Алгебра электрического и слабого зарядов

к.т.н. доц. Калпина Н.Ю., к.т.н. доц. Кецарис А.А.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23 доб. 1149, 1305

Аннотация. В статье исследуется связь между законами умножения векторов в контравариантной алгебре Клиффорда и матрицами электрического и слабого зарядов. В результате устанавливается, что алгебры электрического и слабого зарядов могут рассматриваться как подалгебры контравариантной алгебры Клиффорда. Структурные постоянные контравариантной алгебры Клиффорда рассматриваются над множеством действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов.

Ключевые слова: матрицы электрического и слабого зарядов, контравариантная ассоциативная алгебра, алгебра Клиффорда, структурные постоянные, структурные матрицы.

Объединение электрического и слабого взаимодействий стало возможным благодаря введению электрослабой группы $U(1)\times SU(2)$ [1]. Здесь $U(1)$ – группа слабого гиперзаряда, а $SU(2)$ – группа слабого изоспина. Соответствующие этим группам алгебры электрического и слабого зарядов вводятся дополнительно алгебре Дирака. В настоящей работе ставится задача установления связи алгебр электрического и слабого зарядов с формализмом релятивистской квантовой механики. При этом нужно учесть, что в рамках указанного формализма ковариантная алгебра Клиффорда C сводится , в частном случае, к алгебре Дирака [2]. Отсюда следует, что, не выходя за рамки релятивистской квантовой механики, алгебры электрического и слабого зарядов можно связать с контравариантной алгеброй Клиффорда $\widetilde{C}$. Итак, в соответствии с нашим замыслом мы должны, пользуясь правилами умножения векторов в контравариантной алгебре Клиффорда $\widetilde{C}$, найти структурные матрицы этой алгебры. Затем среди этих матриц найти матрицы, соответствующие подалгебрам электрического и слабого зарядов. В том случае, если такие матрицы будут найдены, мы подтвердим вывод о том, что в формализме релятивистской квантовой механики содержится возможность описания электрослабых взаимодействий.

1. Присоединенное представление базисных векторов

Введем в рассмотрение контравариантную ассоциативную алгебру $\widetilde{C}$. Ее векторы запишем в следующем виде:

$$\Psi = \varepsilon_I \cdot \psi^I,$$

где: ε_I – базисные векторы, ψ^I – координаты контравариантного вектора.

Запишем закон умножения базисных векторов в алгебре $\widetilde{C}$ следующим образом:

$$\varepsilon_K \circ \varepsilon_I = \varepsilon_L \cdot C^L{}_{KI}. \qquad (1)$$

Здесь $C^L{}_{KI}$ структурные постоянные алгебры. Они рассматриваются в виде матриц, называемых структурными. Индекс I нумерует сами матрицы. Номер матрицы совпадает с номером правого базисного вектора. Индекс L нумерует строки, а индекс K – столбцы структурных матриц. Сравнивая закон умножения (1) с законом умножения базисных векторов для ковариантной алгебры Клиффорда C [2], отметим два существенных различия этих законов между собой. Они имеют разный порядок умножения базисных векторов. Для (1) базисный вектор с номером структурной матрицы занимает правое место в произведении, а для алгебры C базисный вектор с номером структурной матрицы занимает левое место в произведении базисных векторов. Базисные векторы ε_I в матричном виде изображаются вектором-строкой, а базисные векторы E^K изображаются вектором-столбцом.

Вполне естественно ожидать, что указанные отличия приведут к существенным отличиям структурных матриц рассматриваемой алгебры от структурных матриц ковариантной алгебры Клиффорда и матриц Дирака, в частности. Вместе с тем, с одной стороны, нужно понимать, что указанные отличия законов умножения являются в определенном смысле взаимно дополнительными. Поэтому следует ожидать, что структурные матрицы алгебр $\widetilde{C}$ и C также являются в некотором смысле взаимно дополнительными. С другой стороны, нужно помнить, что структурные матрицы алгебры C, в частном случае, представляют собой матрицы Дирака, ключевые для квантовой теории. Отсюда следует важный вывод: роль искомых нами структурных матриц алгебры $\widetilde{C}$ должна быть столь же существенна для релятивистской квантовой механики, как и матриц Дирака.

В соответствии с нашим общим замыслом необходимо для базисных векторов ε_I найти структурные матрицы $C^L{}_{KI}$, пользуясь (1) и правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда.

