

Обобщённые интегральные импульсы потоков и сил и потенциалы вязко-упругих тел больцмановско-кельвиновского типа

к.ф.-м.н. проф. Король Е.З.
8(916)852-30-09, ez_korol@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются представления полной группы одномерных или многомерных потенциалов напряжений и деформаций реологических материалов, описываемых линейными и квазилинейными интегральными соотношениями больцмановско-кельвиновского типа, содержащих одну пару временных функций релаксации и ползучести, связанных между собой системой линейных интегральных уравнений взаимности Максвелла. Построенная группа потенциалов как функции интегральных импульсов потоков и сил удовлетворяет преобразованиям Лежандра-Эйлера и образует цепочку Гиббса-Гельмгольца в обобщённой диаграмме Борна. Приведены варианты потенциальных определяющих соотношений.

Ключевые слова: вязко-упругие среды, импульсы потоков и сил, полная группа потенциалов, преобразования Лежандра-Эйлера, соотношения Максвелла, равновесие и устойчивость системы, определяющие соотношения.

Введение

Формы представления определяющих соотношений. Характерной особенностью вязко-упругих тел (ВУТ) больцмановско-кельвиновского типа является линейное взаимно однозначное соответствие тройки $\vec{f} \sim (\vec{u}, \dot{\vec{u}}) \sim t$ или $\vec{\sigma} \sim (\vec{\varepsilon}, \dot{\vec{\varepsilon}}) \sim t$ переменных: внутренних сил \vec{f} (напряжений $\vec{\sigma}$) – внутренних перемещений \vec{u} (деформаций $\vec{\varepsilon}$) или скоростей перемещений $\dot{\vec{u}}$ (деформаций $\dot{\vec{\varepsilon}}$) – времени t , представленное двумя линейными интегральными выражениями общего вида:

$$(\vec{f}, \vec{\sigma})(t) = (\vec{u}, \vec{\varepsilon})(t) - \int_0^t R(t-\tau)(\vec{u}, \vec{\varepsilon})(\tau) d\tau, \quad (\vec{u}, \vec{\varepsilon})(t) = (\vec{f}, \vec{\sigma})(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau)(\vec{f}, \vec{\sigma})(\tau) d\tau, \quad ,$$

и в частности, для напряжений и деформаций [1 – 7]:

$$\vec{\sigma}(t) = E[\vec{\varepsilon}(t) - \int_0^t R(t-\tau)\vec{\varepsilon}(\tau) d\tau], \quad \vec{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E}[\vec{\sigma}(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau)\vec{\sigma}(\tau) d\tau] \quad , \quad (1)$$

где функции последствия (релаксации $R(t-\tau)$ и ползучести $\Pi(t-\tau)$) связаны (по условию взаимности) двумя линейными интегральными соотношениями-равенствами следующих из пары соотношений (1):

$$R(t-\tau) = \Pi(t-\tau) + \int_{\tau}^t \Pi(t-\xi)R(\xi-\tau) d\xi, \quad \Pi(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_{\tau}^t R(t-\xi)\Pi(\xi-\tau) d\xi, \quad . \quad (2)$$

Каждое из них есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с двумя переменными пределами. Например, для функции релаксации $R(t-\tau)$ по первому уравнению (2) ядром является другая, а именно: функция ползучести $\Pi(t-\tau)$.

Таким образом, определяющие соотношения ВУТ больцмановско-кельвиновского типа задаются двумя линейными интегральными выражениями (1) для напряжений и деформаций и одним из тождеств (2) для ядер интегральных выражений, являющихся материальными (физическими) функциями ВУТ. Соотношения (1) – (2) связывают потоки сил и деформаций и импульсы соответственно деформаций или сил (интегральные слагаемые), т.е. левые и правые части разнородны по порядку производных и кратности интегралов: правые части содержат и сами определяющие функции (например, деформации) и их интегралы (обобщён-

ные импульсы деформации), а левые – только сами определяющие функции (напряжения).

Эту форму определяющих соотношений ВУТ называют **смешанной**.

Из двух соотношений (1) следует важная линейная связь только интегральных слагаемых (импульсов напряжений и деформаций):

$$E \int_0^t R(t-\tau) \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t \Pi(t-\tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau \quad . \quad (3)$$

Из соотношения интегральных импульсов (3), используя одно из равенств (2) для ядер подынтегральных выражений, приходим к одному из соотношений (1) для напряжений или деформаций. И таким образом, определяющие соотношения ВУТ больцмановско-кельвиновского типа могут быть также однозначно представлены одним **чисто интегральным** соотношением (3) и одним из соотношений (2), т.е. одной из следующих систем:

$$\begin{aligned} E \int_0^t R(t-\tau) \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau &= \int_0^t \Pi(t-\tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau, & R(t-\tau) &= \Pi(t-\tau) + \int_{\tau}^t \Pi(t-\xi) R(\xi-\tau) d\xi \quad , \\ E \int_0^t R(t-\tau) \tilde{\varepsilon}(\tau) d\tau &= \int_0^t \Pi(t-\tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau, & \Pi(t-\tau) &= R(t-\tau) + \int_{\tau}^t R(t-\xi) \Pi(\xi-\tau) d\xi \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Отличия **смешанной** формы (1) от **чисто интегральной** (4) состоят в том, что в первой паре присутствуют одновременно и обобщённые силы и перемещения и соответствующее интегральное выражение или обобщённой силы или перемещения, ядро которого удовлетворяет условию (тождествам) взаимности (2), а во второй – только интегральные выражения и обобщённых сил и перемещений, ядра которых подчинены условию (уравнениям) взаимности (2). При этом представления в форме (4) однородные (левая и правая части соотношений) по порядку производных или кратности интегралов. Последнее обстоятельство удобно при формулировке соответствующих потенциалов.

Потенциалы ВУТ больцмановско-кельвиновского типа. Потенциалы внутренних сил (напряжений) и перемещений (деформаций) или скоростей перемещений (скоростей деформаций) как функции соответствующих переменных представляются дифференциальными выражениями типа:

- для векторов усилий и перемещений:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{\partial F(\vec{u})}{\partial \vec{u}}, \quad \vec{f} \sim \vec{u}; \quad \rightarrow \quad \vec{u} = -\frac{\partial G(\vec{f})}{\partial \vec{f}}, \quad \vec{u} \sim \vec{f}, \\ G &= F(\vec{u}) - \vec{u} \frac{\partial F(\vec{u})}{\partial \vec{u}} = F(\vec{u}) - \vec{u} \vec{f}(\vec{u}) \quad \rightarrow \quad F = G(\vec{f}) - \vec{f} \frac{\partial G(\vec{f})}{\partial \vec{f}} = G + \vec{f} \vec{u}(\vec{f}), \\ \vec{u} \frac{\partial F(\vec{u})}{\partial \vec{u}} &= \vec{f} \frac{\partial G(\vec{f})}{\partial \vec{f}}, \end{aligned}$$

$$d\vec{f} = \frac{\partial^2 F(\vec{u})}{\partial \vec{u}^2} d\vec{u} = \Phi(\vec{u}) d\vec{u}, \quad \Rightarrow \quad d\vec{u} = -\frac{\partial^2 G(\vec{f})}{\partial \vec{f}^2} d\vec{f} = \phi(\vec{f}) d\vec{f};$$

- для тензоров напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \frac{\partial F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{\sigma} \sim \tilde{\varepsilon}; \quad \rightarrow \quad \tilde{\varepsilon} = -\frac{\partial G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\varepsilon} \sim \tilde{\sigma}, \\ G &= F - \tilde{\varepsilon} \frac{\partial F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} = F - \tilde{\varepsilon} \tilde{\sigma} \quad \rightarrow \quad F = G - \tilde{\sigma} \frac{\partial G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}} = G + \tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon}, \\ \tilde{\varepsilon} \frac{\partial F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} &= \tilde{\sigma} \frac{\partial G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}}, \end{aligned}$$

$$d\tilde{\sigma} = \frac{\partial^2 F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}^2} d\tilde{\varepsilon} = \Phi(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}, \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\varepsilon} = -\frac{\partial^2 G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}^2} d\tilde{\sigma} = \phi(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma}, \quad (5)$$

где две функции $F(\bar{u})$ и $G(\bar{f})$ или $F(\tilde{\varepsilon})$ и $G(\tilde{\sigma})$ – соответствующие потенциалы, например, свободная энергия Гельмгольца и потенциал Гиббса.

При представлении этих функций обобщённые силы $\tilde{\sigma}$ или \bar{f} и обобщённые потоки, перемещения $\tilde{\varepsilon}$ или \bar{u} , выбираются таким образом, чтобы, согласно принципу Кюри, каждая пара (обобщённая сила \sim обобщённое перемещение) равно присутствовала во всех соотношениях, а её компоненты имели одинаковые размерность (скалярную, векторную или тензорную) и порядок производной или кратность интегралов. При этом полная группа потенциалов удовлетворяет условиям взаимности Максвелла (взаимно однозначной определмости), представленным преобразованиями Лежандра-Эйлера [3 – 14], образующими цепочку Гиббса-Гельмгольца вида:

$$G(\tilde{\sigma}) = F(\tilde{\varepsilon}) - \tilde{\varepsilon} \frac{\partial F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} = F(\tilde{\varepsilon}) - \tilde{\varepsilon} \tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon}), \quad F(\tilde{\varepsilon}) = G(\tilde{\sigma}) - \tilde{\sigma} \frac{\partial G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}} = G(\tilde{\sigma}) + \tilde{\sigma} \tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}),$$

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \tilde{\sigma} \frac{\partial G}{\partial \tilde{\sigma}}, \quad d\tilde{\sigma} = \frac{\partial \tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} d\tilde{\varepsilon} = \Phi(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}, \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\varepsilon} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} = \varphi(\tilde{\sigma}) d\tilde{\sigma},$$
(6)

где: $\partial \tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon}) / \partial \tilde{\varepsilon} = \Phi(\tilde{\varepsilon})$ и $\partial \tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}) / \partial \tilde{\sigma} = \varphi(\tilde{\sigma})$ – «жесткость» и «податливость» связей обобщённых потоков и сил соответственно.

