}\right)_{r=\alpha}\cdot\frac{x_2}{a}+\mu\cdot\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\theta_1}{\partial x_2}\right)_{r=\alpha}\cdot\frac{x_1}{a}=0. \qquad (3.6)$$

Образуем выражения $\partial\theta_\alpha/\partial x_\beta$, пользуясь выражением (3.3) и формулами $\theta_\alpha = ux_\alpha$; подставив все в (3.6), легко убедимся в том, что оба равенства сведутся к одному, из которого определится постоянная интегрирования c_2 :

$$c_2=-\frac{1}{8}A_0a^2\frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

Подставим это значение c_2 в формулу (3.2) и выполним условие $w(a)=0$. Определим отсюда b_2 :

$$b_2=-\frac{A_0}{64}\frac{3\lambda+5\mu}{\lambda+\mu}a^4-\frac{A_1}{4}a^2.$$

Подставим в выражение (3.2) значения параметров A_0 и A_1 и найденных констант c_2, b_2 ; получим окончательно:

$$\frac{w}{h}=-\frac{12p}{64(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{a^2-r^2}{h^4}\left(\frac{3\lambda+5\mu}{\lambda+\mu}a^2-r^2\right)-\frac{p}{4\mu}\cdot\frac{(a^2-r^2)}{h^2}. \qquad (3.7)$$

Как и в первом случае обнаруживаем, что второе слагаемое имеет порядок u^2/a^2 по сравнению с первым. Для сравнения приведем формулу «классической» теории:

$$\frac{w_{кл}}{h}=\frac{12p(1-\nu^2)}{64E}\frac{a^2-r^2}{h^4}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2-r^2\right).$$

Предварительно выразив в (3.7) λ и μ через E и ν

$$\frac{3\lambda+5\mu}{(\lambda+2\mu)(\lambda+\mu)}=\frac{1}{E}\frac{(5-4\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu},$$

получим (по первому слагаемому в (3.7)):

$$\frac{w_{кл}(0)}{w(0)}\cong\frac{5+\nu}{(5-4\nu)(1+\nu)}\cdot\left(1+\frac{\nu^2}{1-2\nu}\right)=\left[\frac{1}{1-\nu^2}\left(1-\frac{\nu^2}{5-4\nu}\right)\right]\left(1+\frac{\nu^2}{1-2\nu}\right).$$

Здесь принято: $w=w(x),\ \theta_1=\theta_1(x),\ p=p(x),\ \theta(x)=\partial\theta_1/\partial x$.

Из второго уравнения (3.9) определим $\partial^2 w/\partial x^2$ и подставим в первое. В результате получим:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{12p(x)}{(\lambda+2\mu)h^3}.$$

Дважды интегрируя, будем иметь:

$$\theta=\frac{\partial\theta_1}{\partial x}=\frac{12}{(\lambda+2\mu)h^3}\int dx\int p(x)dx+c_1x+c_2.$$

Отсюда находим $\theta_1(x)$:

$$\theta_1(x)=\frac{12}{(\lambda+2\mu)h^3}\int dx\int dx\int p(x)dx+\frac{1}{2}c_1x^2+c_2x+c_3.$$

Из второго уравнения (3.9) определим $\partial w/\partial x$ и проинтегрируем, найдем:

$$w=-\int\theta_1(x)dx+\frac{(\lambda+2\mu)h^2}{12\mu}\theta(x)+c_4.$$

Произвольные постоянные c_k находятся из граничных условий, которые могут быть произвольными.

В третьем примере рассмотрим изгиб прямоугольной пластины, шарнирно опертой по краям. В плоскости x_1,x_2 пластина занимает область $\Gamma:\{0\le x_1\le l;0\le x_2\le l/\beta\}$, толщину пластины обозначим h. Условия шарнирной опоры – это первая смешанная задача. Уравнения изгиба и граничные условия имеют вид:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\theta=\frac{12p}{h^3};\quad \Delta w+\theta=\frac{p}{\mu h}, \tag{3.10}$$

$$\Delta\theta_\alpha-\frac{12}{h^2}\theta_\alpha=\frac{r^2}{h^2}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha};\ \theta=\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\alpha};\theta_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\theta_\beta}{\partial x_\alpha}\right);\ M_{\alpha\beta}=\frac{h^2}{12}\left(\lambda\theta\delta_{\alpha\beta}+2\mu\theta_{\alpha\beta}\right);$$

$$x_1,x_2\in\Gamma: w=0;\ M_{\alpha\beta}n_\beta=0. \tag{3.11}$$

В дальнейшем изложении будем использовать безразмерные координаты, отнесенные к l, прогиб, отнесенный к h, и параметр θ, отнесенный к $1/l$; оставим за ним прежние обозначения.

Примем, что нагрузка распределена по закону $p=p_0\sin\pi x_1\sin\beta\pi x_2$, а кинематические параметры представлены формулами:

$$w=w_0\sin\pi x_1\sin\beta\pi x_2;\quad \theta_1=a_1\cos\pi x_1\sin\beta\pi x_2,$$

$$\theta_2=a_2\sin\pi x_1\cos\beta\pi x_2;\quad \theta=\theta_0\sin\pi x_1\sin\beta\pi x_2,$$

тогда граничные условия (3.11) при этом удовлетворяются, а из (3.10) определяются w_0,θ_0,a_1,a_2:

$$w_0=\frac{12p_0l^4}{\pi^4(1+\beta^2)^2(\lambda+2\mu)h^4}\left(1+\frac{h^2}{l^2}\frac{\lambda+2\mu}{12\mu}\right)=\frac{12p_0l^4(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi^4(1+\beta^2)^2h^4E(1-\nu)}\left(1+\frac{h^2}{l^2}\ \frac{1-\nu^2}{6(1+\nu)(1-2\nu)}\right), \tag{3.12}$$

$$\theta_0=\frac{12p_0l^3}{\pi^2(1+\beta^2)(1+2\mu)h^3};\quad a_2=\beta a_1, \tag{3.13}$$

$$a_1=\frac{12p_0l^3}{\pi^3(1+\beta^2)^2(\lambda+2\mu)h^3}+\frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\ \frac{p_0l}{\pi(1+\beta^2)h}. \tag{3.14}$$

Определим напряженное состояние $\sigma_{\alpha\beta}$; из соотношений Ламе, пользуясь выражениями (3.12)–(3.14) с сохранением в них главных слагаемых, получим:

$$\sigma_{11} = A\left(1 + \frac{\nu\beta^2}{1-\nu}\right)\sin\pi x_1 \sin\beta\pi x_2,$$

$$\sigma_{22} = A\left(\frac{\nu}{1-\nu} + \beta^2\right)\sin\pi x_1 \sin\beta\pi x_2, \qquad (3.15)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = A\beta\frac{1-2\nu}{1-\nu}\cos\pi x_1 \cos\beta\pi x_2,$$

здесь обозначено $A = 12 p_0 l^2 x_3 \Big/ \left(\pi^2 (1+\beta^2)^2 h^2\right)$.

