Вариационная задача оптимизации потребления модели экономической динамики Харрода-Домара с переменным коэффициентом капиталоемкости прироста дохода

к.ф.-м.н. доц. Меерсон А.Ю., д.ф.-м.н. проф. Черняев А.П.
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
8(906)728-82-05, allameerson@yandex.ru
Московский физико-технический институт (государственный университет)
8(903)558-85-69, chernyaev49@yandex.ru

Аннотация. Изучается вариационная постановка задачи оптимального управления потреблением классической макроэкономической модели Харрода-Домара в случае, когда коэффициент капиталоемкости прироста дохода не постоянная величина, а зависящая от времени функция произвольного характера.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, вариационное исчисление, интегральная дисконтированная полезность потребления.*

Модель макроэкономической динамики Харрода–Домара весьма популярна и уже стала классической в математической экономике [1].

Дифференциальное уравнение модели Харрода-Домара с экзогенной динамикой потребления произвольного характера [2, 3] имеет вид:

$$Y(t) = C(t) + BY'(t). \tag{1}$$

Здесь t – время, $Y(t)$ – доход, который рассматривается, как сумма потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$. Основная предпосылка [1, с. 205]: $I(t) = BY'(t)$, где B – коэффициент капиталоемкости прироста дохода. До сих пор считалось, что:

$$B = const > 0. \tag{2}$$

Для случая (2) решение дифференциального уравнения (1) известно [2, 3] и дается формулой:

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{t-t_0}{B}} - \frac{1}{B}\int_{t_0}^{t} C(\tau) e^{\frac{t-\tau}{B}} d\tau. \tag{3}$$

Здесь предполагаются выполненными начальные условия:

$$Y(t_0) = Y_0 > 0, Y(t_1) = Y_1 \geq 0. \tag{4}$$

В настоящей работе предполагается, что:

$$B = B(t). \tag{5}$$

При условиях (4) и (5) решение дифференциального уравнения (1) будет даваться формулой [4]:

$$Y(t) = Y(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}} - e^{\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}} \int_{t_0}^{t} \frac{C(\tau)}{B(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}} d\tau. \tag{6}$$

Очевидно, (6) является обобщением (3) .

Задача оптимального управления ставится, как максимизация интегральной дисконтированной полезности потребления:

$$\int_{t_0}^{t_1} u\big(C(t)\big)\exp(-\delta t)\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

где: u – функция полезности, а δ – коэффициент дисконтирования будущей полезности [5].

Выражая потребление из уравнения (1), подставляем его в (7):

$$J(Y)=\int_{t_0}^{t_1} u(Y-B(t)Y')\exp(-\delta t)dt\,. \tag{8}$$

Нам достаточно рассмотреть разность $J(Y+h)-J(Y)$, где $h=h(t)$ – малое возмущение, и показать неположительность этой разности.

На основании (8) можно записать:

$$J(Y+h)-J(Y)=\int_{t_0}^{t_1}[u(C(t)+h-B(t)h')-u(C(t))]\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,. \tag{9}$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем:

$$u(C(t)+h-B(t)h')=u(C(t))+u'(C(t))[h-B(t)h']+\frac{1}{2}u''(C(t))[h-B(t)h']^2+R(t), \tag{10}$$

где

$$R(t)=\mathrm{o}[h-B(t)h']^2\,при\ h-B(t)h'\to 0\,. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получим:

$$J(Y+h)-J(Y)=\int_{t_0}^{t_1}u'(C(t))[h-B(t)h']\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}u(C(t))[h-B(t)]^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\int_{t_0}^{t_1}R(t)dt. \tag{12}$$

Пользуясь интегрированием по частям, мы можем записать:

$$-\int_{t_0}^{t_1}u'(C(t))B(t)h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dh=-u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,h\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}h\frac{d}{dt}[u'(C(t))B(t)e^{-\delta t}]dt. \tag{12´}$$

Первое слагаемое правой части равенства (12´) обращается в ноль, поскольку:

$$h(t_0)=h(t_1)=0\,. \tag{13}$$

С учетом (13) равенство (12´) упростится и будет иметь вид:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{u}'(C(t))B(t)h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}h\frac{d}{dt}[u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]dt\,. \tag{12´´}$$