Цепочка Гиббса-Гельмгольца, как и мнемоническая диаграмма Борна, позволяет подобно интегральным соотношениям (2) для ядер последействия определять любой потенциал полной группы по известным другим дифференциальным соотношениям (6). Эта связь обеспечивает взаимно однозначное соответствие пар потенциалов $F(\{\tilde{\varepsilon}\}) \sim G(\{\tilde{\sigma}\}) \sim t$ и их потоков и сил $\tilde{\varepsilon}(t) \sim \tilde{\sigma}(t) \sim t$, потенциальность и однозначную разрешимость определяющих соотношений связи относительно обобщённых сил и потоков. Система неравенств для детерминантов производных потенциалов (отличны от нуля, положительны их дифференциалы второго порядка и главные миноры гессианов) и коэффициентов «жесткости» и «податливости» (при $\tilde{\varepsilon} = const$ или $\tilde{\sigma} = const$) даёт ряд неравенств типа (таких неравенств 2^n):

$$\det \left| \frac{\partial^2 F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}^2} \right| \geq 0, \quad \det \left| \frac{\partial^2 G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}^2} \right| \geq 0, \quad \frac{\partial^2 F(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 G(\tilde{\sigma})}{\partial \tilde{\sigma}^2} \geq 0,$$

и соотношений взаимности Максвелла определяют условия экстремума первого и второго порядков и обеспечивают взаимнооднозначную определмость (разрешимость) потоков и сил, интегрируемость дифференциальных форм первого и второго порядков, а в целом – равновесие и устойчивость системы.

Таким образом, для вязко-упругих тел больцмановско-кельвиновского типа характерным являются: 1) потенциальность связей обобщённых импульсов потоков и сил; 2) полная группа потенциалов, связанных между собой преобразованиями Лежандра-Эйлера, образует цепочку Гиббса-Гельмгольца; 3) каждый из потенциалов есть функции наборов разноимённых обобщённых импульсов потоков и сил; 4) обобщённые импульсы потоков и сил есть линейные функционалы соответствующих потоков и сил; 5) одноимённые импульсы потоков и сил линейно связаны между собой функционально; 6) ядра интегральных операторов одноимённых импульсов потоков и сил связаны между собой взаимно обратимыми линейными интегральными соотношениями.

В существующих (см. [3 – 12] ниже приведенные потенциалы) формах представления потенциалов (функционалов) для ВУТ таких, как свободная энергии и свободная энтальпия, различные потенциалы рассеяния, в качестве потоков и сил традиционно используются смещения (деформации) и напряжения и их интегральные свёртки. Определяющие соотношения между потоками и силами также содержат интегральные свёртки в виде производных. Формы неоднозначны и для их задания требуются дополнительные и независимые условия.

Функции, фигурирующие в определяющих уравнениях, нелегко определимы экспериментально.

Свободная энергия Гельгольца и свободная энтальпия Гиббса [4, 5]. В теории ВУТ часто используются следующие частные представления потенциалов, выражения которых содержат одновременно производные и интегралы обобщённых сил и потоков. Например, потенциал [4] (свободная энергия Гельмгольца) напряжений, содержащий и поток и интеграл от потока с ядром релаксации $R(t-\tau)$, т.е. интегральный импульс потока (деформации):

$$F = E\left[\frac{1}{2}e^2 - eR^*\{e\} + \frac{1}{2}A(R^*\{e\})^2\right],$$

$$\sigma = \frac{\partial F(e)}{\partial e} = E(1 - R^*)\{e\} = E\left[e - \int_0^t R(t-\tau)e(\tau)d\tau\right], \quad R^*\{e\} \equiv \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau,$$

$$F(\varepsilon) = F_0(\varepsilon) - F_1\{\varepsilon\}, \quad F_0(\varepsilon) = \frac{1}{2}E\varepsilon^2, \quad F_1\{\varepsilon\} = E\varepsilon R^*\{\varepsilon\},$$

и свободная энтальпия Гиббса – потенциал деформаций, содержащий и силу-напряжение, и интеграл от силы с ядром ползучести $\Pi(t-\tau)$, т.е. интегральный импульс силы (напряжений):

$$G = \sigma e - F = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\Pi^*\{\sigma\} + \frac{1}{2}(1-A)(\Pi^*\{\sigma\})^2\right],$$

$$e = \frac{\partial G}{\partial \sigma} = (1 + \Pi^*)\{\sigma\} \equiv \frac{1}{E}\left[\sigma - \int_0^t \Pi(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\right], \quad \Pi^*\{\sigma\} \equiv \int_0^t \Pi(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau,$$

$$G(\sigma) = G_0(\sigma) + G_1\{\sigma\}, \quad G_0(\sigma) = \frac{1}{2E}\sigma^2, \quad G_1\{\sigma\} = \frac{1}{E}\sigma\Pi^*\{\sigma\}$$

$$\sigma e = 2F_0(e) - F_1\{e\} = 2G_0(\sigma) + G_1\{\sigma\}.$$

В представленных выражениях указанные потенциалы есть функции, соответственно, не только самих потоков и сил, связанные соотношениями, вытекающими из «неклассических» преобразований Лежандра-Эйлера:

$$F = \sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma} - G = \sigma e - G, \quad e = \frac{\partial G}{\partial \sigma}; \quad G = \sigma e - F = e \frac{\partial F}{\partial e} - F, \quad \sigma = \frac{\partial F}{\partial e},$$

а не из «классических» (принятых в настоящее время) преобразований Лежандра-Эйлера, отличающихся знаками:

$$F = G - \sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma} = G + \sigma e, \quad e = -\frac{\partial G}{\partial \sigma}; \quad G = F - e \frac{\partial F}{\partial e} = F - e\sigma, \quad \sigma = \frac{\partial F}{\partial e},$$

и, кроме того, дополнительно слагаемых, зависящих от импульсов потока и силы, а именно:

$$\left[eR^*\{e\}, \frac{1}{2}A(R^*\{e\})^2\right] \quad \text{и} \quad \left[\sigma\Pi^*\{\sigma\}, \frac{1}{2}(1-A)(\Pi^*\{\sigma\})^2\right].$$

Как отмечалось в [4, 5], определяющие соотношения не содержат параметра A , фигурирующего в выражениях для потенциалов и отражающего диссипативные характеристики системы, которые должны быть заданы дополнительно и независимо. Отмечая не единственность форм выражений потенциалов и возможность замены выражений типа $(R^*\{e\})^2$, $(\Pi^*\{\sigma\})^2$ другими, соответствующими принятым моделям или более общими, например, [2 – 12]:

$$\tilde{G} = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \tilde{\Pi}(t-\tau_1, t-\tau_2) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2), \quad e = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \sigma} = \int_0^t \tilde{\Pi}(t-\tau, 0) d\sigma(\tau),$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \tilde{R}(t-\tau_1, t-\tau_2) de(\tau_1) de(\tau_2), \quad \tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x) = \int_{\tau}^t \hat{R}(t-x) \hat{R}(x-\tau) dx,$$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \tilde{R}(t-\xi, t-\tau) d\xi d\tau, \quad \sigma = \frac{\partial F}{\partial e} = \int_0^t \tilde{R}(t-\tau, 0) d\tau,$$

которые задаются дополнительно и независимо, например, с использованием первого закона термодинамики:

$$\dot{W} - \sigma \dot{e} - \dot{Q} = 0, \quad W = U + TS, \quad \dot{U} + T\dot{S} - \sigma \dot{e} - \dot{Q} = 0,$$

где: U – внутренняя энергия при обратимом $Q = 0$ тепле $F = U$; F – свободная энергия;

V – дополнительная работа; W – мощность рассеяния;

$$dU = \sigma \cdot de = \sigma \dot{e} dt = dF, \quad dV = \varepsilon \cdot d\sigma = \varepsilon \dot{\sigma} dt, \quad F = U, \quad W(t) = \sigma(t) \dot{e}(t); \quad U = \int_0^t W(\tau) d\tau.$$

При этом в качестве параметров состояния (потоков и сил) используются деформации и напряжения [1 – 4].

Потенциалы модели Максвелла [1 – 5]. Модель Максвелла $M = H \cap N$, представляющая последовательное двухэлементное простое соединение гуковских и ньютоновских элементов, описывается неполным обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка вида $\dot{\sigma} + \lambda \sigma = E \dot{e}$, $\lambda = E/\eta$. Мощность и определяющие соотношения для такой модели имеют вид:

$$\begin{aligned} -W^* &= \sigma \dot{e} = \frac{1}{\eta} \sigma^2 = \frac{1}{\eta} \int_0^t \int_0^t R(t-\tau_1) R(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{1}{\eta} \left(\int_0^t R(t-\tau_1) d\tau_1 \right) \left(\int_0^t R(t-\tau_2) d\tau_2 \right), \\ e &= \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) = \left(\frac{\sigma}{E} + \frac{1}{\eta} \Pi^* \{ \sigma \} \right), \quad \Pi(t-\tau) = \theta(t-\tau), \\ \sigma &= \int_0^t R(t-\tau) d\tau = \frac{\partial W^*}{\partial e}, \quad R(t-\tau) = \exp \{ -\lambda(t-\tau) \}. \end{aligned}$$

Потенциалы модели Фойгхта [2]. Модель Фойгхта $F = H \cup N$ состоит из параллельно соединённых простейших гуковских и ньютоновских элементов. Дифференциальное уравнение состояния для них – это неполное линейное уравнение $\sigma = \eta(\dot{e} + \mu e)$, $\mu = E/\eta$. Мощность и соответствующие соотношения для этой модели есть:

$$\begin{aligned} V^* &= \sigma \dot{e} = \eta \dot{e}^2 = \eta \int_0^t \int_0^t \Pi(t-\tau_1) \Pi(t-\tau_2) d\sigma(\tau_1) d\sigma(\tau_2) = \\ &= \eta \left(\int_0^t \Pi(t-\tau_1) d\sigma(\tau_1) \right) \left(\int_0^t \Pi(t-\tau_2) d\sigma(\tau_2) \right), \\ e &= \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} = \frac{1}{\eta} \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) = \frac{1}{\eta} \Pi^* \{ \sigma \}, \quad \Pi(t-\tau) = \exp \{ -\mu(t-\tau) \}. \end{aligned}$$

В обоих случаях потенциалы, соответственно, выражены через потоки (деформации) и силы (напряжения), а определяющие соотношения содержат и сами потоки и силы и их импульсы и при этом в такой неудобной форме, что установить их общность и универсальность затруднительно. Об этом, в частности, свидетельствуют указанные выше неединственность (неоднозначность) форм выражения свободной энергии и неопределённость диссипативных характеристик даже при однозначном выборе определённой формы.