Для сравнения приведем соответствующие выражения для w^k и $\sigma^k_{\alpha\beta}$, которые следуют из классической теории:

$$w^k = \frac{12 p_0 l^4 (1-\nu^2)}{\pi^4 (1+\beta^2)^2 E h^4}\sin\pi x_1 \sin\beta\pi x_2, \qquad (3.16)$$

$$\sigma^k_{11} = A(1+\beta^2\nu)\sin\pi x_1 \sin\beta\pi x_2,$$

$$\sigma^k_{22} = A(\beta^2+\nu)\sin\pi x_1 \sin\beta\pi x_2, \qquad (3.17)$$

$$\sigma^k_{12} = A\beta\cos\pi x_1 \cos\beta\pi x_2.$$

Из сравнения (3.16) и (3.12) по главному слагаемому получаем:

$$\frac{w^k}{w_0 \sin\pi x_1 \sin\beta\pi x_2} = 1 - \frac{\nu^2}{(1-\nu)^2}.$$

Из сравнения (3.17) и (3.15) следует:

$$\frac{\sigma^k_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{(1+\beta^2\nu)(1-\nu)}{1-\nu+\beta^2\nu};\ \frac{\sigma^k_{22}}{\sigma_{22}} = \frac{(\beta^2+\nu)(1-\nu)}{\beta^2(1-\nu)+\nu};\ \frac{\sigma^k_{12}}{\sigma_{12}} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}.$$

В частности в прямоугольной пластине $(\beta = 1)$ имеем:

$$\frac{\sigma^k_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{\sigma^k_{22}}{\sigma_{22}} = 1 - \nu^2.$$

Как видно из примеров, прогибы и касательные напряжения пластины, определяемые по развитой теории, существенно зависят от коэффициентов Пуассона и больше, чем доставляемые классической теорией. Нормальные напряжения слабо зависят от ν и мало отличаются от таковых в теории Киргоффа–Лява.

Замечание. Приведенное решение очевидным образом обобщается на случай нагрузки, представляемой рядом: $p(x,y) = p_0 a_{mu} \sin m\pi x_1 \sin\beta\pi\pi x_2$.

4. Колебания и флаттер

Запишем уравнения свободных колебаний пластины (h обозначает полную толщину):

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha\right) = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (4.1)$$

$$\frac{h^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} + \mu\Delta\theta_\alpha - \rho\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}\right] - \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha\right) = 0.$$

Из первого уравнения, выполнив дифференцирование, получим:

$$\Delta w + \theta = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (4.2)$$

Второе из уравнений (4.1) продифференцируем по x_1, третье – по x_2 и сложим, будем иметь:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\theta-\mu\frac{12}{h^2}\left(\Delta w+\theta\right)=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,. \qquad (4.3)$$

На основании (4.2) это уравнение может быть представлено в виде:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\theta=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t}+\frac{12}{h^2}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,. \qquad (4.4)$$

Обозначим $c_1=\left((\lambda+2\mu)/\rho\right)^{1/2}$, $c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$ и положим $\theta=\theta_0(x_1,x_2)\exp(i\omega t)$, $w=w_0(x_1,x_2)\exp(i\omega t)$; из (4.2) и (4.4) получим:

$$\Delta w_0+\theta_0+\frac{\omega^2}{c_2^2}w_0=0\,, \qquad (4.5)$$

$$\Delta\theta_\alpha+\frac{\omega^2}{c_1^2}\cdot\theta_0+\frac{12\omega^2}{h^2c_1^2}w_0=0\,. \qquad (4.6)$$

Примем $\theta_\alpha=\theta_{0\alpha}(x_1,x_2)\exp(i\omega t)$ и подставим во второе уравнение (4.1), будем иметь:

$$\frac{h^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta_0}{\partial x_\alpha}+\mu\Delta\theta_{0\alpha}+\rho\omega^2\theta_{0\alpha}\right]-\mu\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_\alpha}+\theta_{0\alpha}\right)=0\,. \qquad (4.7)$$

Если общее решение системы (4.5), (4.6) относительно w_0,θ_0 найдено, то уравнения (4.7) служат для определения $\theta_{0\alpha}$. При однородных граничных условиях получаем, таким образом, задачу о собственных значениях.

Систему (4.5) – (4.7) можно привести к другому виду. Как и в первой части работы, положим:

$$\theta_{01}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_0}{\partial x_2};\ \theta_{02}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}\,,$$

здесь: φ_0,ψ_0 – функции координат x_1,x_2. Будем иметь:

$$\theta_0=\frac{\partial\theta_{0\alpha}}{\partial x_\alpha}=\Delta\varphi_0;\quad \frac{\partial\theta_{01}}{\partial x_2}-\frac{\partial\theta_{02}}{\partial x_1}=\Delta\psi_0\,. \qquad (4.8)$$

Подставив первое из этих уравнений в (4.5), получим:

$$\Delta w_0+\Delta\varphi_0+\frac{\omega^2}{c_2^2}w_0=0\,. \qquad (4.9)$$

Аналогично предыдущему из (4.7) будем иметь:

$$\Delta\varphi_0+\frac{\omega^2}{c_1^2}\varphi_0-\frac{12\mu}{(\lambda+2\mu)h^2}(w_0+\varphi_0)=H_1(x_1,x_2)\,. \qquad (4.10)$$

Здесь $H_1(x_1,x_2)$ – произвольная гармоническая функция. Первое из уравнений (4.7) продифференцируем по x_2, второе – по x_1 и вычтем одно из другого, придем к уравнению:

$$\Delta\psi_0-\frac{12}{h^2}\psi_0+\frac{\omega^2}{c_2^2}\psi_0=H_2(x_1,x_2)\,, \qquad (4.11)$$

здесь: $H_2(x_1,x_2)$ – также произвольная гармоническая функция.

