Влияние параметров геометрически нелинейной эндохронной теории неупругости на описание процесса релаксации напряжений

д.ф.-м.н. проф. Кадашевич Ю.И., д.ф.-м-н. доц. Помыткин С.П., Помыткина Т.Б.
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербургский государственный университет
8(812) 7868660, math.spbgturp@yandex.ru, 8(812) 7084372, kaf54@guap.ru,
8(812) 4287109, t.pomytkina@spbu.ru

Аннотация. Рассматривается тензорно-параметрический вариант эндохронной теории неупругости для больших деформаций и поворотов, учитывающий временные эффекты. Численно моделируется процесс релаксации напряжений в материале. Изучается влияние параметра, входящего в градиент деформации, и параметра упрочнения материала на форму кривых «напряжение~время» и их количественные характеристики. Приведены результаты соответствующих численных экспериментов.

Ключевые слова: *неупругость, эндохронная теория, большие деформации, определяющие соотношения, релаксация напряжений, градиент деформации.*

В работе [1] были сформулированы принципы построения геометрически нелинейной теории неупругости эндохронного типа и предложены определяющие соотношения пластичности, учитывающие большие деформации и повороты. Впоследствии эта теория была обобщена для учета временных процессов, протекающих в неупругих материалах [2]. В работе [3] с использованием определяющих соотношений геометрически нелинейной эндохронной теории были представлены результаты решения ряда задач ползучести и релаксации. В предлагаемой вниманию читателя статье исследуется влияние параметра, входящего в тензор градиента деформаций, и коэффициента упрочнения на релаксацию напряжений в материале.

Рассматривается один из тензорно-параметрических вариантов эндохронной теории неупругости для больших деформаций и поворотов, учитывающих временные эффекты [2]. В безындексной форме записи тензоров определяющие соотношения имеют вид [3]:

$$\frac{\alpha\tau}{2G}\overset{\circ}{\sigma}+\frac{\sigma}{2G}|\dot{r}|=\tau\overset{\circ}{r}+\frac{r}{g+\alpha}|\dot{r}|,\ \varepsilon_0=\frac{\sigma_0}{K}\ , \qquad (1)$$

$$\tau=\tau(|r|,|\dot{r}|),\ g=g(|r|,|\dot{r}|),\ G=G(|r|,|\dot{r}|), \qquad (2)$$

$$r=\varepsilon-(1-\alpha)\,\frac{\sigma}{2G}\ ,\ \dot{r}=\dot{\varepsilon}-(1-\alpha)\,\frac{\dot{\sigma}}{2G}\ , \qquad (3)$$

$$\overset{\circ}{r}=D-(1-\alpha)\,\frac{\overset{\circ}{\sigma}}{2G}\ ,\ \overset{\circ}{\varepsilon}=D,\ \Omega=\dot{R}\,R^{T}, \qquad (4)$$

$$\overset{\circ}{\sigma}=\dot{\sigma}+\sigma\Omega-\Omega\sigma,\ \overset{\circ}{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}+\varepsilon\Omega-\Omega\varepsilon, \qquad (5)$$

$$|\dot{r}|=\sqrt{\frac{dr}{dt}:\frac{dr}{dt}}\ ,\ |r|=\int dr. \qquad (6)$$

Здесь ε и ε_0 – девиатор и шаровая часть тензора деформаций, σ и σ_0 – девиатор и шаровая составляющая тензора напряжений, r – девиатор параметрического тензора, τ – аналог деформационного предела текучести, g – аналог коэффициента упрочнения (разупрочнения), α – параметр эндохронности ($0 \le \alpha \le 1$), G – модуль сдвига, K – модуль объёмного сжатия, верхний индекс T – знак транспонирования, t – время. Кроме того, Ω – тензор спина, R – ортогональный тензор поворота, F – тензор градиента деформаций, U – правый тензор удлинения в полярном разложении тензора градиента $F = RU$, L – скорость градиента деформаций, D – тензор скоростей деформаций.