Обобщённые интегральные импульсы потоков и сил ВУТ. Исходя из общих представлений о линейных взаимно обратимых функциональных соотношениях двух функций $x(t)$ и $y(t)$ для вязко-упругих тел больмановско-кельвиновских твёрдых тел:

$$y(t) = E[x(t) - R^* \{x\}] \leftrightarrow x(t) = \frac{1}{E}[y(t) + \Pi^* \{y\}]$$

$$R^* \{x\} \equiv \int_0^t R(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad \Pi^* \{y\} \equiv \int_0^t \Pi(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad (7)$$

где функции последействия (ядра релаксации $R(t-\tau)$ и ползучести $\Pi(t-\tau)$ разностного типа) удовлетворяют условию взаимно однозначной обратимости операторов – линейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода с двумя переменными пределами:

$$R(t-\tau) = \Pi(t-\tau) + \int_{\tau}^t \Pi(t-\xi)R(\xi-\tau)d\xi \leftrightarrow \Pi(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_{\tau}^t R(t-\xi)\Pi(\xi-\tau)d\xi, \quad (8)$$

и сложив первое и второе, умноженное на числовой коэффициент E , получим линейную алгебраическую связь интегральных слагаемых общего вида:

$$ER^* \{x\} = \Pi^* \{y\} \leftrightarrow R^* \{x\} = \frac{1}{E}\Pi^* \{y\}. \quad (9)$$

Формула (9) связывает обобщённые интегральные импульсы, соответственно, потоков $R^* \{x\}$ (деформаций) и сил $\Pi^* \{y\}$ (напряжений), поэтому выбор формы представления импульсов следует органично. При этом и связь органично устанавливается алгебраически линейная, а развёрнутые формы типа (7) связей потоков (или сил) с силами и импульсами сил (или потоками и их импульсами) следуют из (9) с использованием (8); в прямой связи (7) соотношения (8) есть следствие, а в обратной (9) соотношения (8) есть необходимое условие.

Потенциалы рассеяния – квадратичные формы обобщённых импульсов. Составив следующие произведения обобщённых импульсов:

$$W(R^*, \Pi^*) = \frac{1}{2}R^* \{x\}\Pi^* \{y\}, \quad F(R^*) = \frac{1}{2}E(R^* \{x\})^2, \quad G(\Pi^*) = \frac{1}{2E}(\Pi^* \{y\})^2, \quad (10)$$

сравнив их с произведением первого и второго выражений (7), разрешённых относительно соответствующих импульсов, получаем:

$$\frac{1}{2}(x-y)^2 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - xy = \frac{1}{2}R^* \{x\}\Pi^* \{y\},$$

а с учётом (9) имеем следующие равенства квадратичных форм:

$$W(R^*, \Pi^*) = F(R^*) = G(\Pi^*). \quad (11)$$

Полагая поток $x(t) = e(t)$ деформацией, а силу $y(t) = \sigma(t)$ напряжением, из (11) видим физическую интерпретацию квадратичных форм – удельных энергий:

$$W(R^*, \Pi^*) = \frac{1}{2}R^* \{e\}\Pi^* \{\sigma\}, \quad F(R^*) = \frac{1}{2}E(R^* \{e\})^2, \quad G(\Pi^*) = \frac{1}{2E}(\Pi^* \{\sigma\})^2,$$

и при этом функции – потенциалы импульсов напряжений и деформации, соответственно:

$$W(R^*, \Pi^*) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t R(t-\tau_1)\Pi(t-\tau_2)e(\tau_1)\sigma(\tau_2)d\tau_1d\tau_2,$$

$$F(R^*) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t R(t-\tau_1)R(t-\tau_2)e(\tau_1)e(\tau_2)d\tau_1d\tau_2,$$

$$G(\Pi^*) = \frac{1}{2E} \int_0^t \int_0^t \Pi(t-\tau_1)\Pi(t-\tau_2)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)d\tau_1d\tau_2, \quad (12)$$

удовлетворяют соотношениям Гиббса-Гельмгольца и преобразованиям Лежандра-Эйлера:

$$\Pi^* \{\sigma\} = \frac{\partial F}{\partial R^* \{e\}}, \quad G(\Pi^*) = F - R^* \frac{\partial F}{\partial R^*} = F - R^* \Pi^*,$$

$$R^* \{e\} = -\frac{\partial G}{\partial \Pi^* \{\sigma\}}, \quad F(R^*) = G - \Pi^* \frac{\partial G}{\partial \Pi^*} = G + \Pi^* R^*, \quad (13)$$

$$R^* \frac{\partial F}{\partial R^*} = \Pi^* \frac{\partial G}{\partial \Pi^*}, \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{R^*} \frac{\partial F}{\partial R^*} \frac{1}{\Pi^*} \frac{\partial G}{\partial \Pi^*} = -1,$$

и по своим свойствам идентичны свойствам свободной энергии Гельмгольца и потенциалу Гиббса. Приведенные выше соотношения, касающиеся одномерных скалярных систем, применимы и для многомерных тензорных.

Линейные соотношения вязко-упругости. В случае изотропных ВУТ имеем для дивергентной и шаровой частей тензоров напряжений и деформаций следующие соотношения [2, 4, 5, 10]:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) = 2G_0[\varepsilon_{ij}(t) - R^* \{\varepsilon_{ij}\}] &\leftrightarrow \varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2G_0}[s_{ij}(t) + \Pi^* \{s_{ij}\}], \\ \sigma(t) = 3K_0[e(t) - R_1^* \{e\}] &\leftrightarrow e(t) = \frac{1}{3K_0}[\sigma(t) + \Pi_1^* \{\sigma\}], \end{aligned} \quad (14)$$

где ядра ползучести и релаксации связаны линейными интегральными уравнениями Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned} R^* \{\varepsilon_{ij}\} &= \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau, \quad \Pi^* (s_{ij}) = \int_0^t \Pi(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau, \\ R(t-\tau) &= \Pi(t-\tau) + \int_\tau^t \Pi(t-\xi)R(\xi-\tau)d\xi \quad \leftrightarrow \quad \Pi(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_\tau^t R(t-\xi)\Pi(\xi-\tau)d\xi, \\ R_1^* \{e\} &= \int_0^t R_1(t-\tau)e(\tau)d\tau, \quad \Pi_1^* (\sigma) = \int_0^t \Pi_1(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \\ R(t-\tau) &= \Pi(t-\tau) + \int_\tau^t \Pi(t-\xi)R(\xi-\tau)d\xi \quad \leftrightarrow \quad \Pi(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_\tau^t R(t-\xi)\Pi(\xi-\tau)d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Как видим, этим соотношениям соответствуют импульсы, связанные линейными алгебраическими выражениями, аналогичными закону Гука для линейно упругих тел:

$$\begin{aligned} 2G_0 R^* \{\varepsilon_{ij}\} &= \Pi^* \{s_{ij}\}, \quad 3K_0 R_1^* \{e\} = \Pi_1^* \{\sigma\}, \\ 2G_0 R_{ij}^* &= \Pi_{ij}^*, \quad 3K_0 R_1^* \{e\} = \Pi_1^* \{\sigma\}, \quad R_{ij}^* = R^* \{\varepsilon_{ij}\}, \Pi_{ij}^* = \Pi^* \{s_{ij}\}, \end{aligned} \quad (16)$$

и соответствующие потенциалы

$$\begin{aligned} \Pi^* \{s_{ij}\} &= \frac{\partial F}{\partial R_{ij}^* \{\varepsilon_{ij}\}}, \quad G = F - R_{ij}^* \frac{\partial F}{\partial R_{ij}^*} = F - R_{ij}^* \Pi_{ij}^*, \\ R^* \{\varepsilon_{ij}\} &= -\frac{\partial G}{\partial \Pi_{ij}^* \{s_{ij}\}}, \quad F = G - \Pi_{ij}^* \frac{\partial G}{\partial \Pi_{ij}^*} = G + \Pi_{ij}^* R_{ij}^*, \\ R_{ij}^* \frac{\partial F}{\partial R_{ij}^*} &= \Pi_{ij}^* \frac{\partial G}{\partial \Pi_{ij}^*}, \\ \Pi_1^* \{\sigma\} &= \frac{\partial F_1}{\partial R_1^* \{e\}}, \quad G_1 = F_1 - R_1^* \frac{\partial F_1}{\partial R_1^*} = F_1 - R_1^* \Pi_1^*, \\ R_1^* \{e\} &= -\frac{\partial G_1}{\partial \Pi_1^* \{\sigma\}}, \quad F_1 = G_1 - \Pi_1^* \frac{\partial G_1}{\partial \Pi_1^*} = G_1 + \Pi_1^* R_1^*, \\ R_1^* \frac{\partial F_1}{\partial R_1^*} &= \Pi_1^* \frac{\partial G_1}{\partial \Pi_1^*}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$W(R^*, \Pi^*) = \frac{1}{4G_0} R_{ij}^* \Pi_{ij}^*, \quad F(R^*) = G_0 R_{ij}^* R_{ij}^*, \quad G(\Pi^*) = \frac{1}{6G_0} \Pi_{ij}^* \Pi_{ij}^*,$$

$$W_1(R_1^*, \Pi_1^*) = \frac{1}{2} R_1^* \Pi_1^*, \quad F_1(R_1^*) = \frac{3}{2} K_0 (R_1^*)^2, \quad G_1(\Pi_1^*) = \frac{1}{6K_0} (\Pi_1^*)^2.$$

Соотношения (16) и (17) при условиях (15) определяют потенциальную линейную связь потоков (деформаций) и сил (напряжений) через соответствующие обобщённые импульсы. Здесь свёртки типа $s_{ij} s_{ij} = s_u^2$ – вторые инварианты тензоров. И таким образом, известные [2, 4, 5, 10] линейные определяющие соотношения вязко-упругости представляются в форме (16) через обобщённые импульсы, аналогичные форме закона Гука для линейно упругих тел.

Для нелинейных систем подобного рода соотношения могут быть представлены в случае, так называемой, квазилинейности свойств, когда выполняются в первую очередь соотношения взаимной разрешимости функций последействия (ядер релаксации и ползучести) типа (15). Ниже приводится вариант таких соотношений.