Окончательно, таким образом, имеем три уравнения (4.9) – (4.11) относительно трех функций w_0,φ_0,ψ_0; заметим, что уравнение (4.11) относительно ψ_0 выделяется. Уравнения (4.10), (4.11) могут быть упрощены, если принять во внимание следующие оценки. В реально используемых металлических пластинках $h\sim10^{-3}м$, при этом $\omega\sim(10^2\sim10^3)\ \text{с}^{-1}$, $c_2\sim10^3$ м·с поэтому имеем $\mu/(\lambda+2\mu)=c_2^2/c_1^2)$:

$$\frac{\omega_0^2}{c_1^2}\cdot\frac{\lambda+2\mu}{12\mu}h^2=\frac{\omega^2h^2}{12c_2^2}\sim 10^{-7}<<1.$$

Уравнения (4.10), (4.11) можно поэтому в первом приближении записать в виде:

$$\Delta\phi_0-\frac{12\mu}{(\lambda+2\mu)h^2}(w_0+\varphi_0)=H_1, \qquad (4.12)$$

$$\Delta\psi_0-\frac{12}{h^2}\psi_0=H_2. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Колебания полосы при цилиндрическом изгибе.

Полоса занимает область $0\le x_1\le l, |x_2|<\infty; w=w(x_1,t), \theta_1=\theta_1(x_1,t), \theta_2=0$. Уравнения движения примут вид ($x_1=x$):

$$\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta_1}{\partial x}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}, \qquad (4.14)$$

$$\frac{h^2}{12}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\right]-\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\theta_1\right)=0.$$

Отнесем координату x к l, оставив за ней прежнее значение, примем $w=w_0(x)\exp(i\omega t),\ \theta_1\theta_{01}(x)\exp(i\omega t)$; после подстановки в (4.14) получим:

$$\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}+\frac{l}{h}\frac{\partial\theta_{01}}{\partial x}+\Omega^2w_o=0, \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2\theta_{01}}{\partial x^2}-\frac{12lc_2^2}{hc_1^2}\frac{\partial w_0}{\partial x}-\frac{12l^2c_2^2}{h^2c_1^2}\theta_{01}+\frac{c_2^2}{c_1^2}\Omega^2\theta_{01}=0,$$

здесь приняты обозначения $c_1^2=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho};\ c_2^2=\dfrac{\mu}{\rho};\ \Omega=\dfrac{l\omega}{c_c}$.

На краях полосы $x=0, x=1$ примем условия шарнирной опоры:

$$x=0, x=1,\ w_0=0,\ \frac{\partial\theta_{01}}{\partial x}=0\ \left(M_{11}=0\right).$$

Решение системы (4.15) при этом может быть принято в виде:

$$w_0=a_1\sin n\pi x,\ \ \theta_{01}=a_2\cos n\pi x.$$

Подставив это в (4.15), получим:

$$(\Omega^2-n^2\pi^2)a_1-\frac{l}{h}n\pi a_2=0,\ \frac{12lc_2^2}{hc_1^2}n\pi a_1+\left(n^2\pi^2+\frac{12l^2c_2^2}{h^2c_1^2}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\Omega^2\right)a_2=0.$$

Определитель этой системы, приравненный к нулю, доставляет характеристическое уравнение:

$$\Omega^4-\left(N^2+n^2\pi^2(1+\delta n^2\right)\Omega^2+n^4\pi^4\delta^2=0, \qquad (4.16)$$

здесь обозначено $N^2=12l^2/h^2,\ \delta^2=c_1^2/c_2^2$. Запишем дискриминант уравнений (4.16):

$$\Delta=N^4\left(1+\frac{2n^2\pi^2(1+\delta^2)}{N^2}+\frac{n^4\pi^4(1-\delta^2)^2}{N^4}\right). \qquad (4.17)$$

При обычных значениях $l/h\sim(10^2\div10^3)$ и вплоть до $n\sim10$ будем иметь $(n^2\pi^2/N^2)\sim10^{-2}\div10^{-4}$, что позволяет разложить $\sqrt{\Delta}$ в быстро сходящийся ряд:

$$\sqrt{\Delta} \cong N^2\left(1+\frac{n^2\pi^2(1+\delta^2)}{N^2}-2\frac{n^4\pi^4\delta^2}{N^4}-\frac{n^6\pi^6(1+\delta^2)^3}{N^6}+...\right). \qquad (4.18)$$

Уравнение (4.16) имеет решением выражение:

$$\Omega^2=\frac{1}{2}\left(N^2+n^2\pi^2(1+\delta^2)\pm\sqrt{\Delta}\right).$$

Физическому смыслу задачи отвечает знак минус перед корнем. С учетом (4.18) окончательно получим:

$$\Omega^2 \cong \frac{n^4\pi^4\delta^2}{N^2}\left(1+\frac{n^2\pi^2\delta^2)^3}{4N^2\delta^2}\right). \qquad (4.19)$$

Видно, что поправка (второе слагаемое в скобках) к основному выражению для частоты может сказаться при вычислении высоких частот сравнительно толстой полосы. Выпишем выражение для квадрата частоты по классической теории пластин:

$$\Omega^2_{кл}=\frac{n^4\pi^4c_0^2}{N^2(1-v^2)c_2^2}, \quad c_0^2=E/\rho.$$

Удерживая в (4.19) основное слагаемое, получим для отношения $\Omega^2/\Omega^2_{кл}$ выражение:

$$\frac{\Omega^2}{\Omega^2_{кл}}=\frac{(1-v)^2}{1-2v}=1+\frac{v^2}{1-2v}. \qquad (4.20)$$

Прослеживается заметная зависимость этого отношения от коэффициента Пуассона (ср. п. 6, ч. I).

Пример 2. Колебания прямоугольной шарнирно опертой пластины.