Подставляя (12´´) в равенство (12), будем иметь:

$$\begin{gathered}J(Y+h)-J(Y)=\int_{t_0}^{t_1}h\{u(C(t))\,\mathrm{e}^{-\delta t}+\frac{d}{dt}[u'(C(t)B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]\}dt+\\+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}u''(C(t))[h-B(t)h']^2e^{-\delta t}dt+\int_{t_0}^{t_1}R(t)e^{-\delta t}dt.\end{gathered} \tag{14}$$

Используя основную лемму вариационного исчисления, будем иметь:

$$u(C(t))e^{-\delta t}+\frac{d}{dt}[u'(C(t))B(t)e^{-\delta t}]=0\,. \tag{15}$$

С учетом (15) представление (14) упростится и будет иметь вид:

$$J(Y+h)-J(Y)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}u''(C(t))\big[h-B(t)h'\big]^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{R}(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,. \tag{16}$$

Заметим, что если в (16) h заменить на βh, где $\beta=\mathrm{const}$, то, т. к. в этом случае h' заменяется на $\beta h'$, можно записать:

$$J(Y+\beta h)-J(Y)=\frac{\beta^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}u''(C(t))[h-B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\tilde{R}(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,, \tag{17}$$

где: $\widetilde{R}(t)$ – остаточный член из формул, аналогичных формулам (10), (11):

$$u(C(t)+\beta h-\beta B(t)h')=u(C(t))+\beta u'(C(t))[h-B(t)h']+\frac{\beta^2}{2}u''(C(t))[h-B(t)h']^2+\tilde{R}(t), \qquad (18)$$

$$\tilde{R}(t)=\mathrm{o}\{\beta^2[h-B(t)h']^2\} \; \textit{при} \; \beta[h-B(t)h']\to 0\,. \qquad (19)$$

Из формул (18) и (19) следует, что при фиксированном h и $\beta \to 0$ второе слагаемое правой части (17) есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем первое, если только первое слагаемое не равно нулю тождественно. Т.о., знак (17) полностью определяется отличным от тождественного нуля первым слагаемым правой части.

Будем считать, что полезность потребления оценивается монотонной функцией u(C), которая описывает относительное отвращение к риску по Эрроу-Пратту [5]. В силу этого $u''(\mathrm{C}(t)) \le 0$, а значит, первое слагаемое правой части равенства (16) неположительно. Следовательно, в силу (16) имеем:

$$J(Y+h)-J(Y)\le 0\,, \qquad (20)$$

а значит, в силу (20), равенство (6) при (15) реализует максимум функционала (7), или, что то же самое (8), при условиях (13).

Выводы

Полученные нами ранее точные решения задачи Коши, состоящей из дифференциального уравнения модели макроэкономической динамики Харрода-Домара и начального условия, в случае переменного коэффициента капиталоемкости прироста дохода, как уже ранее отмечалось, гораздо важнее того же решения для постоянного коэффициента в силу более широкой практической применимости. Однако это решение и намного сложнее. В настоящей работе мы убеждаемся, что для очень важной задачи минимизации интегральной дисконтированной полезности потребления это увеличение сложности полученного нами ранее решения не является непреодолимой помехой для реализации указанной постановки. Решение задачи будет намного сложнее, однако оно достаточно успешно реализовано. Трудности, возникшие в результате усиленной постановки, в настоящей работе успешно преодолены.

Литература

1. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издателдьство «ДИС», 1998 – 368 с.
2. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Точное решение макроэкономической модели Харрода-Домара с экзогенной динамикой объема потребления произвольного характера // Известия Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. 2011, № 1. С. 142-147.
3. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Особенности рабочего режима макроэкономической модели Харрода-Домара с показателем потребления растущим в постоянном темпе // Вестник МГУП. М.: МГУП, 2012, № 3. С. 188-192.
4. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Точное решение задачи Коши для для дифференциального уравнения модели Харрода-Домара с переменным коэффициентом приростной капиталоемкости // Известия МГТУ «МАМИ». Научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. № 2(16), 2013, т. 3. С. 111 – 113.
5. Гуриев С.М., Поспелов И.Г. Модель общего равновесия экономики переходного периода // Математическое моделирование, 1994. Т. 6, № 2. С. 3 – 21.