Квазилинейные соотношения вязко-упругости. В случае изотропных нелинейных ВУТ, считая, что функции последействия не зависят от напряжённо-деформированного состояния, имеем для девиаторной и шаровой частей тензоров напряжений и деформаций следующие соотношения [2, 4, 5, 10]:

$$\tilde{s}_{ij}(t) = 2G_0[\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) - R^*\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\}] \leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = \frac{1}{2G_0}[\tilde{s}_{ij}(t) + \Pi^*\{\tilde{s}_{ij}\}],$$

$$\tilde{\sigma}(t) = 3K_0[\tilde{e}(t) - R_1^*\{\tilde{e}\}] \leftrightarrow \tilde{e}(t) = \frac{1}{3K_0}[\tilde{\sigma}(t) + \Pi_1^*\{\tilde{\sigma}\}],$$

$$\tilde{s}_{ij}(t) = f(s_u) s_{ij}(t), \quad \tilde{\sigma}(t) = f_1(\sigma) \sigma(t), \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = g(\varepsilon_u) \varepsilon_{ij}(t), \quad \tilde{e}(t) = g_1(e) e(t),$$

где ядра ползучести и релаксации связаны линейными интегральными уравнениями Вольтерра второго рода:

$$\tilde{R}^*\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\} = \int_0^t R(t-\tau) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau = \tilde{R}_{ij}^*, \quad \tilde{\Pi}^*\{\tilde{s}_{ij}\} = \int_0^t \Pi(t-\tau) \tilde{s}_{ij}(\tau) d\tau = \tilde{\Pi}_{ij}^*,$$

$$R(t-\tau) = \Pi(t-\tau) + \int_{\tau}^t \Pi(t-\xi) R(\xi-\tau) d\xi \leftrightarrow \Pi(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_{\tau}^t R(t-\xi) \Pi(\xi-\tau) d\xi,$$

$$\tilde{R}_1^*\{\tilde{e}\} = \int_0^t R_1(t-\tau) \tilde{e}(\tau) d\tau = \tilde{R}_1^*, \quad \tilde{\Pi}_1^*\{\tilde{\sigma}\} = \int_0^t \Pi_1(t-\tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau = \tilde{\Pi}_1^*,$$

$$R_1(t-\tau) = \Pi_1(t-\tau) + \int_{\tau}^t \Pi_1(t-\xi) R_1(\xi-\tau) d\xi \leftrightarrow \Pi_1(t-\tau) = R_1(t-\tau) + \int_{\tau}^t R_1(t-\xi) \Pi_1(\xi-\tau) d\xi.$$

Этим соотношениям соответствуют импульсы, связанные линейными алгебраическими выражениями, аналогичными закону Гука для нелинейно упругих тел:

$$2G_0 \tilde{R}^*\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\} = \tilde{\Pi}^*\{\tilde{s}_{ij}\}, \quad 3K_0 \tilde{R}_1^*\{\tilde{e}\} = \tilde{\Pi}_1^*\{\tilde{\sigma}\},$$

$$2G_0 \tilde{R}_{ij}^* = \tilde{\Pi}_{ij}^*, \quad 3K_0 \tilde{R}_1^*\{\tilde{e}\} = \tilde{\Pi}_1^*\{\tilde{\sigma}\}, \quad \tilde{R}_{ij}^* = R^*\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\}, \tilde{\Pi}_{ij}^* = \Pi^*\{\tilde{s}_{ij}\},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = g(\varepsilon_u) \varepsilon_{ij}, \quad \tilde{s}_{ij} = f(s_u) s_{ij}, \quad \tilde{e} = g_1(e) e, \quad \tilde{\sigma} = f_1(\sigma) \sigma,$$

и соответствующие потенциалы:

$$\tilde{\Pi}^*\{\tilde{s}_{ij}\} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{R}_{ij}^*\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\}}, \quad \tilde{G} = \tilde{F} - \tilde{R}_{ij}^* \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{R}_{ij}^*} = \tilde{F} - \tilde{R}_{ij}^* \tilde{\Pi}_{ij}^*,$$

$$\tilde{R}^*\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\} = -\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{\Pi}_{ij}^*\{\tilde{s}_{ij}\}}, \quad \tilde{F} = \tilde{G} - \tilde{\Pi}_{ij}^* \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{\Pi}_{ij}^*} = \tilde{G} + \tilde{\Pi}_{ij}^* \tilde{R}_{ij}^*,$$

$$\tilde{R}_{ij}^* \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{R}_{ij}^*} = \tilde{\Pi}_{ij}^* \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{\Pi}_{ij}^*}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1^* \{ \tilde{\sigma} \} &= \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \tilde{R}_1^* \{ \tilde{\epsilon} \}}, & \tilde{G}_1 &= \tilde{F}_1 - \tilde{R}_1^* \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \tilde{R}_1^*} = \tilde{F}_1 - \tilde{R}_1^* \tilde{\Pi}_1^*, \\ \tilde{R}_1^* \{ \tilde{\epsilon} \} &= - \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial \tilde{\Pi}_1^* \{ \tilde{\sigma} \}}, & \tilde{F}_1 &= \tilde{G}_1 - \tilde{\Pi}_1^* \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial \tilde{\Pi}_1^*} = \tilde{G}_1 + \tilde{\Pi}_1^* \tilde{R}_1^*, \\ & & \tilde{R}_1^* \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \tilde{R}_1^*} &= \tilde{\Pi}_1^* \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial \tilde{\Pi}_1^*}, \\ \tilde{W}(\tilde{R}^*, \tilde{\Pi}^*) &= \frac{1}{4G_0} \tilde{R}_{ij}^* \tilde{\Pi}_{ij}^*, & \tilde{F}(\tilde{R}^*) &= G_0 \tilde{R}_{ij}^* \tilde{R}_{ij}^*, & \tilde{G}(\tilde{\Pi}^*) &= \frac{1}{6G_0} \tilde{\Pi}_{ij}^* \tilde{\Pi}_{ij}^*, \\ \tilde{W}_1(\tilde{R}_1^*, \tilde{\Pi}_1^*) &= \frac{1}{2} \tilde{R}_1^* \tilde{\Pi}_1^*, & \tilde{F}_1(\tilde{R}_1^*) &= \frac{3}{2} K_0 (\tilde{R}_1^*)^2, & \tilde{G}_1(\tilde{\Pi}_1^*) &= \frac{1}{6K_0} (\tilde{\Pi}_1^*)^2. \end{aligned}$$

Приведенные выше соотношения при условиях типа (15) определяют потенциальную нелинейную связь потоков (деформаций) и сил (напряжений) через соответствующие обобщённые импульсы. Здесь, как и ранее свёртки типа $s_{ij}s_{ij} = s_u^2$ – вторые инварианты тензоров, а потенциалы есть квадратичные функционалы. Могут быть более сложные соотношения, например, тогда когда функционалы – неквадратичные функции соответствующих импульсов потоков и сил – функционалов типа Больцмана-Кельвина:

$$\begin{aligned} F &= F(R_u^*), & \Pi_{ij}^* &= \frac{\partial F}{\partial R_{ij}^*} = \Phi(R_u^*) R_{ij}^*, & G &= G(\Pi_u^*), & R_{ij}^* &= - \frac{\partial G}{\partial \Pi_{ij}^*} = \phi(\Pi_u^*) \Pi_{ij}^*, \\ G &= F - R_{ij}^* \frac{\partial F}{\partial R_{ij}^*} = F - R_{ij}^* \Pi_{ij}^*, & F &= G - \Pi_{ij}^* \frac{\partial G}{\partial \Pi_{ij}^*} = G + \Pi_{ij}^* R_{ij}^*, & (R_u^*)^2 &= R_{ij}^* R_{ij}^*. \end{aligned}$$

Отметим важное свойство потенциалов типа $F(R_{ij}^*)$ и $G(\Pi_{ij}^*)$: они зависят либо только от импульсов потоков, либо только от импульсов сил. Потенциалы могут содержать только импульсы разнородных потоков и сил.

Таким образом, потенциалы больцмановско-кельвиновских ВУТ могут быть представлены как функции обобщённых импульсов – функционалов потоков, скоростей потоков, сил и, в некоторых случаях, скоростей сил. Ниже приведены соответствующие примеры «модельных» ВУТ, таких как «стандартные» трёхэлементные тела Кельвина и Пойнтинга-Томсона и двухэлементные тела Максвелла и Фойгхта. В первых примерах приводятся основные свойства деформационных кривых ВУТ с экспоненциальными ядрами и иллюстрируются связи потоков и сил и соответствующих импульсов для трёх программ «истории» деформации или нагружения, а в последних двух примерах приведены необходимые преобразования определяющих соотношений, приводящие к больцмановски-кельвиновскому виду.

Импульсы потоков и сил «стандартного» тела Кельвина. Модель линейного вязкоупругого тела, предложенная в 1875 г., представляет собой $K = H_1 \cap F = H_1 \cap (H_2 \cup N_2)$ последовательное соединение простого гукковского H_1 ; $\sigma_1 = E_1 \epsilon_1$ элемента и фойгхтовского $F = H_2 \cup N_2$ тела, состоящего из параллельного соединения простых гукковского H_2 ; $\sigma_2 = E_2 \epsilon_2$ и ньютоновского N_3 ; $\sigma_3 = \eta_3 \dot{\epsilon}_3$ элементов. Соответствующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее напряжённо-деформированное состояние такого тела:

$$\dot{\sigma} + \lambda \sigma = E(\dot{\epsilon} + \mu \epsilon), \quad \sigma(0) = \epsilon(0) = 0, \quad \lambda = \frac{E_1 + E_2}{\eta_3}, \quad \mu = \frac{E_2}{\eta_3}, \quad E = E_1,$$

при нулевых начальных условиях имеет решение:

$$\sigma(t) = E[\epsilon(t) - (\lambda - \mu) \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} \epsilon(\tau) d\tau], \quad \lambda - \mu = \frac{E_1}{\eta_3}, \tag{19}$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} [\sigma(t) + (\lambda - \mu) \int_0^t \exp\{-\mu(t-\tau)\} \sigma(\tau) d\tau], \quad \lambda > \mu.$$

Аналогичное справедливо и для «нормального» тела **Пойнтинга-Томсона** (1890-1892г.), представляющего собой $P = H_1 \cup F = H_1 \cup (H_2 \cap N_2)$ параллельное соединение простого гукковского H_1 элемента и максвеловского $M = H_2 \cap N_2$ тела, состоящего из последовательно соединённых простых гукковского H_2 и ньютоновского N_2 элементов. При этом параметры уравнения E , λ и μ выражаются через соответствующие модули упругости Юнга гукковских элементов и коэффициенты вязкости ньютоновских элементов:

$$E = (E_1 + E_2), \quad \lambda = \frac{E_2}{\eta_3}, \quad \mu = \frac{E_1 E_2}{\eta_3 (E_1 + E_2)}, \quad \lambda - \mu = \frac{E_2}{\eta_3} \frac{E_2}{E_1 + E_2}, \quad \lambda > \mu.$$

Ядра релаксации $R(t-\tau) = \exp\{-\lambda(t-\tau)\}$ и ползучести $\Pi(t-\tau) = \exp\{-\mu(t-\tau)\}$ разностного экспоненциального типа, а коэффициенты при них $\lambda - \mu \geq 0$, соответственно, (E_1/η_3) и $E_2^2/(E_1 + E_2)\eta_3$ больше нуля. Для модельных численных исследований состояний больцмановских реологических тел с функциями последействия с ядрами экспоненциального типа, не связанных с конкретными свойствами гукковских и ньютоновских элементов, величина $\lambda - \mu = \beta \geq 0$ может выбираться таким образом, чтобы относительное изменение подынтегральных функций не превышало заданной величины на всём интервале времени. Значение параметра β ; $\leftrightarrow (\sigma(t))/(E\varepsilon(t)) \sim \exp\{-\beta t\} \approx \Delta \xi$, а параметров λ и μ – по уровню (асимптотам) кривых ползучести или релаксации:

$$\frac{\varepsilon(t)E}{\sigma_0} = \frac{\lambda}{\mu} + (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \exp\{-\mu t\}, \quad \frac{\sigma(t)}{E\varepsilon_0} = \frac{\mu}{\lambda} + (1 - \frac{\mu}{\lambda}) \exp\{-\lambda t\}.$$

На рисунках 1 и 2 приведены графики ядер релаксации и ползучести (при $\beta = 1$ и четырёх значениях $\lambda_n = 1.1; 3; 5; 10$ и, соответственно, $\mu_n = 0.1; 2; 4; 9$; нумерации кривых на рисунках соответствует номеру $\lambda_n \rightarrow n = 0, 1, 2, 3$), кривые релаксации (рисунок 2) и ползучести (рисунок 3).