В привычных обозначениях $x_1 \Rightarrow x, x_2 \Rightarrow y, h \Rightarrow h/2$ пластина занимает в плоскости xy область $S:\{0\le x\le l, 0\le y\le l/\beta\}$. Уравнения колебаний (4.1) распишем в координатном виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}-\frac{1}{c_2^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (4.21)$$

$$\frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial y}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}-\frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\theta_1\right)=0,$$

$$\frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\partial y}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}-\frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\theta_2\right)=0.$$

Введем безразмерные координаты, отнеся их к ℓ и оставив прежние обозначения, положим $w=w_0(x,y)\exp(i\omega t), \theta_1=\theta_{10}(x,y)\exp(i\omega t), \theta_2=\theta_{02}(x,y)\exp(i\omega t)$. Граничные условия будут удовлетворены, если для $w_0, \theta_{10}, \theta_{20}$ принять выражения:

$w_0=b_0\sin n\pi x\cdot\sin\beta m\pi y;\quad \theta_{10}=b_1\cos n\pi x\cdot\sin\beta m\pi y;\ \theta_{20}=b_2\sin n\pi x\cdot\cos\beta m\pi y$, (4.22)

подставив это в уравнения (4.21), получим систему однородных уравнений:

$$\begin{gathered}b_{11}b_0+b_{12}b_1+b_{13}b_2=0,\\ b_{21}b_0+b_{22}b_1+b_{23}b_2=0,\\ b_{31}b_0+b_{32}b_1+b_{33}b_2=0,\end{gathered} \qquad (4.23)$$

матрица $\{b_{ks}\}$ имеет своими элементами выражения:

$$b_{11}=\pi^2\left(n^2+\beta^2m^2\right)-\Omega^2;\ b_{12}=\frac{12\ell}{h}\pi n;\ b_{13}=\frac{\ell}{h}\pi\beta m;$$

$$b_{21}=\frac{12\ell}{h}\pi n;\ b_{22}=\pi^2\left(\delta^2n^2+\beta^2m^2\right)+\frac{12\ell}{h^2}-\Omega^2;$$

$$b_{23} = \beta_1\beta\pi^2 mn;\ b_{31} = \frac{12\ell}{h}\beta\pi m;\ \beta_{32} = \beta_1\beta\pi^2 mn;\ b_{33} = \pi^2\left(\delta^2\beta^2 m^2 + n^2\right) + \frac{12\ell^2}{h^2} - \Omega^2.$$

Здесь обозначено $\beta_1 = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}; \delta^2 = \dfrac{c_1^2}{c_2^2} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu} = \beta_1 + 1 > 1$.

Введем еще обозначения $\Omega^2 = z,\ b_{ii} = a_{ii} - z$, тогда характеристическое уравнение системы (4.23) запишется в виде кубического уравнения:

$$z^3 - B_2 z^2 + B_1 z + B_0 = 0, \tag{4.24}$$

в котором $B_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} > 0$, знаки остальных коэффициентов зависят от чисел n, m и других параметров пластины. По правилу Декарта можно, следовательно, утверждать, что, по крайней мере, один положительный корень уравнение (4.24) имеет.

Приведем другое (частное) решение задачи, основанное на системе (4.2), (4.3) для функций w и θ, вопрос о полноте решения (т.е. об определении θ_1 и θ_2) рассмотрим дальше.

Из формул (4.21) с учетом (4.22) для $\theta(x,y)$ в безразмерных координатах получим:

$$\theta(x,y) = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial\theta_{10}}{\partial x} + \frac{\partial\theta_{20}}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\ell}(b_1 n\pi + b_2 m\beta\pi)\sin n\pi x\cdot\sin\beta m\pi y \equiv b_0^*\sin n\pi x\cdot\sin\beta m\pi y;$$

для w_0 примем первое из выражений (4.22). Из (4.2) и (4.3) последует:

$$b_0\left(a_0 - \Omega^4\right) - b_0^*\frac{\ell}{h} = 0,\ \ a_0 = \pi^2(n^2 + \beta^2 m^2),$$

$$-\beta\frac{h}{\ell}a_0 b_0 + b_0^*\left(a_0\delta^2 + B - \Omega^2\right) = 0,\ B = 12\ell^2/h^2.$$

Определитель этой системы, приравненный к нулю, доставляет характеристическое уравнение:

$$\Omega^4 - \left(B + a_0(1+\delta^2)\right)\Omega^2 + a_0^2\delta^2 = 0,$$

и его решение:

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}\left\{B + a_0(1+\delta^2) \pm \left[\left(B + a_0(1+\delta^2)\right) - 4a_0^2\delta^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{4.25}$$

Простыми оценками нетрудно показать, что для реальных размеров пластины и для невысоких частот $(n,m < 10)$ отношение $a_0(1+\delta^2)/B$ – малый параметр, учтем еще, что физическому смыслу задачи отвечает знак минус перед корнем; в первом приближении из (4.25) получим:

$$\Omega \cong \frac{a_0\delta}{\sqrt{B}}\left(1 - \frac{a_0(1+\delta^2)}{2B}\right).$$

Сравним этот результат с тем, который дает классическая теория:

$$\Omega_{кл} = \frac{\ell\omega_{кл}}{c_0} = \frac{a_0}{\sqrt{B(1-\nu^2)}},\quad c_0^2 = E/\rho.$$

В главном приближении по малому параметру получаем:

$$\frac{\Omega}{\Omega_{кл}} \cong \delta\sqrt{1-\nu^2},\ \ \frac{\omega}{\omega_{кл}} = \frac{c_1}{c_0}\sqrt{1-\nu^2} = \frac{1-\nu}{\sqrt{1-2\nu}}.$$

Это соотношение совпадает с выражением (4.20) из первого примера.

Определение функций θ_1 и θ_2 сводится, как это следует из соотношений (4.22), к вычислению коэффициентов b_1 и b_2. Первое соотношение между b_1 и b_2 получим из определения θ, поскольку оно определено через множитель b_0^*; в безразмерных величинах получим:

$$nb_1 + \beta mb_2 = -\frac{\ell}{\pi} b_0^* .$$

Второе соотношение получим как следствие уравнений (4.1): первое продифференцируем по x_2, второе – по x_1 и вычтем одно из другого. В безразмерных величинах будем иметь:

$$\beta mb_1 - nb_2 = 0; \quad a_0 + B - \Omega^2 = 0 .$$

Второе равенство невозможно, поэтому окончательно имеем:

$$b_1 = -\frac{n\ell b_0^*}{\pi\left(n^2 + B^2 m^2\right)}; \qquad b_2 = -\frac{\beta m \ell b_0^*}{\pi\left(n^2 + \beta^2 m^2\right)} .$$