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора. Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером *I*, расположенного в строке с номером *K* и в столбце с номером *L*, необходимо базисный вектор, номер которого совпадает с номером столбца матрицы, умножить справа на базисный вектор, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер *L* указанного базисного вектора определит номер строки, на пересечении которой с рассматриваемым столбцом, необходимо поставить указанное численное значение проекции.

Теперь вычислим структурные матрицы $C^L{}_{KI}$ по приведенному алгоритму. В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, используется обозначение $\widetilde{C}_4$ вместо обозначения $\widetilde{C}$. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру алгебры $\widetilde{C}_4$ с тремя образующими базисными векторами (например, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) удобно обозначать $\widetilde{C}_3$.

Вычисления структурных матриц выполним для двух случаев:

1) алгебра $\widetilde{C}_3$ с тремя образующими базисными векторами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;
2) алгебра $\widetilde{C}_4$ с четырьмя образующими базисными векторами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

2. Контравариантная алгебра Клиффорда $\widetilde{C}_3$

2.1. Действительное представление

Обращение к матрицам Дирака [1] научило нас тому, что компоненты векторов и матриц необходимо рассматривать в следующей последовательности индексов:

(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).

Таким образом, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности:

$$\Psi = \varepsilon_{32} \cdot \psi^{32} + \varepsilon_{13} \cdot \psi^{13} + \varepsilon_{21} \cdot \psi^{21} + \varepsilon_0 \cdot \psi^0 + \varepsilon_1 \cdot \psi^1 + \varepsilon_2 \cdot \psi^2 + \varepsilon_3 \cdot \psi^3 + \varepsilon_{123} \cdot \psi^{123}. \qquad (3)$$

В результате получим действительные матрицы 8×8 присоединенного представления базисных векторов ε_I. Они приведены в разделе 2.4. Помимо действительного представления рассмотрим комплексное и кватернионное представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2.2. Комплексное представление

Остановимся на вопросе о представлении произведения алгебр Клиффорда. Алгебру Клиффорда $\widetilde{C}_n$ можно записать в виде произведения $\widetilde{C}_m \times \widetilde{C}_{(n-m)}$. И затем представить алгебру $\widetilde{C}_{(n-m)}$ как алгебру гиперчисел. Например, вектор (3) алгебры $\widetilde{C}_3$ можно записать в следующем виде:

$$\Psi = \varepsilon_{13}(\varepsilon_{21} \cdot \psi^{32} + \varepsilon_0 \cdot \psi^{13}) + \varepsilon_0(\varepsilon_{21} \cdot \psi^{21} + \varepsilon_0 \cdot \psi^0) + \varepsilon_2(\varepsilon_{21} \cdot \psi^1 + \varepsilon_0 \cdot \psi^2) + \varepsilon_{123}(\varepsilon_{21} \cdot \psi^{31} + \varepsilon_0 \cdot \psi^{123}).$$

Эта запись соответствует записи алгебры $\widetilde{C}_3$ в виде произведения $\widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_1$. Базисными векторами алгебры $\widetilde{C}_3$ являются ε_{13}, ε_0, ε_2, ε_{123}; базисными векторами алгебры $\widetilde{C}_1$ являются ε_{21}, ε_0. Пространство $\widetilde{C}_1$ можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору ε_{21} алгебры $\widetilde{C}_1$ поставим в соответствие мнимую единицу i с обратным знаком, имея в виду, что $sign\ \varepsilon_{21} = -1$, а базисному вектору ε_0 алгебры $\widetilde{C}_1$ поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры $\widetilde{C}_3$ в комплексном представлении:

$$\Psi = \varepsilon_{13}(i \cdot \psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_0(i \cdot \psi^{21} + \psi^0) + +\varepsilon_2(i \cdot \psi^1 + \psi^2) + \varepsilon_{123}(i \cdot \psi^{31} + \psi^{123}).$$

Комплексное представление дается матрицами 4×4, в которых блоки заменены базисными единицами 1 и i. Они приведены в раздел 2.4.