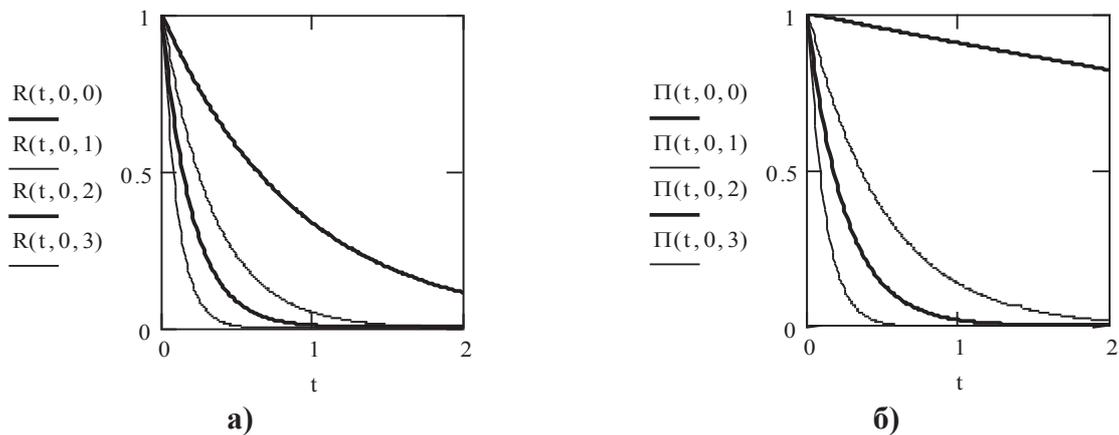


Рисунок 1. Ядра релаксации (а) и ползучести (б)

На рисунках 4а и 4б представлены значения, соответственно, импульсов деформаций и напряжений:

$$\frac{\sigma_R(t,0)}{E\varepsilon_0} = 1 - \int_0^t R(t-\tau) d\tau = 1 - J_R(t,0), \quad J_R(t,0) = \int_0^t R(t-\tau) d\tau = I_R(t,0) = \int_0^t \Pi(t-\tau) \sigma_R(\tau) d\tau,$$

$$\frac{E\varepsilon_\Pi(t,0)}{\sigma_0} = 1 + \int_0^t \Pi(t-\tau) d\tau = 1 + I_\Pi(t,0), \quad J_\Pi(t,0) = \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_\Pi(\tau) d\tau = I_\Pi(t,0) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\tau.$$

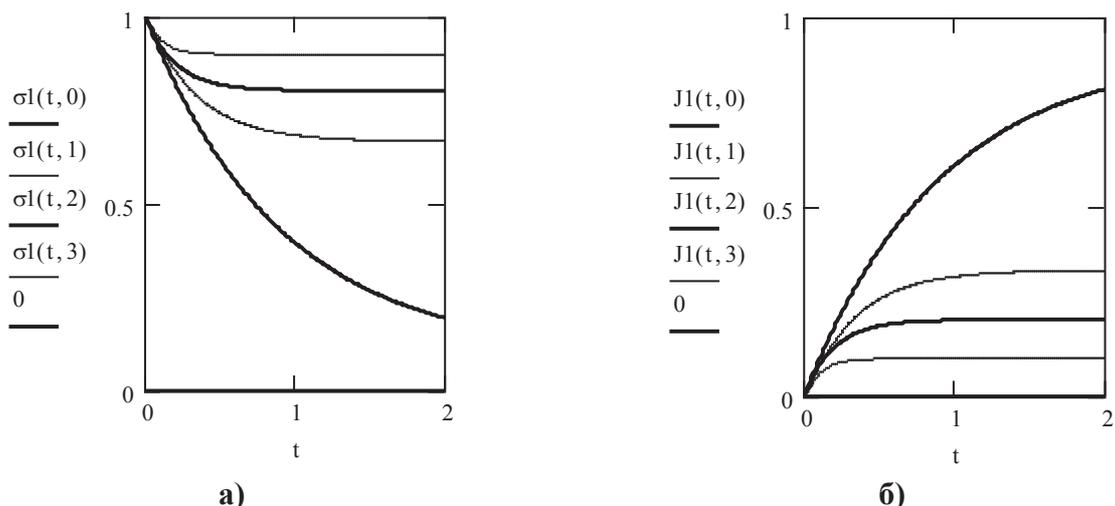


Рисунок 2. Кривые релаксации (а) и соответствующие импульсы деформации (б)

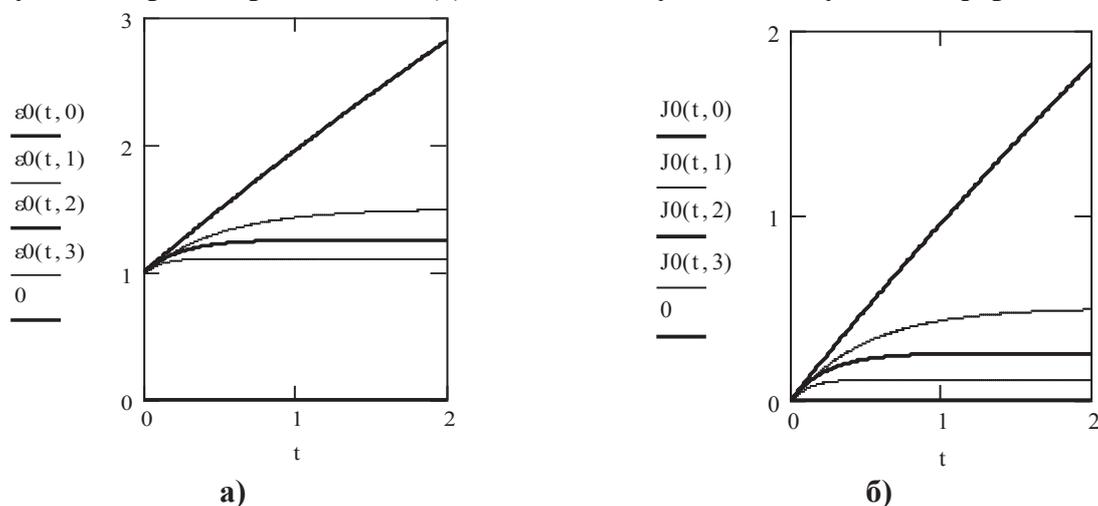


Рисунок 3. Кривые ползучести (а) и соответствующие импульсы (б) деформаций

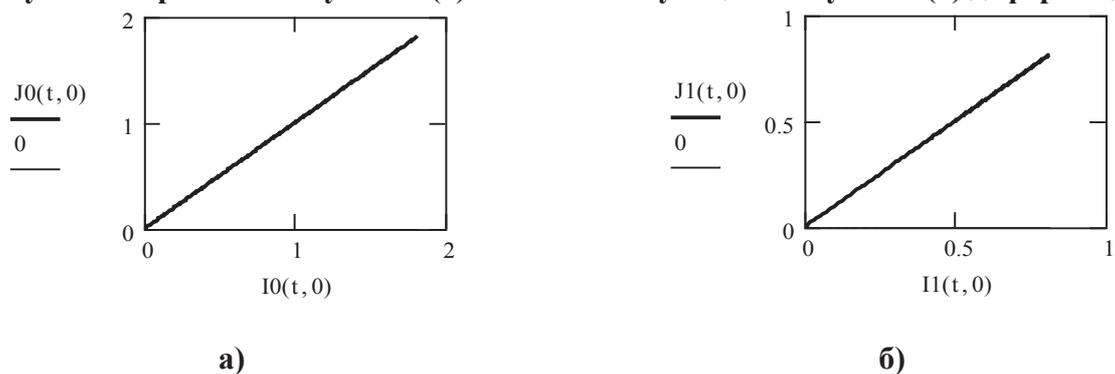


Рисунок 4. Импульсы деформаций и напряжений при ползучести (а) и релаксации (б)

В качестве пробных «численных экспериментов» приняты следующие «истории» деформации (Д) и нагружения (Н): гармоническая смещённая (ГК1), параболическая (П), гармоническая симметричная (Г1) и гармоническая смещённая с удвоенной частотой (ГК2), заданных на интервале времени $0 \leq t \leq 2$:

$$\begin{aligned} \text{ГК1Д: } \varepsilon(t) &= \frac{1 - \cos(\pi t)}{2}, & \text{ПД: } \varepsilon(t) &= 1 - (1 - t)^2, & \text{Г2Д: } \varepsilon(t) &= \sin(2\pi t), \\ \text{ГК2Д: } \varepsilon(t) &= \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2}, & \text{ГК1Н: } \sigma(t) &= \frac{1 - \cos(\pi t)}{2}, & \text{ПН: } \sigma(t) &= 1 - (1 - t)^2. \end{aligned}$$

На рисунке 5а представлены графики «истории» деформации и «отклика» напряжений для одного из значений параметра $\lambda_0 = 1.1$, а на рисунке 5б – «изохронная деформационная кривая» $\sigma \sim \varepsilon$ для «истории» деформаций ГК1Д.

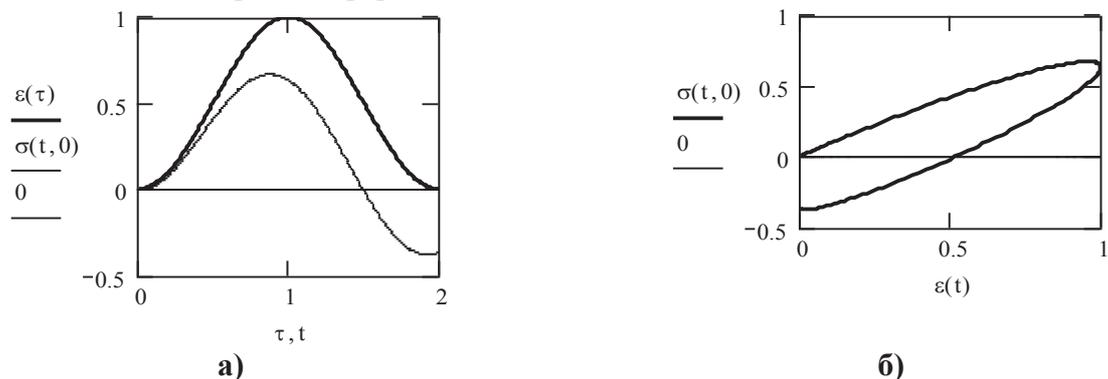


Рисунок 5. «История» деформации и «отклик» (а) и изохронная кривая (б) по программе ГК1Д

Для всех указанных значений параметров μ_n, ν_n аналогичные кривые приведены ниже.