Пример 4. Флаттер полосы при продольном обтекании. Флаттер бесконечно длинной полосы, которая обтекается потоком, направленным вдоль ее кромок, – это одна из тестовых задач, которая в классической постановке (теория пластин Кирхгофа–Лява и формула поршневой теории для избыточного давления) имеет точное формульное решение. Представляется естественным привести решение этой задачи в рамках предложенной теории. Полоса занимает (в привычных обозначениях $x_1 \Rightarrow x_2, x_2 \Rightarrow y$) область $S:\left\{|x| < \infty, 0 \le y \le \ell\right\}$. Края $y = 0, y = \ell$ примем шарнирно опертыми, в бесконечности прогиб w и «повороты» θ_1, θ_2 ограничены. Эти условия будут удовлетворены, если принять (в безразмерных координат x, y, отнесенных к ℓ):

$$w = c_0(t)\sin\pi y e^{-i\alpha x}; \; \theta_1 = c_1(t)\sin\pi y e^{-i\alpha x}; \; \theta_2 = c_2(t)\cos\pi y e^{-i\alpha x} \qquad (4.26)$$

тогда выражение для $\theta = \left(\partial\theta_1/\partial x + \partial\theta_2/\partial y\right)/\ell$ примет вид:

$$\theta = \frac{1}{\ell}\left(-iac_1 \sin\pi y - \pi c_2 \sin\pi y\right)e^{-i\alpha x} = c_3(t)\sin\pi y e^{-i\alpha x} \qquad (4.27)$$

Запишем (в безразмерном виде) систему (4.2), (4.3), приняв для избыточного давления формулу поршневой теории, в результате получим:

$$\Delta w + \frac{\ell}{h}\theta - \frac{\ell^2}{c_2^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0 \ell}{\mu h}\left(\frac{\ell}{a_0}\frac{\partial w}{\partial t} + M\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 ,$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\Delta\theta - 12\frac{\ell^2}{h^2}\left(\frac{h}{\ell}\Delta w + \theta\right) - \frac{\ell^2}{c_2^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 .$$

Примем $c_0 = a_1 \exp(i\omega t), c_3 = a_2 \exp(i\omega t)$ и подставим это вместе с (4.26), (4.27) в последнюю систему, в результате получим:

$$a_1\left[\pi^2 + a^2 - \Omega^2 - ia_1'\left(\Omega - aM_0\right)\right] - a_2\frac{\ell}{h} = 0, \; a_1' = \frac{\gamma p_0 \ell^2 c_2}{\mu a_0 h^2} , \qquad (4.28)$$

$$a_1 12\frac{\ell}{h}(\pi^2 + a^2) - a_2\left[\delta^2(\pi^2 + a^2) + 12\frac{\ell^2}{h^2} - \Omega^2\right] = 0 .$$

Здесь, как и раньше, обозначено $\Omega = l\omega/c_2, \delta^2 = (\lambda + 2\mu)/\mu$ и положено $M_0 = Ma_0/c_2$. Определитель системы (4.28) запишем в виде: $\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2$, поэтому характеристическое уравнение распадается на два: $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$, где обозначено:

$$\Delta_2 = a_1'(\Omega - aM_0)\left[\delta^2(\pi^2 + a^2) + 12\frac{\ell^2}{h^2} - \Omega^2\right],$$

$$\Delta_1 = \left(\pi^2 + a^2 - \Omega^2\right)\left[\delta^2(\pi^2 + a^2) + 12\frac{\ell^2}{h^2} - \Omega^2\right] - 12\frac{\ell^2}{h^2}(\pi^2 + a^2).$$

Из уравнения $\Delta_2 = 0$ следует $\Omega - aM_0 = 0$, либо $\delta^2(\pi^2 + a^2) + 12\ell^2 / h^2 = \Omega^2$; из второго уравнения для Ω получаем нереально высокие частоты, поэтому принимаем $\Omega = a_0 M_0$, что вполне аналогично классическому результату. Из уравнения $\Delta_1 = 0$ получаем квадратное уравнение для $z = \Omega^2$:

$$z^2 - \left[(1+\delta^2)a_0^2 + B\right]z + \delta^2 a_0^4 = 0.$$

Здесь обозначено $a_0^2 = \pi^2 + a^2$, $B = 12l^2 / h^2$. Запишем решение последнего уравнения:

$$z = \frac{1}{2}\left((1+\delta^2)a_0^2 + B \pm \left[\left((1+\delta^2 a_0^2) + B\right)^2 - 4\delta^2 a_0^4\right]^{1/2}\right).$$

В силу соображений, высказанных выше, и вследствие очевидной оценки $(1+\delta^2)a_0^2 / B << 1$ для $\Omega = \sqrt{z}$ получим представление с точностью до слагаемых второго порядка малости:

$$\Omega \cong \frac{\delta\, a_0^2}{\sqrt{B}}\left(1 - \frac{(1+\delta^2)a_0^2}{2B}\right). \qquad (4.29)$$

Заметим, что второе слагаемое в скобках дает поправку не более процента.

С учетом соотношений $\Omega = aM_0$ и $M_0 = Ma_0 / c_2$ из выражения (4.29) имеем для M в главном приближении:

$$M = \frac{\pi^2 + a^2}{a}\,\frac{c_1}{a_0}\,\frac{h}{2\sqrt{3}\,\ell}\ .$$

Аналогичное выражение в классической теории имеет вид:

$$M_{кл} = \frac{\pi^2 + a^2}{a}\,\frac{c_0}{a_0}\,\frac{h}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}\ \ell},\ c_0^2 = E / \rho.$$

Для отношения $M / M_{кл}$ получим:

$$\frac{M}{M_{кл}} = \left(\frac{(1+2\mu)(1-\nu^2)}{\mu}\right)^{1/2} = \frac{1-\nu}{\sqrt{1-2\nu}}.$$

В таком же отношении будут находиться и критические скорости флаттера.

Пример 4. Флаттер полосы при поперечном обтекании (цилиндрический изгиб).

Полоса занимает область $0 \le x \le \ell, |y| < \infty$; края $x = 0,\ x = \ell$ шарнирно оперты, $w = w(x,t),\ \theta_1 = \theta_1(x,t),\ \theta_2 = 0$. Принимаем, что избыточное давление определено формулой поршневой теории, тогда уравнения колебаний полосы примут вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma\rho_0}{\mu a_0 h}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v_0\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\delta^2\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_1\right) - \frac{1}{c_2^2}\,\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t} = 0. \qquad (4.30)$$

Положим $w = W(x)\exp(i\omega t),\ \theta_1 = \theta_{10}\exp(i\omega t)$ и запишем систему (4.30) в безразмерных координатах и параметрах:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\ell}{h}\,\frac{\partial \theta_{10}}{\partial x} + \Omega_0^2 W + A_0\left(i\Omega_0 W + M_0\frac{\partial W}{\partial x}\right) = 0. \qquad (4.31)$$

Здесь обозначено $A_0 = \gamma\rho_0 c_2 \ell / (\mu a_0 h)$, остальные обозначения – те же, что и в предыдущем параграфе.