$$R = F\,U^{-1},\; L = \dot{F}\,F^{-1},\; D = (L + L^T)/2, \tag{7}$$

Частный вариант теории (1) – (7) для девиаторов при $\alpha = 1$, $2G = 1$ и $g = const$ имеет вид:

$$\tau\overset{\circ}{\sigma} + \sigma|\dot{\varepsilon}| = \tau\overset{\circ}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{g+1}|\dot{\varepsilon}|,\;\; \overset{\circ}{\varepsilon} = D, \tag{8}$$

$$\tau = \tau(|\varepsilon|, |\dot{\varepsilon}|). \tag{9}$$

Для исследования процесса релаксации напряжений был выбран градиент деформации в форме:

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & m\cdot k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

У такого типа градиента деформации ортогональный тензор поворота R и тензор спина Ω имеют следующую структуру:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; \Omega = \dot{\beta}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\; tg\,\beta = \frac{k_{12}\cdot(m-1)}{k_{11}+k_{22}}. \tag{11}$$

В работе [3] авторы данной публикации анализировали вариант эндохронной теории ползучести для больших деформаций и поворотов с градиентом деформации типа (10) при $m = 0$.

Предположим, что тензор скоростей деформации D, девиаторы тензоров деформации ε и напряжений σ имеют вид:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix},\; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},\; \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Используя (7) и (10), компоненты тензора скоростей деформации D можно связать с компонентами тензора градиента деформации F следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{k}_{11}\cdot k_{22} - m\cdot k_{12}\cdot\dot{k}_{12} = \Delta\cdot D_{11},\; \dot{k}_{22}\cdot k_{11} - m\cdot k_{12}\dot{k}_{12} = \Delta\cdot D_{22}, \tag{13а}$$

$$\dot{k}_{12}\cdot(k_{22} + mk_{11}) - k_{12}\cdot(\dot{k}_{22} + m\cdot\dot{k}_{11}) = 2\cdot\Delta\cdot D_{12}, \tag{13б}$$

$$\dot{k}_{33} = k_{33}\cdot D_{33},\; \Delta = k_{11}\cdot k_{22} - m\cdot k_{12}^2. \tag{13в}$$

Подставляя (11) в выражения для объективных производных (5), используя затем соотношения (1), (2), (4) и вводя обозначения $k = 1/(g+1)$ и $n = |\dot{\varepsilon}|/\tau$, получим замкнутую систему дифференциальных определяющих соотношений:

$$\dot{\sigma}_{11} - 2\dot{\beta}\cdot\sigma_{12} + n\cdot\sigma_{11} = D_{11} + k\cdot n\cdot\varepsilon_{11},\; \dot{\varepsilon}_{11} - 2\dot{\beta}\cdot\varepsilon_{12} = D_{11}, \tag{14}$$

$$\dot{\sigma}_{22} + 2\dot{\beta}\cdot\sigma_{12} + n\cdot\sigma_{22} = D_{22} + k\cdot n\cdot\varepsilon_{22},\ \dot{\varepsilon}_{22} + 2\dot{\beta}\cdot\varepsilon_{12} = D_{22}, \quad (15)$$

$$\dot{\sigma}_{33} + n\cdot\sigma_{33} = D_{33} + k\cdot n\cdot\varepsilon_{33},\ \dot{\varepsilon}_{33} = D_{33}, \quad (16)$$

$$\dot{\sigma}_{12} + \dot{\beta}\cdot(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + n\cdot\sigma_{12} = D_{12} + k\cdot n\cdot\varepsilon_{12},\ \dot{\varepsilon}_{12} + 2\dot{\beta}\cdot(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = D_{12}, \quad (17)$$

