Об одной модели контактного трения в процессах течения тонкого пластического слоя

д.ф.-м.н. проф. Кийко И.А.
МГУ им. М.В. Ломоносова
8(495)9395539, elast5539@mail.ru

Аннотация. Предложен вариант теории течения тонкого слоя пластического материала, в котором используется новая модель трения на контактных поверхностях, основанная на гипотезе о тесной физической связи анизотропии пластического материала и фактуры контактной поверхности.

Ключевые слова: *совместность системы уравнений течения, уравнение Лагранжа, интегрирующий множитель, уравнение растекания*

Процессы течения тонкого пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями с анизотропным контактным трением, рассматривались в работах [1, 2]. В них высказано предположение, что напряжение контактного трения определяется матрицей анизотропии; в развитой теории эта матрица принята диагональной. Показано, что при малой анизотропии эволюция контура области, занятой слоем, описывается уравнением того же типа, что и в изотропном случае [3, 4], в работе [4] исследована задача о неустойчивости растекания полосы. В предлагаемой работе развивается феноменологический подход: мы полагаем, что величина контактного напряжения трения в процессах растекания тонкого пластического слоя есть функция угла наклона касательной к линии тока и параметров процесса: температуры, механических свойств материала слоя и др. Материал слоя считается пластически изотропным.

1. Уравнения равновесия

Слой пластического материала занимает в плоскости xy в начальный момент времени область S_0, ограниченную контуром Γ_0: $y_0=\varphi_0\left(x_0\right)$. Слой сжимается сближающимися плоскостями, так что в моменты $t>0$ имеем область S с контуром $y_0=\varphi\left(x_0,t\right)$. Считаем область S (так же как и S_0) симметричной относительно оси x, поэтому линия разветвления течения – конечный или бесконечный отрезок этой оси.

Обозначим τ_S – предел текучести материала слоя на сдвиг; вообще говоря, τ_S может быть функцией температуры, степени деформации и других параметров процесса течения. Мы будем считать $\tau_S=const$, чтобы не затенять основное свойство процесса течения – анизотропию трения. Поэтому принимаем гипотезу:

$$-\overline{\tau}_{mp}=\tau_S f\left(\theta,\mu\right)n^0,\ n^0=\left\{\cos\theta,\sin\theta\right\}, \tag{1.1}$$

где: θ – угол между вектором скорости частиц слоя и осью x, μ – показатель анизотропии.

Функцию $f\left(\theta,\mu\right)$ примем с условиями: она симметрична относительно осей координат; монотонно убывает от единицы до μ при изменении θ от 0 до $\pi/2$. Трение ортотропно, оси ортотропии совпадают с осями координат.

Обозначим ℓ – характерный размер области S_0, h_0 – начальное значение толщины слоя и введем функцию давления $\zeta=\left(p-\lambda\sigma_S\right)h/\left(2\tau_S\ell\right)$ (где $\sigma_S=\sqrt{3}\tau_S$, $\lambda\sim 1$), состояние в слое при этом и условие на границе будут подчиняться системе уравнений:

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial x}=f\cos\theta;\ -\frac{\partial\zeta}{\partial y}=f\sin\theta;\ \zeta|_{\Gamma}=0, \tag{1.2}$$

здесь введены безразмерные координаты, отнесенные к ℓ.

Условие совместности системы (1.2) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta-f\sin\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}-\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta+f\cos\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0\,, \tag{1.3}$$

и обозначает, что функции $\theta(x,y)$ и $g=\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta-f\sin\theta\right)x+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta+f\cos\theta\right)y$ линейно зависимы. Поэтому имеем общее решение уравнения (1.3):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\cos\theta-f\sin\theta\right)x+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta+f\cos\theta\right)y=\psi_1(\theta), \tag{1.4}$$

в котором $\psi_1(\theta)$ – произвольная функция.

Запишем уравнение линии тока в виде $y=y(x)$; тогда $y'=tg\theta\equiv\xi$. После этой замены уравнение (1.4) примет вид:

$$y=\frac{fy'-f'_{\xi}\left(1+y'^2\right)}{f'_{\xi}\left(1+y'^2\right)y'+f'}x+\psi(y'), \tag{1.5}$$

для функции анизотропии f оставлено прежнее обозначение.