Построим решение в двухчленном приближении по Бубнову–Галеркину. Граничные условия будут удовлетворены, если принять $W = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x,\ \theta_{10} = b_1 \cos \pi x + b_2 \cos 2\pi x$.

Из второго уравнения (4.31) найдем:

$$b_1 = -a_1 \frac{A_1}{B_1};\ b_2 = -a_2 \frac{2A_1}{B_2};\ \ A_1 = \pi B \frac{h}{l};\ B_1 = B + \delta^2\pi^2 - \Omega_0^2;\quad B_2 = B + 4\delta^2\pi^2 - \Omega_0^2. \quad (4.32)$$

Из первого уравнения (4.31) после известной проекционной процедуры придем к системе из двух однородных уравнений относительно параметров a_1, a_2:

$$a_1\left(\pi^2 - \frac{\pi^2 B}{B_1} - iA_0\Omega_0 - \Omega_0^2\right) + a_2 \frac{8}{3} A_0 M_0 = 0,$$

$$a_1 \frac{8}{3} A_0 M_0 + a_2\left(4\pi^2 - \frac{4\pi^2 B}{B_2} - iA_0\Omega_0 - \Omega_0^2\right) = 0.$$

Выделим в характеристическом уравнении этой системы мнимую и действительную части, в результате получим два уравнения относительно Ω_0 и M_0:

$$5\pi^2 - 2\Omega_0^2 - \pi^2 B\left(\frac{1}{B_1} + \frac{4}{B_2}\right) = 0, \qquad (4.33)$$

$$\left(\frac{8}{3}A_0 M_0\right)^2 + \left(\pi^2 - \frac{\pi^2 B}{B_1} - \Omega_0^2\right)\left(4\pi - \frac{4\pi^2 B}{B_2} - \Omega_0^2\right) - A_0^2\Omega_0^2 = 0.$$

Как видим, уравнения разделились: из первого определяется Ω_0, после этого из второго – M_0. Для определения Ω_0^2, если учесть выражения для B_1 и B_2, имеем полное кубическое уравнение, решение которого в радикалах практически не поддается аналитическому исследованию. Найдем приближенное решение разложением по малому параметру $B^{-1} = h^2/(12l^2)$, который при обычном отношении $\ell/h \sim 10^2$ имеет порядок $B^{-1} \sim 10^{-5}$. Запишем B_1 и B_2 в виде:

$$B_1 = B\left(1 + \frac{\delta^2\pi^2}{B} - \frac{\Omega_0^2}{B}\right),\ B_2 = B\left(1 + \frac{4\delta^2\pi}{B} - \frac{\Omega_0^2}{B}\right).$$

Подставим это в первое из уравнений (4.33) и оставим в коэффициентах слагаемые первого порядка малости в сравнении с основными; получим в результате $(\Omega_0^2 = z)$:

$$F(z) \equiv \frac{1}{B^2}z^3 - \frac{2}{B}\left(1 + \frac{5\pi^2(1+2\delta^2)}{4B}\right)z^2 + \left(1 + \frac{5\pi^2(3+2\delta^2)}{2B}\right)z - \frac{17}{2}\cdot\frac{\delta^2\pi^4}{B}\cdot\left(1 + \frac{2}{17}\frac{\delta^2}{B}\right) = 0. \quad (4.34)$$

Простой анализ показывает, что при $z \le 0,\ \mathrm{F}(z) < 0$, но $F(z') > 0,\ z' = 17c_0^2\pi^4/(2B)$, следовательно, вблизи точки z' слева от нее имеется корень $F(z_0) = 0$. Его приближенно, но с высокой точностью, можно найти, если в (4.34) пренебречь первым слагаемым; получим квадратное уравнение, которое запишем в виде (обозначения и порядки величин ε_k очевидны):

$$\frac{2}{B}(1+\varepsilon_1)z^2 - (1+\varepsilon_2)z + \frac{17\delta^2\pi^4}{2B}(1+\varepsilon_3) = 0.$$

Решение этого уравнения, имеющее механический смысл, запишем в виде:

$$z = \frac{17\delta^2\pi^4}{2B}\left(1 + \frac{2\delta^2}{17B} - \frac{5\pi^2(3+2\delta^2)}{2B}\right) \equiv z_0(1+\varepsilon), \qquad (4.35)$$

причем поправка ε, как показывает оценка, составляет не более процента, и ее можно не учитывать.

Подставим выражение для $z_0 = \Omega_0^2$ из (4.35) во вторую из формул (4.33); в главном приближении получим:

$$M_0^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left[\frac{17\delta^2\pi^4}{2B} + \left(\frac{15\delta^2\pi^4}{2BA_0}\right)^2\right]. \qquad (4.36)$$

Сравним найденные результаты с теми, которые получаются с использованием классической теории пластин. Уравнение колебаний в безразмерных координатах и параметрах имеет вид:

$$W^{1Y} - B(1-\nu^2)\Omega_1^2 W + B_0\left(i\Omega_1 W + M_1 W'\right) = 0 .$$

Приближенное решение в двухчленном приближении после простых вычислений приобретает форму:

$$\Omega_1^2 = \frac{17\pi^4}{2B(1-\nu^2)};\ M_1^2 = \frac{9}{67}\left[\frac{17\pi^4}{2B(1-\nu^2)} + \left(\frac{15\pi^4}{2B_0}\right)^2\right], \qquad (4.37)$$

здесь обозначено $\Omega_1^2 = \dfrac{\ell^2\omega^2}{c_0^2};\ B_0 = \dfrac{1`2(1-\nu^2)\gamma\rho_0 c_0 \ell^3}{Ea_0 h^3};\ M_1 = M\dfrac{a_0}{c_0}$.

Как видно, структура выражений (4.35), (4.36), (4.37) тождественна и, следовательно, качественно картина явления обеими теориями описывается одинаково; различие состоит в том, что параметры в формулах (4.35), (4.36) обнаруживают более заметную зависимость от коэффициента Пуассона.