$$\dot{k}_{11}\cdot k_{22} - m\cdot k_{12}\cdot\dot{k}_{12} = \Delta\cdot D_{11},\ \dot{k}_{22}\cdot k_{11} - m\cdot k_{12}\cdot\dot{k}_{12} = \Delta\cdot D_{22}, \quad (18)$$

$$\dot{k}_{33} = k_{33}\cdot D_{33},\ \dot{k}_{12}\cdot(k_{22} + mk_{11}) - k_{12}\cdot(\dot{k}_{22} + m\cdot\dot{k}_{11}) = 2\cdot\Delta\cdot D_{12}, \quad (19)$$

$$tg\beta = \frac{k_{12}\cdot(m-1)}{k_{11} + k_{22}},\ \Delta = k_{11}\cdot k_{22} - m\cdot k_{12}^2,\ |\dot{\varepsilon}| = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2 + \dot{\varepsilon}_{33}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{12}^2}. \quad (20)$$

Исследование влияния параметров m и k на изменение напряжений во времени в процессе релаксации материала начинается с активного монотонного нагружения жестким сдвигом, когда $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{33} = 0$, $D_{12} \neq 0$. Нагружение продолжается до некоторого значения $\varepsilon_i = \varepsilon_i^0 > \tau$, где ε_i – интенсивность деформаций. После чего деформации фиксируются и наблюдается процесс релаксации напряжений. В численных экспериментах в соотношениях (14) – (20) было принято, что $\tau = k_0\cdot|\dot{\varepsilon}|$ и $k_0 = 1$, то есть $n = 1$. Изменялся «аналог» коэффициента упрочнения (разупрочнения) k и параметр m, определяющий форму тензора градиента деформации F.

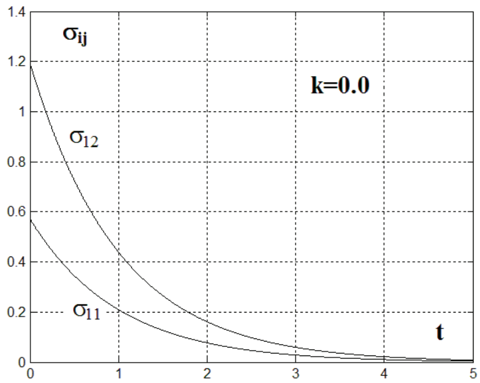

Рисунок 1. Релаксация осевого и сдвигового напряжения при $k = 0$

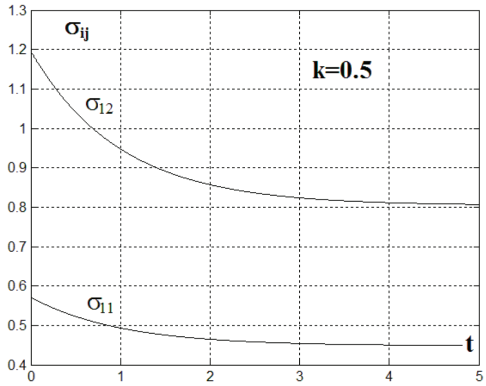

Рисунок 2. Изменение напряжений в процессе релаксации при $k = 0.5$

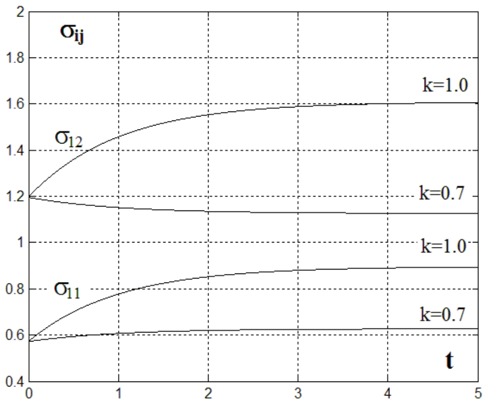

Рисунок3. Зависимость напряжений σ_{11} и σ_{12} от времени при $k = 0.7$ и $k = 1.0$