Уравнение (1.5) – это уравнение Лагранжа:

$$y=\varphi(y')x+\psi(y'). \tag{1.6}$$

2. Общее решение уравнения (1.6)

Во всех известных руководствах по обыкновенным дифференциальным уравнениям общее решение уравнения Лагранжа записывается в параметрическом виде; вводится параметр $P(x)=y'$, уравнение (1.6) дифференцируется по x, в результате имеем:

$$\big(\varphi(P)-P\big)dx+\big(\varphi'(P)x+\psi'(P)\big)dP=0. \tag{2.1}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{dx}{dP}+\frac{\varphi'(P)}{\varphi-P}x=-\frac{\psi'(P)}{\varphi-P}, \tag{2.2}$$

это линейное уравнение имеет решение:

$$x=\frac{1}{\mu(P)}\left(C-\int\frac{\psi'(P)\mu_1(P)dP}{\varphi-P}\right),\ \ln\mu_1=\int\frac{\varphi'(P)dP}{\varphi-P}, \tag{2.3}$$

из (1.6) имеем:

$$y=\varphi(P)x+\psi(P). \tag{2.4}$$

Таким образом, получено общее решение уравнения Лагранжа (1.6).

Приведем данную форму общего решения уравнения (1.6), которая в некоторых случаях может оказаться более простой с вычислительной точки зрения.

Легко видеть, что уравнение (2.1) имеет интегрирующий множитель $\mu(P)=\exp\left(\int\frac{dP}{\varphi-P}\right)$ и общее решение:

$$\mu(P)(\varphi-P)x+\int\mu(P)\psi'(P)dP=C. \tag{2.5}$$

Общее решение записывается в параметрическом виде:

$$x=\frac{1}{\mu(P)(\varphi-P)}\left(C-\int\mu(P)\psi'(P)dP\right),\ y=\varphi(P)x+\psi(P). \tag{2.6}$$

Легко доказывается, что (2.5) тождественно с (2.3).

3. Направления дальнейших исследований

1) Экспериментальное или теоретическое определение функции анизотропии $f(\theta,\mu)$ и зависимости предела текучести материала τ_S от параметров процесса, прежде всего от температуры.
2) Выбор функции $\psi(P)$; кроме соображений математической простоты и физической достоверности получаемых результатов, ничего другого, к сожалению, мы посоветовать не сможем.

Приведем (из соображений простоты результата) пример выбора функции $\psi(P)$.

Положим $\int\mu(P)\psi'(P)dP=\alpha_0\mu(P)(\varphi-P)$, отсюда дифференцированием находим $\psi(P)=\alpha_0\varphi(P)$, и из (2.6) определяем:

$$\mu(P)\left(\varphi(P)-P\right)=\frac{C_0}{x+x_0}.$$

Из этого уравнения определяется (точно или аппроксимационно) P в функции от x, после чего из второго уравнения (2.6) находится линия тока $y=y(x)$.

После этого по известной методике [4] определяется уравнение растекания.

<u>Пример</u>. Положим $f(\theta)=\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\big/\mu^2\right)^{-1/2}$ и из уравнения (1.5) получим:

$$y=\frac{1}{\beta^2}xy'+\psi_1(y').$$

Примем $\psi_1=\alpha_1 y'$, подставим в предыдущее уравнение и проинтегрируем его вместе с граничными условиями $x=x_0$, $y=\varphi(x_0,t)$, $(y'\varphi')_{x=x_0}=-1$. В результате получим:

$$y=f_1(x,x_0,t)=\varphi(x_0)\left(1+\frac{x_0-x}{\mu^2\varphi\varphi'}\right)^{\mu^2},$$

где φ' означает производную от φ по x_0.

Соответственно этому находим уравнение растекания:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\varphi+\frac{2\mu^2}{1+\mu}\varphi'\varphi'^2+\frac{\mu^2}{1+\mu}\varphi^2\varphi'',$$

оно дополняется условиями Коши: $\tau=0$, $\varphi=\varphi_0(x_0)$.

Здесь τ – степень деформации: $\tau=\ln\left(h_0/h(t)\right)$.

Литература

1. Кийко И.А. Технология обработки давлением и новые постановки задач в теории пластичности // Труды 9-й конференции по прочности и пластичности, М., 1996, т. 3, с. 149-149.
2. Кийко И.А. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // ПММ, 2006, т. 70, вып. 2, с. 344-351.
3. Кийко И.А. О растекании тонкого пластического слоя в условиях анизотропии // Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики, информатики», Россия, Тула, 19-23 сентября 2011г.
4. Кийко И.А. О форме анизотропного пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями с анизотропным трением // Вестник Московского университета, 2014.