5. Параметры подобия и моделирование

а. Статический изгиб.

Обозначим ℓ – характерный размер пластины, тогда безразмерные координаты будут $x_\alpha{}' = x_\alpha / \ell$; прогиб w отнесем к толщине, которую обозначим через $h : w' = w/h$, параметр θ отнесем к $\ell : \theta' = \theta/\ell$; параметры θ_α – безразмерные. Запишем систему (4.3), (4.4), (4.6) в безразмерном виде, отбросив штрихи у безразмерных координат и параметров:

$$\Delta\theta = \frac{12\ell^3}{h^3}\frac{\rho_0 p}{\mu}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \qquad (5.1)$$

$$\Delta w + \frac{\ell}{h}\theta = \frac{\rho_0 p}{\mu}\frac{\ell^2}{h^2}, \qquad (5.2)$$

$$\Delta\theta_\alpha - \frac{12\ell^2}{h^2}\theta_\alpha = \frac{\ell}{h}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha}, \qquad (5.3)$$

здесь: ρ_0 – характеристическое значение действующего на пластину давления, так что $p \Rightarrow \rho_0 p$.

Введем обозначения для безразмерных коэффициентов, опустив числовой множитель:

$$A_1 = \frac{\ell^3\rho_0 p}{h^3\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda+2\mu};\ A_2 = \frac{\ell}{h};\ A_3 = \frac{\rho_0 p}{\mu}\frac{\ell}{h^2};\ A_4 = \frac{\ell^2}{h^2};\ A_5 = \frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}+1 . \qquad (5.4)$$

Рассмотрим два процесса нагружения – условно натурный и модельный, каждый из которых описывается системой (5.1) – (5.3). Дополним эту систему однородными граничными условиями – для примера: закрепленный контур (задача в перемещениях):

$$w|_\Gamma = 0,\quad \theta_\alpha|_\Gamma = 0, \qquad (5.5)$$

или шарнирно опертый (первая смешанная задача):

$$w|_{\Gamma} = 0; \quad \mu_{\alpha\beta} n_{\beta}|_{\Gamma} = 0. \tag{5.6}$$

Легко видеть, что в граничных условиях (5.5), (5.6) не возникает новых параметров по сравнению с (5.4).

Если положить в обоих процессах коэффициенты из (5.4) равными $A_s^{н} = A_s^{м}$, то математические модели станут тождественными, следовательно, все безразмерные параметры в соответствующих точках натурного и модельного процессов совпадут. Такие процессы называются подобными, следствия из равенств $A_s^{н} = A_s^{м}$ – правилами (или условиями) моделирования.

Прежде всего, необходимо положить $p^{н}(x_1, x_2) = p^{м}(x_1, x_2)$. После этого из (5.4) становится очевидным, что независимыми условиями моделирования будут равенства:

$$\left(\frac{\ell}{h}\right)^{н} = \left(\frac{\ell}{h}\right)^{м}; \left(\frac{p_0}{\mu}\right)^{н} = \left(\frac{p_0}{\mu}\right)^{м}; \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{к} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{м}. \tag{5.7}$$

Обозначим $\ell^{н}/\ell^{м} = k, h^{н}/h^{м} = m$ – масштабное моделирование; из первого равенства (5.7) следует $k = m$, т.е. полное геометрическое подобие. Из последнего равенства (5.7) получаем $\left(v/(1-2n)\right)^{н} = v/\left(1-2v\right)^{м}$, откуда следует:

$$v^{м} = v^{н}. \tag{5.8}$$

С учетом этого равенства из второго условия (5.7) получаем:

$$\left(\frac{p_0}{E}\right)^{м} = \left(\frac{p_0}{E}\right)^{н}. \tag{5.9}$$

Из (5.8), (5.9) имеем две возможности:

а) $E^{м} = E^{н}$, $p_0^{м} = p_0^{н}$ – полное физическое моделирование (достаточные условия выполнения равенств $A_s^{м} = A_s^{н}$);

б) материал модельного процесса подобран так, что равенство (5.7) выполняется приближенно, но с допустимой точностью; модули Юнга при этом могут различаться заметно; тогда условием моделирования будет:

$$p_0^{м} = \frac{E^{м}}{E^{н}} p_0^{н}. \tag{5.10}$$

Замечание. В классической теории изгиба пластин прослеживается слабая зависимость решения от коэффициента Пуассона, поэтому во многих случаях можно ограничиться условием (5.10).

а. **Собственные колебания**

Систему уравнений (5.1) запишем в виде:

$$\Delta w + \theta \sim \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} + \Delta\theta_\alpha - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2} - \frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha\right).$$

Введем, так же, как и в предыдущем пункте, безразмерные координаты и параметры, исключим время множителем $\exp(wt)$, оставим за функциями прежние обозначения. Система запишется в форме:

$$\Delta w + \frac{\ell}{h}\theta - \Omega^2 w = 0; \ \Omega = \ell\omega/c_2, \ c_2^2 = \mu/\rho, \tag{5.11}$$

$$\Delta\theta_\alpha - \Omega^2\theta_\alpha + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} - 12\frac{\ell^2}{h^2}\left(\frac{h}{\ell}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha\right), \tag{5.12}$$

дополним ее однородными граничными условиями (5.6).

Как видно, в уравнениях (5.11), (5.12) содержится три независимых параметра:

$$A_1 = \frac{\ell}{h};\ A_2 = \Omega;\ A_3 = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (5.13)$$

Равенства $A_s^м = A_s^н,\ s = 1;2;3$ определяют условия подобия натурного и модельного процессов колебаний и правила моделирования.

$$A_1^м = A_1^н : \left(\frac{\ell}{h}\right)^м = \left(\frac{\ell}{h}\right)^н,\ k = m.$$

$$A_2^м = A_2^н : \Omega^м = \Omega^н,\ \frac{\omega^м}{\omega^н} = \frac{c_2^м}{c_2^н} k, \qquad (5.14)$$

$$A_3^м = A_3^н : \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^м = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^н,\ \nu^м = \nu^н.$$

Отсюда следуют две возможности:

а) пластины в натурном и модельном процессах геометрически подобны, материалы одинаковы; пересчет частот колебаний с модели на натуру проводится по второй из формул (3.14) при $c_2^м = c_2^н$:

$$\omega^H = \omega^M / k; \qquad (5.15)$$

б) пластины геометрически подобны; последнее из условий выполняется приближенно с достаточной точностью, по скорости c_2 различны; тогда пересчет частот колебаний проводится по второй формуле (5.14):

$$\omega^н = \frac{1}{k}\frac{c_2^н}{c_2^м}\omega^м. \qquad (5.16)$$

b. Панельный флаттер

Система уравнений имеет вид:

$$\Delta w + \theta \sim \frac{p}{\mu h} \sim \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} + \Delta\theta_\alpha - \frac{\rho}{\mu}\cdot\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2} - \frac{12}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha\right) = 0,$$

здесь ρ – избыточное давление, которое примем равным $\rho = -\frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x}\right)$.