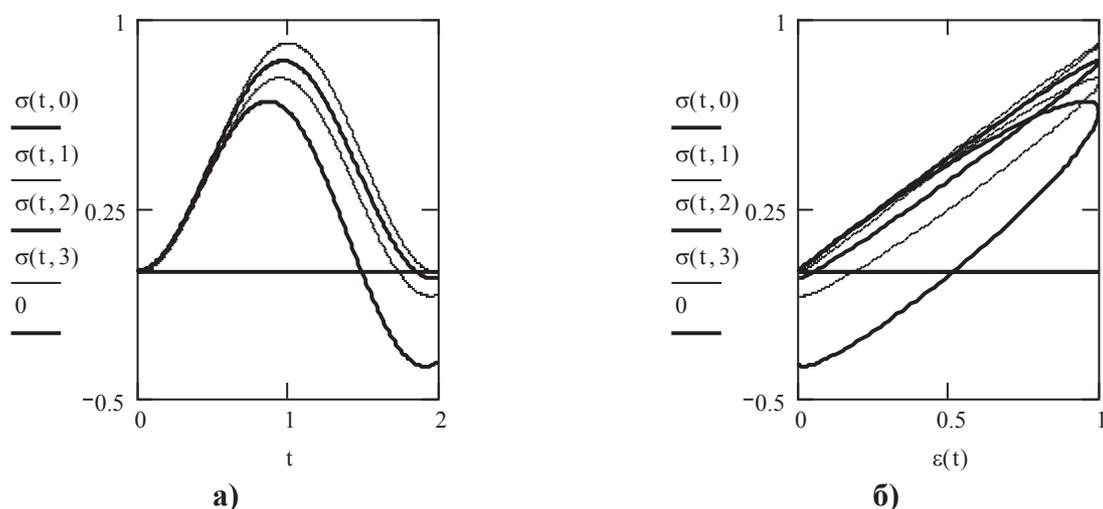


Рисунок 6. «Отклики» (а) и изохронные кривые (б) по программе ГК1Д

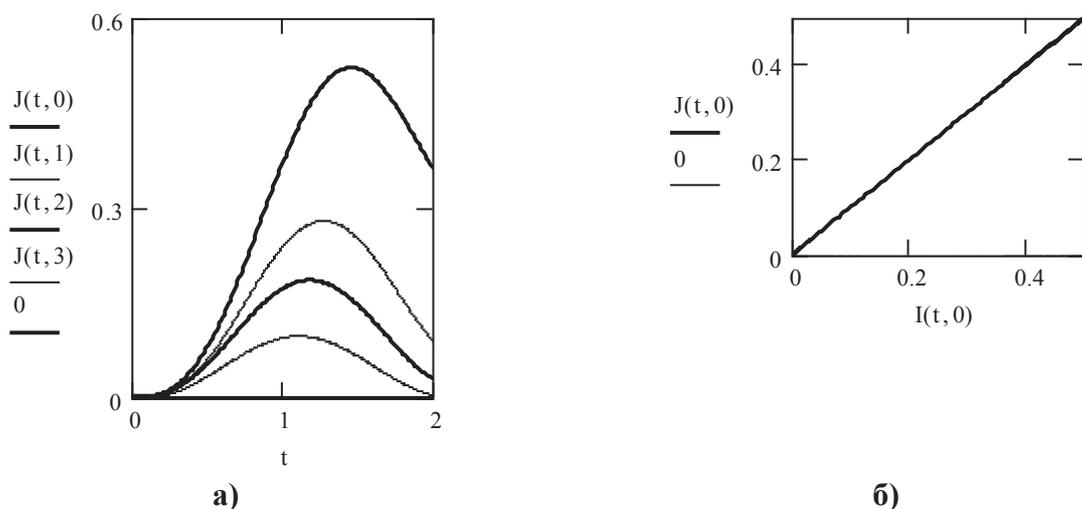


Рисунок 7. Импульсы деформации (а) и изохронные импульсы (б) деформации и напряжений по программе ГК1Д

В рассматриваемых примерах иллюстрируются характерные свойства линейных вязко-

упругих тел, проявляющихся в различных режимах («историях») деформации и нагружения, в частности, активного нагружения и разгрузки по гармоническому и параболическому законам и повторное нагружение – разгрузка. Приведены изохорные деформационные кривые $\sigma \sim \varepsilon$ и графики изменения импульсов деформации и напряжений. При этом, если задается «история» деформации, то значения импульса напряжений определяются по значениям вычисленных напряжений; если «история» задаётся по напряжениям, то импульс деформации определяется по значениям вычисленных деформаций. В конце каждой серии графиков приводится изохронная кривая импульсов – прямая (линейная) зависимость.

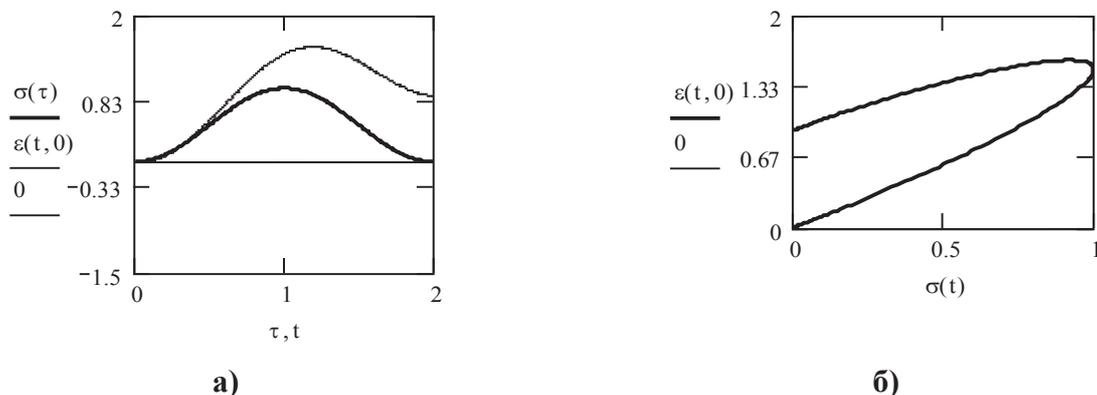


Рисунок 8. «История» напряжений и «отклик» (а) и изохронная кривая (б) по программе ГК1Н

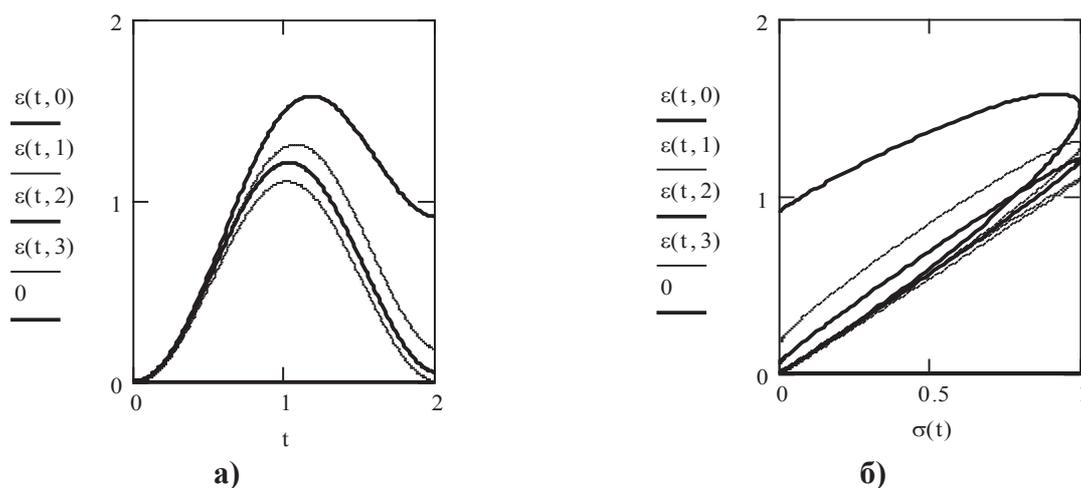


Рисунок 9. «Отклики» (а) и изохронные кривые (б) по программе ГК1Н

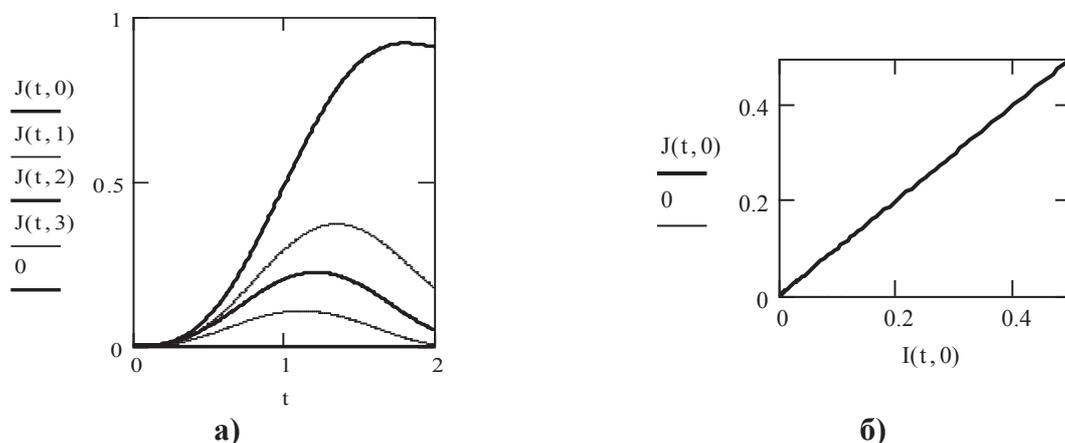


Рисунок 10. Импульс деформации (а) и изохронные импульсы (б) деформации и напряжений по программе ГК1Н