2.3. Кватернионное представление

Напомним, что кватернионы – это числа вида:

$$\alpha_0 \cdot q^0 + \alpha_1 \cdot q^1 + \alpha_2 \cdot q^2 + \alpha_3 \cdot q^3,$$

где: α_0, α_1, α_2, α_3 – действительные числа, а q^0, q^1, q^2, q^3 – базисные кватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения:

$$q^0 \circ q^0 = q^0, \quad q^i \circ q^i = -q^0, \quad q^0 \circ q^i = q^i \circ q^0 = q^i, \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$q^1 \circ q^2 = -q^2 \circ q^1 = q^3, \quad q^2 \circ q^3 = -q^3 \circ q^2 = q^1, \quad q^3 \circ q^1 = -q^1 \circ q^3 = q^2.$$

Кватернионное представление базисных векторов основано на следующем разложении вектора:

$$\Psi = (\varepsilon_{32} \cdot \psi^{32} + \varepsilon_{13} \cdot \psi^{13} + \varepsilon_{21} \cdot \psi^{21} + \varepsilon_0 \cdot \psi^0)\varepsilon_0 + (\varepsilon_{32} \cdot \psi^1 + \varepsilon_{13} \cdot \psi^2 + \varepsilon_{21} \cdot \psi^3 + \varepsilon_0 \cdot \psi^{123})\varepsilon_{123}. \qquad (4)$$

Это представление соответствует записи алгебры $\widetilde{C}_3$ в виде произведения $\widetilde{C}_1 \times \widetilde{C}_2$. Базисными векторами алгебры $\widetilde{C}_1$ являются ε_0, ε_{123}; базисными векторами алгебры $\widetilde{C}_2$ являются ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0. Так как $sign\ \varepsilon_{32} = sign\ \varepsilon_{13} = sign\ \varepsilon_{21} = -1,\ sign\ \varepsilon_0 = 1$, то пространство $\widetilde{C}_2$ можно рассматривать как пространство кватернионов. Для базисных кватернионов введем обозначения $a \cdot I$, $b \cdot I$, $i \cdot I$, 1. Заменяя в (4) базисные векторы ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0 базисными кватернионами, получим вектор алгебры $\widetilde{C}_3$ в кватернионном представлении:

$$\Psi = (a \cdot I \cdot \psi^{32} + b \cdot I \cdot \psi^{13} + i \cdot I \cdot \psi^{21} + \psi^0)\varepsilon_0 + +(a \cdot I \cdot \psi^1 + b \cdot I \cdot \psi^2 + i \cdot I \cdot \psi^3 + \psi^{123})\varepsilon_{123}.$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2. Эти матрицы приведены в следующем разделе.

2.4. Структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_3$

В этом разделе приведем структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_3$. При преобразовании матриц от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2:

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

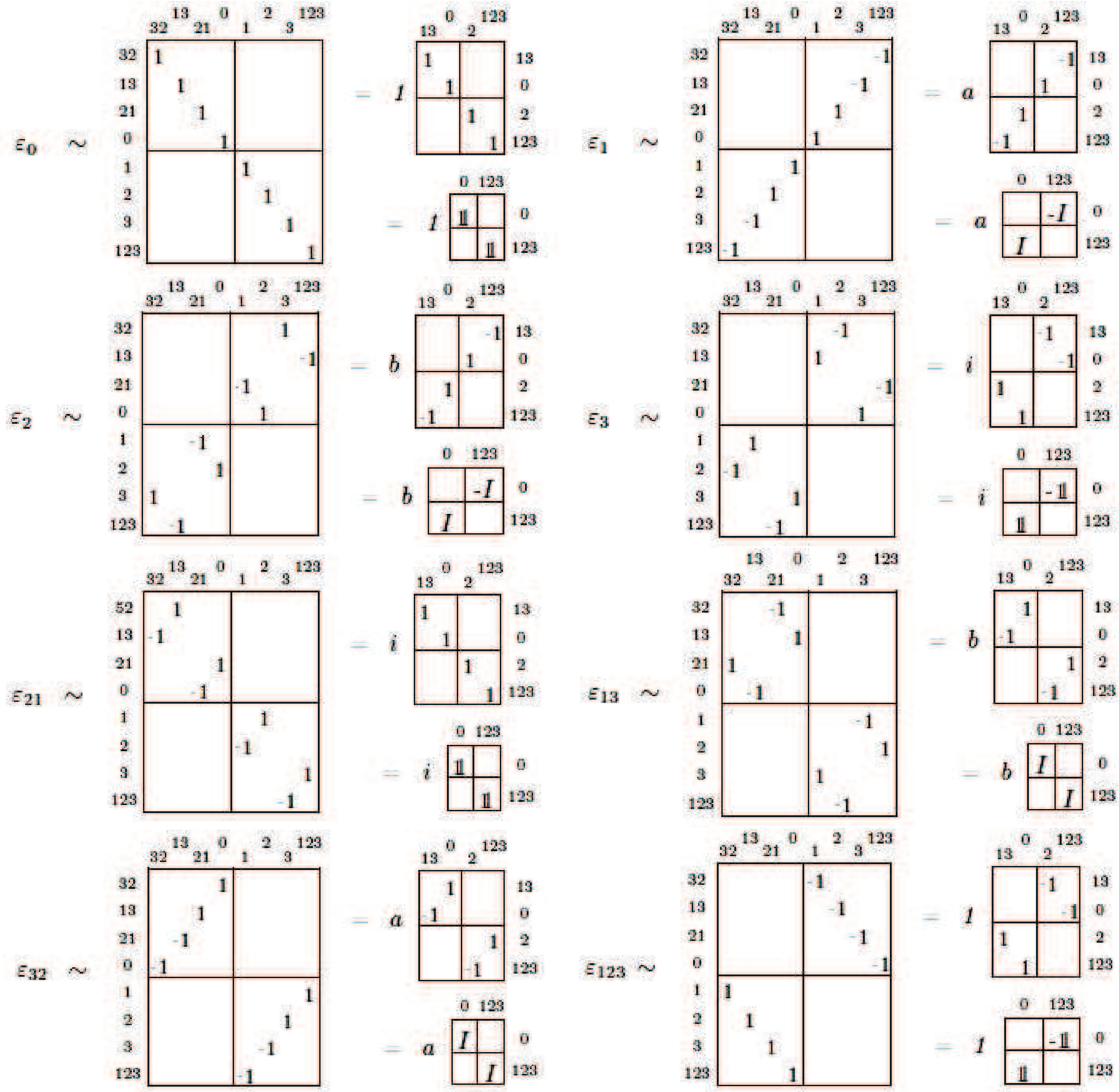
Алгебра системы чисел $\{1, a, b, i\}$ представлена законами умножения:

$$a^2 = b^2 = 1\ ,\ i^2 = -1,\ a \cdot b = -b \cdot a = i\ ,\ a \cdot i = -i \cdot a = b\ ,\ i \cdot b = -b \cdot i = a\ .$$

При преобразовании матриц от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2:

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}.$$

В результате имеем следующую таблицу базисных структурных матриц контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_3$:



Среди полученных матриц выделим матрицу, которая в комплексном представлении имеет вид $i \cdot \delta_K^I$. Именно эту матрицу нужно считать ответственной за электромагнитное взаимодействие, так как на эту матрицу умножаются компоненты потенциала электромагнитного поля в уравнении Дирака. Такой матрицей является матрица, соответствующая базисному вектору ε_{21}. Отсюда следует, что алгеброй электрического заряда является подалгебра контравариантной алгебры Клиффорда, построенная на базисных векторах ε_0 и ε_{21}.

3. Контравариантная алгебра Клиффорда $\widetilde{C}_4$

3.1. Действительное представление

Структурные матрицы алгебры $\widetilde{C}_4$ будем вычислять для особого порядка индексов, обобщающего порядок индексов, указанный в разделе 2.1:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

То есть будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности:

$$\Psi = \varepsilon_{32}\cdot\psi^{32} + \varepsilon_{13}\cdot\psi^{13} + \varepsilon_{21}\cdot\psi^{21} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{0} + \varepsilon_{42}\cdot\psi^{42} + \varepsilon_{14}\cdot\psi^{14} +$$
$$+ \varepsilon_{1324}\cdot\psi^{1324} + \varepsilon_{34}\cdot\psi^{34} + \varepsilon_{1}\cdot\psi^{1} + \varepsilon_{2}\cdot\psi^{2} + \varepsilon_{3}\cdot\psi^{3} + \varepsilon_{123}\cdot\psi^{123} +$$
$$+ \varepsilon_{134}\cdot\psi^{134} + \varepsilon_{234}\cdot\psi^{234} + \varepsilon_{4}\cdot\psi^{4} + \varepsilon_{124}\cdot\psi^{124}.$$

В результате получим матрицы 16×16 действительного представления базисных векторов ε_I. Они приведены в разделе 3.4.