Аналогично тому, как это сделано выше, и с учетом выражения для ρ, запишем основную систему в безразмерном виде:

$$\Delta w + \frac{\ell}{h}\theta + \frac{\gamma\rho_0\ell}{\mu h}\Omega w + \frac{\gamma\rho_0\ell}{\mu h}M\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{a_0^2}{c_2^2}\Omega^2 w = 0, \qquad (5.17)$$

$$\Delta\theta_\alpha - \frac{a_0^2}{c_2^2}\Omega^2\theta_\alpha + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} - \frac{12\ell^2}{h^2}\left(\frac{h}{\ell}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \theta_\alpha\right) = 0,$$

здесь, однако, обозначено $\Omega = \ell\omega / a_0$. Система (5.17) содержит безразмерные параметры:

$$A_1 = \frac{\ell}{h};\ A_2 = \frac{\gamma\rho_0}{\mu}\frac{\ell}{h}\Omega;\ A_3 = \frac{\gamma\rho_0}{\mu}\frac{\ell}{h}M;\ A_4 = \frac{a_0^2}{c_2^2}\Omega^2;\ A_s = \frac{\lambda+\mu}{\mu}.$$

Как и раньше, однородные граничные условия (5.6) не добавляют новых параметров.

Запишем равенства $A_s^м = A_s^н, s = 1;2;3;4;5$; дополнительно примем, что $\gamma^м = \gamma^н$. Последовательно будем иметь:

$$A_1^м = A_1^н : \left(\frac{\ell}{h}\right)^м = \left(\frac{\ell}{h}\right)^н; \ k = m,$$

$$A_2^м = A_2^н : \left(\frac{\rho_0}{\mu}\Omega\right)^м = \left(\frac{\rho_0}{\mu}\Omega\right)^н,$$

$$A_3^м = A_3^н : \left(\frac{\rho_0}{\mu}M\right)^м = \left(\frac{\rho_0}{\mu}M\right)^н,$$

$$A_4^м = A_4^н : \left(\frac{a_0}{c_2}\Omega\right)^м = \left(\frac{a_0}{c_2}\Omega\right)^н,$$

$$A_5^м = A_5^н : \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^м = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^н; \ v^м = v^н.$$

Следствия из выписанных равенств при $s = 1$ и $s = 5$ уже отмечены; положив дополнительно $M^м = \beta M^н$, из остальных получим:

$$\left(\frac{A_2}{A_3}\right)^м = \left(\frac{A_2}{A_3}\right)^н \Rightarrow \Omega^м = \beta\Omega^н, \qquad (5.18)$$

$$A_2^м = A_2^н \ или \ A_3^м = A_3^н \Rightarrow \beta\left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)^м = \left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)^н,$$

$$A_4^м = A_4^н \Rightarrow \left(\frac{a_0}{c_2}\right)^м \beta = \left(\frac{a_0}{c_2}\right)^н, \ \frac{c_2^м}{c_2^н} = \frac{a_0^м}{a_0^н}\beta.$$

Воспользуемся известным из газовой динамики соотношением:

$$\frac{a_0^м}{a_0^н} = \left(\frac{\rho_0^м}{\rho_0^н}\right)^\lambda, \ \ \lambda = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}.$$

Подставив это в последнее из равенств (5.18), получим:

$$\frac{c_2^м}{c_2^н} = \beta\left(\frac{\rho_0^м}{p_0^н}\right)^\lambda.$$

Из второго равенства (5.18) имеем:

$$\frac{\mu^м}{\mu_н} = \beta\frac{\rho_0^м}{\rho_0^н}. \qquad (5.19)$$

Исключим из последних двух уравнений $\rho_0^м / \rho_0^н$, получим:

$$\frac{\mu^м}{\mu^н} = \beta\left(\frac{1}{\beta}\frac{c_2^м}{c_2^н}\right)^{1/\lambda} = \beta^{-1/\varepsilon}\left(\frac{c_2^м}{c_2^н}\right)^{1/\lambda}, \ \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

После возведения обеих частей равенства в степень ε будет окончательно:

$$\beta\left(\frac{\mu^м}{\mu^н}\right)^\varepsilon = \left(\frac{c_2^м}{c_2^н}\right)^{\varepsilon/\lambda}, \quad \varepsilon/\lambda = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}. \qquad (5.20)$$

Для воздуха $\gamma = 1{,}4$, поэтому $\varepsilon = 1/6, \varepsilon/\lambda = 7/6$.

Возможности моделирования, как и в предыдущих случаях, ограничены равенством $v^м = v^н$; его точное выполнение практически влечет за собой равенство $\mu^м = \mu^н$; из (5.20) следует $\beta = 1$. Из (5.19) следует равенство параметров потока, из (5.18) – $\Omega^м = \Omega^н$, а из (5.16) при $c_2^м = c_2^н$ получаем правило пересчета частот колебаний.

Если же материалы натуры и модели таковы, что $\nu^м \cong \nu^н$, но модули разнятся заметно, то возможно нетривиальное моделирование: выбирая материал модели, из (5.20) определяется β, а из (5.19) – параметры ρ_0, a_0. По формуле (5.16) проводится пересчет частот колебаний, определяется скорость потока: $v^м = \beta a_0^м v^н / a_0^н$.

Замечание. Во всех случаях, когда выполняется приближенное равенство $\nu^м \cong \nu^н$, модуль сдвига может быть заменена на модуль Юнга, а сдвиговая скорость c_2 – на стержневую скорость $c_0 = \left(E/\rho\right)^{1/2}$.

Литература

1. Hencky H. Uber die Berucksichugung der Schubverzeirung in Platten// Jng. Arch. 1947. Bd. 16. H. 1. S. 72—76.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ// Изв. РАН МТТ. 1998. № 3. С. 46–58.