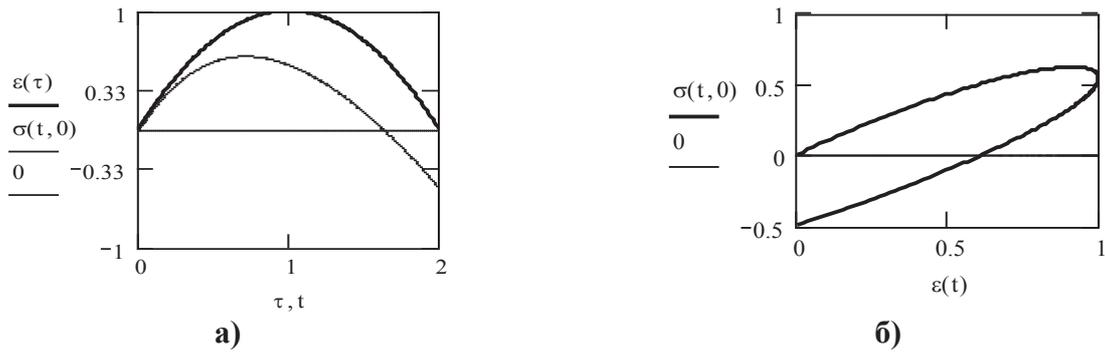


Рисунок 11. «История» деформации и «отклик» (а) и изохронная кривая (б) по программе ПД

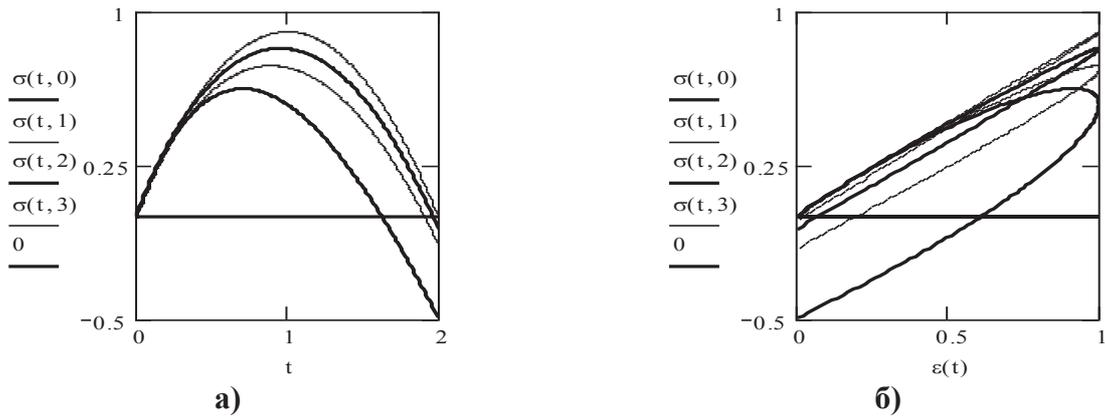


Рисунок 12. «Отклики» (а) и изохронные (б) кривые по программе ПД

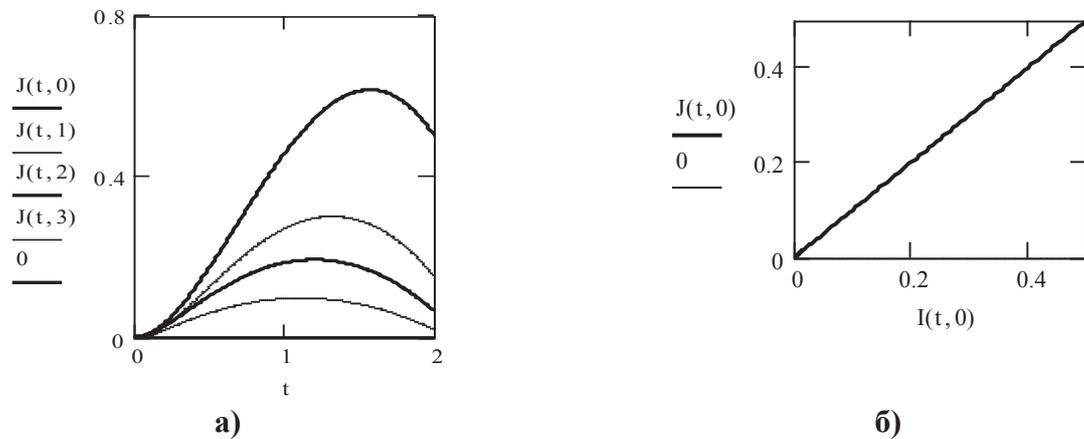


Рисунок 13. Импульс деформации (а) и изохронные (б) импульсы напряжений и деформаций по программе ПД

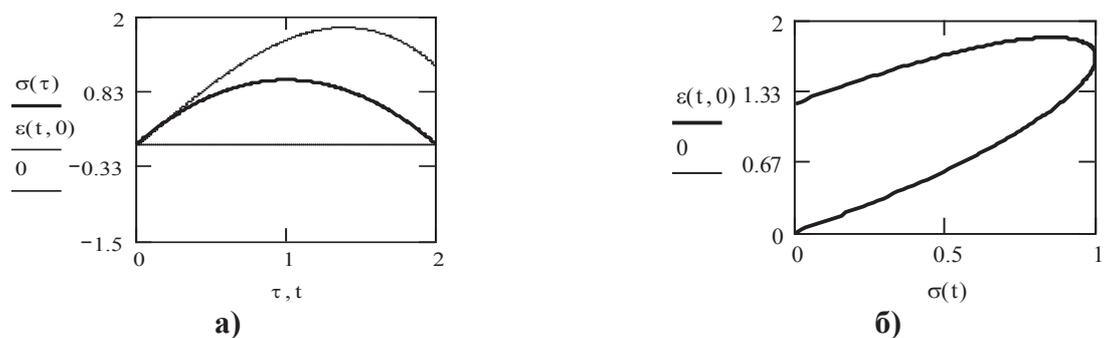


Рисунок 14. «История» напряжений и «отклик» (а) и изохронная кривая (б) по программе ПН

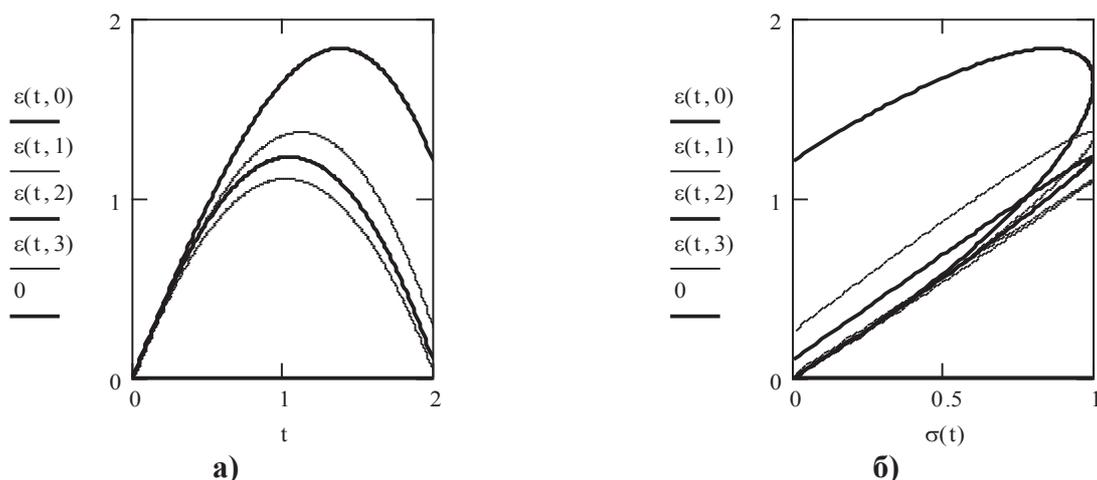


Рисунок 15. «Истории» напряжений и «отклики» (а) и изохронные (б) кривые по программе ПД

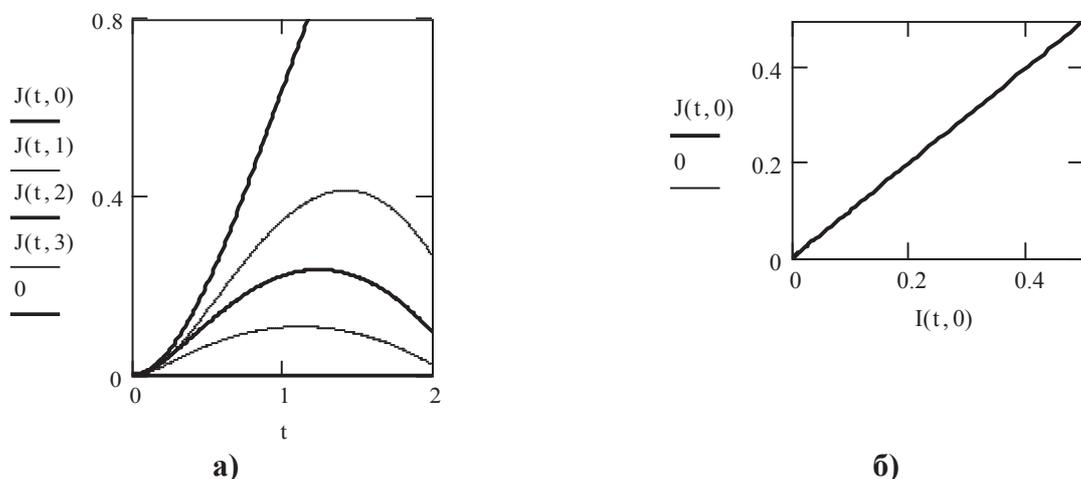


Рисунок 16. Импульсы деформаций (а) и изохронная кривая (б) импульсов по программе ПН

Импульсы потоков и сил тела Максвелла. Так для модели Максвелла $M = H \cap N$, представляющей последовательное двухэлементное простое соединение гуковских и ньютоновских элементов (так что $\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E\dot{\epsilon}$, $\lambda = E/\eta$):

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \left[\dot{\sigma} + \lambda \int_0^t \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{E} \left[\dot{\sigma} + \lambda \Pi^* \{ \dot{\sigma} \} \right],$$

$$\Pi^* \{ \dot{\sigma} \} = \int_0^t \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \int_0^t \Pi(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad \Pi(t - \tau) = \theta(t - \tau),$$

$$\sigma = E \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau,$$

$$\dot{\sigma} = E \left[\dot{\epsilon} - \lambda \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \right] = E \left[\dot{\epsilon} - \lambda R^* \{ \dot{\epsilon} \} \right],$$

$$R^* \{ \dot{\epsilon} \} = \int_0^t \exp\{-\lambda(t - \tau)\} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t R(t - \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \quad R(t - \tau) = \exp\{-\lambda(t - \tau)\},$$

$$\begin{aligned}
R^* \{\dot{\epsilon}\} &= \int_0^t \exp\{-\lambda(t-\tau)\} \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t R(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \quad R(t-\tau) = \exp\{-\lambda(t-\tau)\}, \\
ER^* \{\dot{\epsilon}\} &= \Pi^* \{\dot{\sigma}\}, \quad R(t-\tau) = \exp\{-\lambda(t-\tau)\}, \quad \Pi(t-\tau) = \theta(t-\tau), \\
F &= F(R^* \{\dot{\epsilon}\}) = \frac{1}{2} (R^* \{\dot{\epsilon}\})^2, \quad G = G(\Pi^* \{\dot{\sigma}\}) = -\frac{1}{2} (\Pi^* \{\dot{\sigma}\})^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

В рассмотренном случае в качестве потока принята скорость деформации, а в качестве силы – скорость напряжений. Соответственно, импульсы скоростей деформации и скоростей напряжений, между которыми определена линейная связь (20), ядро релаксации – экспонента, а ядро ползучести – единичная функция.