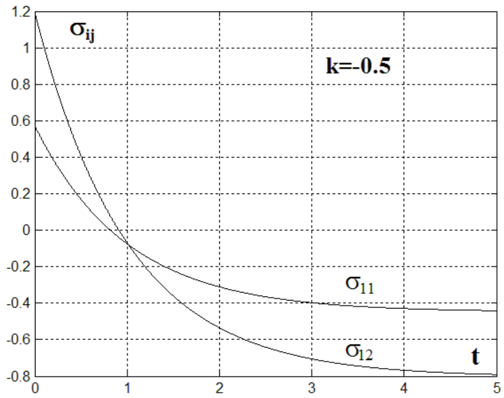

Рисунок 4. Изменение напряжений σ_{11} и σ_{12} во времени при $k = -0.5$

Расчётами установлено, что параметр m обладает несколькими достаточно узкими интервалами, внутри которых решение системы определяющих соотношений устойчиво, причём кривые «напряжение~время» абсолютно не зависят от величины параметра m во всей области устойчивости решения.

Приведённые примеры демонстрируют чёткую зависимость изменения напряжений во времени от коэффициента k, позволяя получать широкий спектр форм кривых $\sigma \sim t$. Физически неясен рост напряжений во времени при постоянных деформациях (рисунок 3) и смена знака напряжений у «разупрочняющегося» материала (рисунок 4).

Физически не реализуемая в экспериментах релаксация напряжений до нуля (рисунок 1) связана с особым случаем нулевого значения параметра упрочнения. Это вытекает из соотношений (14) – (20), которые в геометрически линейном варианте, когда $\beta = 0$, в одноосном случае с $\tau = k_0 \cdot |\dot{\varepsilon}|$ и $k_0 = 1$ в отсутствии упрочнения, то есть при $k = 0$ преобразуются в уравнение:

$$\sigma + \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}. \tag{21}$$

Очевидно, что при $\varepsilon = const = \varepsilon_0$ и $\dot{\varepsilon} = 0$ происходит процесс «идеальной» релаксации напряжений по закону $\sigma = \sigma_0 \cdot \exp(-t)$ от $\sigma(0) = \sigma_0$ до нуля при $t \to +\infty$. И лишь когда $k \neq 0$, уравнение:

$$\sigma + \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} + k \cdot \varepsilon, \tag{22}$$

при $\varepsilon = \mathrm{const} = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon} = 0$ и начальных условиях $\sigma(0) = \sigma_0$ даёт решение:

$$\sigma = (\sigma_0 - k \cdot \varepsilon_0) \cdot \exp\left(-t\right) + k \cdot \varepsilon_0, \tag{23}$$

описывающее процесс релаксации напряжения от «начального» σ_0 при $t = 0$ до «остаточного» $\sigma = k \cdot \varepsilon_0$ при $t \to +\infty$.

Замечание 1. В рамках геометрически нелинейной эндохронной теории неупругости (1) – (7), (10), (11) со значениями параметров $k = 0$ и $m = 0$ процесс релаксации напряжений в материале был рассмотрен в работе [3].

Замечание 2. Обратим внимание на то, что для градиента деформаций (10) значение $m = 1$ – особый случай. При нём ортогональный тензор поворота (11) вырождается в единичную матрицу, тензор спина Ω нулевой, тензор скоростей деформаций D совпадает с производными деформаций ε. То есть, таким образом реализуется один из геометрически линейных вариантов определяющих соотношений теории неупругости, учитывающей временные эффекты. В этой ситуации градиент (10) должен быть выбран в иной форме. Результаты такого анализа авторы намерены представить в отдельной публикации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00202).

Литература

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2003. № 3. С. 96-103.
2. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Учет конечных деформаций в эндохронной теории вязкопластичности // Вестник гражданских инженеров. 2005. № 1. С. 28-32.
3. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Описание процессов ползучести и релаксации материалов в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2009. № 1(18). С. 61-65.