3.2. Комплексное представление

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$\Psi = \varepsilon_{13}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{32} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{13}) + \varepsilon_{0}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{21} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{0}) +$$
$$+ \varepsilon_{14}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{42} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{14}) + \varepsilon_{34}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{1324} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{34}) +$$
$$+ \varepsilon_{2}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{1} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{2}) + \varepsilon_{123}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{3} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{123}) +$$
$$+ \varepsilon_{234}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{134} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{234}) + \varepsilon_{124}\circ(\varepsilon_{21}\cdot\psi^{4} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{124}).$$

Это представление соответствует записи $\widetilde{C}_4$ в виде произведения $\widetilde{C}_3 \times \widetilde{C}_1$. Базисными векторами алгебры $\widetilde{C}_3$ являются:

$$\varepsilon_{13},\ \varepsilon_{0},\ \varepsilon_{14},\ \varepsilon_{34},\ \varepsilon_{2},\ \varepsilon_{123},\ \varepsilon_{234},\ \varepsilon_{124},$$

базисными векторами алгебры $\widetilde{C}_1$ являются ε_{21}, ε_0.

Заменяя базисный вектор ε_{21} мнимой единицей, а базисный вектор ε_0 действительной единицей, получим вектор алгебры $\widetilde{C}_4$ в комплексном представлении:

$$\Psi = \varepsilon_{13}\circ(i\cdot\psi^{32} + \psi^{13}) + \varepsilon_{0}\circ(i\cdot\psi^{21} + \psi^{0}) +$$
$$+ \varepsilon_{2}\circ(i\cdot\psi^{1} + \psi^{2}) + \varepsilon_{123}\circ(i\cdot\psi^{31} + \psi^{123}) +$$
$$+ \varepsilon_{2}\circ(i\cdot\psi^{1} + \psi^{2}) + \varepsilon_{123}\circ(i\cdot\psi^{3} + \psi^{123}) +$$
$$+ \varepsilon_{234}\circ(i\cdot\psi^{134} + \psi^{234}) + \varepsilon_{124}\circ(i\cdot\psi^{4} + \psi^{124}).$$

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8, в которых соответствующие блоки заменены базисными единицами 1 и i. Эти матрицы приведены в разделе 3.4.

3.3. Кватернионное представление

Кватернионное представление базисных векторов основано на разложении вектора:

$$\Psi = (\varepsilon_{32}\cdot\psi^{32} + \varepsilon_{13}\cdot\psi^{13} + \varepsilon_{21}\cdot\psi^{21} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{0})\circ\varepsilon_{0} +$$
$$+ (\varepsilon_{32}\cdot\psi^{42} + \varepsilon_{13}\cdot\psi^{14} + \varepsilon_{21}\cdot\psi^{1324} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{34})\circ\varepsilon_{34} +$$
$$+ (\varepsilon_{32}\cdot\psi^{1} + \varepsilon_{13}\cdot\psi^{2} + \varepsilon_{21}\cdot\psi^{3} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{123})\circ\varepsilon_{123} +$$
$$+ (\varepsilon_{32}\cdot\psi^{134} + \varepsilon_{13}\cdot\psi^{234} + \varepsilon_{21}\cdot\psi^{4} + \varepsilon_{0}\cdot\psi^{124})\circ\varepsilon_{124}.$$

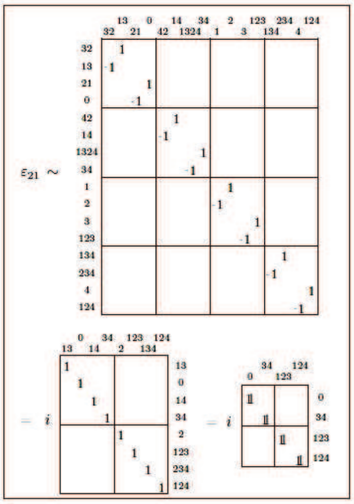
Это представление соответствует записи алгебры $\widetilde{C}_4$ в виде произведения $\widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2$. Базисными векторами одной алгебры $\widetilde{C}_2$ являются ε_0, ε_{34}, ε_{123}, ε_{124}; базисными векторами другой алгебры $\widetilde{C}_2$ являются ε_{32}, ε_{13}, ε_{21}, ε_0. Как и прежде, заменяя последнюю группу базисных векторов базисными кватернионами, получим вектор алгебры $\widetilde{C}_4$ в кватернионном представлении:

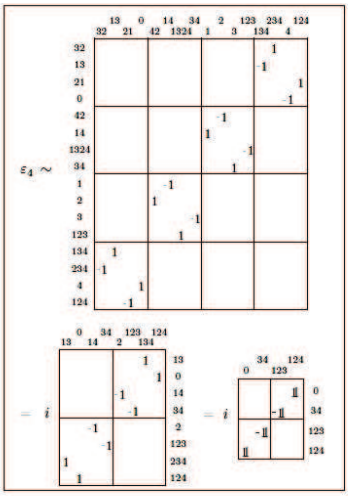
$$\begin{gathered}\Psi = (a \cdot I \cdot \psi^{32} + b \cdot I \cdot \psi^{13} + i \cdot I \cdot \psi^{21} + \psi^{0}) \circ \varepsilon_0 + \\ + (a \cdot I \cdot \psi^{42} + b \cdot I \cdot \psi^{14} + i \cdot I \cdot \psi^{1324} + \psi^{34}) \circ \varepsilon_{34} + \\ + (a \cdot I \cdot \psi^{1} + b \cdot I \cdot \psi^{2} + i \cdot I \cdot \psi^{3} + \psi^{123}) \circ \varepsilon_{123} + \\ + (a \cdot I \cdot \psi^{134} + b \cdot I \cdot \psi^{234} + i \cdot I \cdot \psi^{4} + \psi^{124}) \circ \varepsilon_{124}.\end{gathered}$$

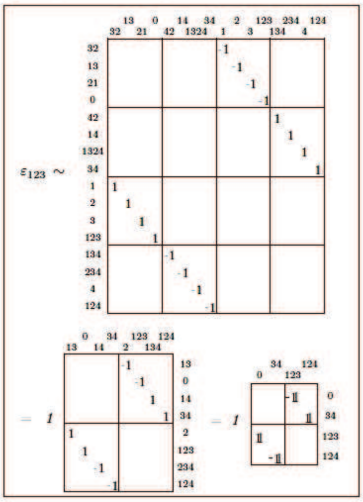
Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2. Эти матрицы приведены в следующем разделе.

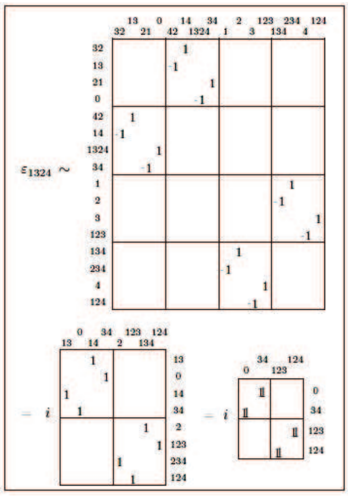
3.4. Структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_4$

В этом разделе приведем структурные матрицы контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_4$. Для компактности статьи мы приведем только четыре матрицы из шестнадцати.









Эти матрицы соответствуют базисным векторам алгебры электрического заряда $\widetilde{C}_1$ и алгебры слабого заряда $\widetilde{C}_2$. Обозначения для блоков 2×2, использованных при преобразовании матриц от действительного представления к комплексному и при преобразовании матриц от комплексного представления к кватернионному, приведены в разделе 2.4.

Среди полученных структурных матриц контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_4$ кандидатами на структурные матрицы алгебры слабого заряда являются такие, которые изоморфны алгебре кватернионов, с одной стороны, и не включают в себя структурную матрицу, соответствующую базисному вектору ε_{21}, с другой стороны, так как этот вектор уже отнесен к алгебре электрического заряда. Такие требования оставляют единственную возможность для выделения подалгебры слабого заряда, которой является подагебра контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_4$, построенной на базисных векторах ε_0, ε_4, ε_{123}, ε_{1324}.

Выводы

Алгебры электрического и слабого зарядов можно ввести, не выходя за рамки формализма релятивистской квантовой механики, если эти алгебры рассматривать как подалгебры контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_4$. Тогда алгеброй электрического заряда является подалгебра контравариантной алгебры Клиффорда, построенная на базисных векторах ε_0 и ε_{21}, а алгеброй слабого заряда является подагебра контравариантной алгебры Клиффорда $\widetilde{C}_4$, построенной на базисных векторах ε_0, ε_4, ε_{123}, ε_{1324}.

Литература

1. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц, М., «Наука», 1988, 272 с.
2. Кецарис А.А. Алгебраические основы физики. Пространство-время и действие как универсальные алгебры, М., Издательство УРСС, 2004, 280 с.
3. D. Hestenes, A. Weingartshofer, The electron, new theory and experiment, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
4. D. Hestenes, G.Sobczyk, Clifford algebra in geometric calculus, Riedel Publishing Company, Dordrecht, 1984.