Импульсы потоков и сил тела Фойгхта. Для модели Фойгхта $F = H \cup N$, состоящей из параллельно соединённых простейших гуковских и ньютоновских элементов (так что $\sigma = \eta(\dot{\epsilon} + \mu e)$, $\mu = E/\eta$):

$$\begin{aligned}
\sigma &= E \int_0^t \left[1 + \frac{1}{\mu} \delta(t-\tau)\right] \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = ER^* \{\dot{\epsilon}\}, \quad R^* \{\dot{\epsilon}\} = \int_0^t \left[1 + \frac{1}{\mu} \delta(t-\tau)\right] \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \\
\sigma &= Ee + \eta \dot{\epsilon} = E \int_0^t \dot{\epsilon}(\tau) d\tau + \eta \dot{\epsilon} = \eta \left[\dot{\epsilon} + \mu \int_0^t \dot{\epsilon}(\tau) d\tau\right] = \eta [\dot{\epsilon} + \mu R^* \{\dot{\epsilon}\}], \\
R^* \{\dot{\epsilon}\} &= \int_0^t \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t R(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau, \quad R(t-\tau) = \theta(t-\tau), \\
\dot{\epsilon} + \mu e &= \frac{\sigma}{\eta}, \quad e = \frac{1}{\eta} \int_0^t \exp\{-\mu(t-\tau)\} \sigma(\tau) d\tau, \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} \left[-\mu \int_0^t \exp\{-\mu(t-\tau)\} \sigma(\tau) d\tau + \sigma\right] = \\
&= \frac{1}{\eta} \left[\sigma - \mu \int_0^t \exp\{-\mu(t-\tau)\} \sigma(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{\eta} [\sigma - \mu \Pi^* \{\sigma\}], \\
\Pi^* \{\sigma\} &= \int_0^t \exp\{-\mu(t-\tau)\} \sigma(\tau) d\tau = \int_0^t \Pi(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad \Pi(t-\tau) = \exp\{-\mu(t-\tau)\}, \\
\eta R^* \{\dot{\epsilon}\} &= \Pi^* \{\sigma\}, \quad R(t-\tau) = \theta(t-\tau), \quad \Pi(t-\tau) = \exp\{-\mu(t-\tau)\}, \\
F &= F(R^* \{\dot{\epsilon}\}) = \frac{1}{2} (R^* \{\dot{\epsilon}\})^2, \quad G = G(\Pi^* \{\sigma\}) = -\frac{1}{2} (\Pi^* \{\sigma\})^2.
\end{aligned} \tag{21}$$

Для определяющих соотношений модели Фойгхта в качестве потока принята скорость деформации, а в качестве силы – напряжение. Линейная связь соответствующих импульсов скоростей деформации и импульсов напряжений представлены формулой (21), где ядро ползучести – экспонента, а ядро релаксации – единичная функция. Потенциалы импульсов напряжений и импульсов скоростей деформации – квадратичные формы.

Квазилинейные соотношения импульсов в главной теории вязко-упругости [12]. Для тензорно-линейных уравнений квазилинейной теории вязко-упругости, предложенной А.А. Ильюшиным и П.М. Огибаловым, основанной на постулате изотропии, используем тензоры-девиаторы интегрального импульса: деформации – импульс движения, интегрального импульса напряжений – импульс силы:

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) \mathcal{E}_{ij}(\tau) d\tau, \quad S_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_u(t) &= \sqrt{\mathcal{E}_{ij}(t)\mathcal{E}_{ji}(t)} = \sqrt{\int_0^t \int_0^t R(t-\tau)R(t-\xi)\mathcal{E}_{ij}(\tau)\mathcal{E}_{ji}(\xi)d\tau d\xi}, \\ S_u(t) &= \sqrt{S_{ij}(t)S_{ji}(t)} = \sqrt{\int_0^t \int_0^t \Pi(t-\tau)\Lambda(t-\xi)s_{ij}(\tau)s_{ji}(\xi)d\tau d\xi}.\end{aligned}$$

Из равенства направляющих тензоров импульсов деформации и напряжений:

$$\frac{\mathcal{E}_{ij}(t)}{\mathcal{E}_u(t)} = \frac{S_{ij}(t)}{S_u(t)}, \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{ij}(t) = \frac{\mathcal{E}_u(t)}{S_u(t)} S_{ij}(t), \quad \Leftrightarrow \quad S_{ij}(t) = \frac{S_u(t)}{\mathcal{E}_u(t)} \mathcal{E}_{ij}(t), \quad (23)$$

следуют квазилинейные соотношения ВУТ. Полагая универсальной зависимостью «жёсткости» $2G(\mathcal{E}_u(t)) = S_u(t)/\mathcal{E}_u(t)$ или «податливости» $g(S_u(t)) = \mathcal{E}_u(t)/S_u(t)$ при активном пропорциональном нагружении, т.е. универсальности изохронной импульсно-деформационной кривой:

$$\mathcal{E}_u(t) = \varphi(S_u(t)) = \frac{1}{2G}(1 - \Omega(S_u(t)))S_u(t), \quad S_u(t) = \Phi(\mathcal{E}_u(t)) = 2G(1 - \omega(\mathcal{E}_u(t)))\mathcal{E}_u(t), \quad (24)$$

и учитывая уравнения связей ядер действия (деформации) и последдействия (релаксации):

$$R(t-\tau) = \Pi(t-\tau) + \int_{\tau}^t \Pi(t-\xi)R(\xi-\tau)d\xi, \quad \Pi(t-\tau) = R(t-\tau) + \int_{\tau}^t R(t-\xi)\Pi(\xi-\tau)d\xi, \quad (25)$$

квазилинейные связи тензоров деформации и напряжений вязко-упругих тел записываются в формах:

- равное присутствие импульсов:

$$\frac{\mathcal{E}_{ij}(t)}{\mathcal{E}_u(t)} = \frac{s_{ij}(t)}{S_u(t)} + \int_0^t \Pi(t-\tau) \frac{s_{ij}(\tau)}{S_u(\tau)} d\tau, \quad \frac{s_{ij}(t)}{S_u(t)} = \frac{\mathcal{E}_{ij}(t)}{\mathcal{E}_u(t)} - \int_0^t R(t-\tau) \frac{\mathcal{E}_{ij}(\tau)}{\mathcal{E}_u(\tau)} d\tau; \quad (26)$$

- разрешённые относительно импульса деформации:

$$\mathcal{E}_{ij}(t) = \frac{\mathcal{E}_u(t)}{S_u(t)} s_{ij}(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau) \frac{\mathcal{E}_u(\tau)}{S_u(\tau)} s_{ij}(\tau) d\tau, \quad \frac{\mathcal{E}_u(t)}{S_u(t)} s_{ij}(t) = \mathcal{E}_{ij}(t) - \int_0^t R(t-\tau) \mathcal{E}_{ij}(\tau) d\tau; \quad (27)$$

- разрешённые относительно импульса напряжений:

$$\mathcal{E}_{ij}(t) \frac{S_u(t)}{\mathcal{E}_u(t)} = s_{ij}(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau, \quad s_{ij}(t) = \mathcal{E}_{ij}(t) \frac{S_u(t)}{\mathcal{E}_u(t)} - \int_0^t R(t-\tau) \frac{S_u(\tau)}{\mathcal{E}_u(\tau)} \mathcal{E}_{ij}(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Заключение

В рассмотренных примерах линейных модельных представлений вязко-упругих тел наглядно видно, что в качестве потенциалов могут быть использованы импульсы соответствующих потоков (деформаций, скоростей деформаций) и сил (напряжений и скоростей напряжений) с ядрами релаксации и ползучести. Для их выражений используются различные преобразования и подстановки. В частности, для нелинейных (квазилинейных по потокам и силам) и линейных по времени применяются соответствующие подстановки. Таким образом, потенциалы больцмановско-кельвиновских ВУТ могут быть представлены как функции обобщённых импульсов-функционалов потоков, скоростей потоков, сил и, в некоторых случаях, скоростей сил.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. Ун-та. - 1990. 310 с.
2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. - 280 с.
3. Ильюшин А.А. Труды. Т.3. Теория термовязкоупругости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 288 с.
4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука. - 1977. - 384 с.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. - 1966. - 752 с.
6. Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. (Новости фундаментальной физики). - М., 1974. - С.9-12, 40-44, 123, 163-166.
7. Кристенсен Р. Введение в теорию вязко-упругости. М.: Мир. - 1974. - 338 с.
8. Король Е.З. Термодинамические потенциалы и некоторые соотношения анизотропных сплошных сред. / Сб. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемого твёрдых тел, посвящённого девяностолетию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва. 22-23 января 2001 года. М.: Издательство Московского университета. - 2001. - 454 с. (С. 93-99).
9. Фрейденталь А., Гейрингер Ч. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Наука. - 1962. - 432 с.
10. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, 1965. - 197 с.
11. Москвитин В.В. Сопротивление вязко-упругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твёрдом топливе). М.: Наука. - 1972. - 328 с.
12. Савин Г.М., Рушицкий Я.Я. Элементы механики спадковых средовищ. К.: Вища школа. - 1976. - 252 с. (на украинском языке).
13. Дьячмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, - 1974. - 304 с.
14. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир. - 1970. - 274 с.
15. Ильюшин А.А. Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС) // ДАН СССР, - 1994, № 1. - С. 48-50.
16. Ильюшин А.А., Ильюшина Г.А. Вопросы термодинамики необратимых процессов // Вест. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. - 1983. - № 3. - С. 73-80.
17. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных композитных материалов. М.: Наука. - 1985. - 342 с.
18. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, - 1979. - 288 с.
19. Король Е.З. Термодинамические потенциалы в механике сплошных сред сложной структуры. Проблемы машиностроения и автоматизации. № 3. 2002, с. 61-66.
20. Король Е.З. К моделированию реономных свойств твёрдых деформируемых тел. Известия МГТУ «МАМИ» № 3 (17), 2013, т. 1. С. 94-110.