

Автоколебания в одномерных упругих системах с трением

д.т.н. проф. Пожалостин А.А., к.ф.-м.н. доц. Паншина А.В.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

8-(499)-263-63-75 panalv@mail.ru

Аннотация. Исследуется возможность появления автоколебаний в случае поперечных колебаний упругих однородных балок при наличии в системе сухого трения. Поставленная задача решается на примере балки, подвешенной одним концом на вращающемся валу, и на примере балки, закрепленной шарнирно на своих концах. Применяется метод замены исходной системы эквивалентной механической колебательной системой.

Ключевые слова: балка, сухое трение, упругие колебания, форма колебаний, автоколебания.

Известно [1], что в маятнике Фруда-Жуковского при определенных условиях возможны нарастающие угловые колебания (автоколебания) и установление периодического колебательного движения с амплитудой $A_{ак}$. В данной статье показано, что режим автоколебаний возможен в случае поперечных колебаний упругих балок при наличии в системе сухого трения.

Приняты основные допущения:

- балка прямолинейная, однородная, изгиб балки прямой;
- колебания предполагаются малыми;
- материал балки идеально упругий, подчиняется закону Гука;
- сечения балки при ее колебаниях остаются плоскими;
- инерция вращения сечений не учитывается.

Рассмотрим случай 1: изгибные колебания консольной балки. Пусть однородная балка массой m и длиной l подвешена верхним концом на валу O , который вращается с постоянной угловой скоростью Ω (рисунок 1).

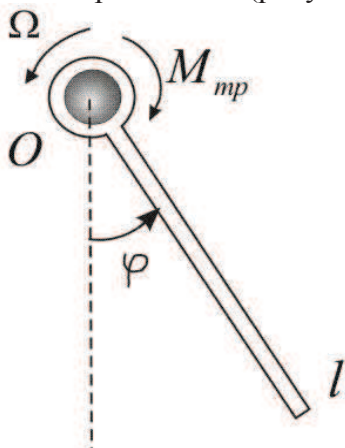


Рисунок 1. Балка на вращающемся валу

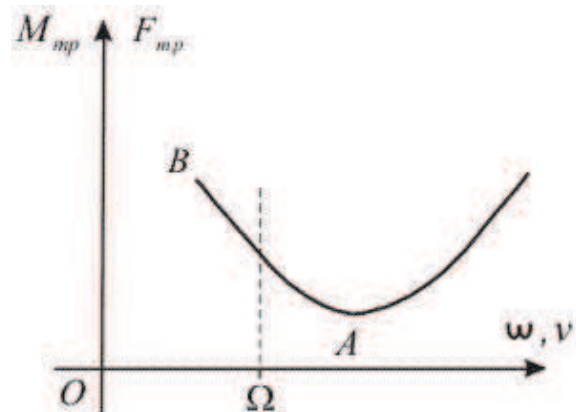


Рисунок 2. Зависимость момента сухого трения от угловой скорости

При движении балки на нее действует момент от сил сухого трения. Зависимость момента сухого трения $M_{тр}(\omega)$, действующего на консоль при вращении вала в центре O , от угловой скорости скольжения ω принята такой же, как и в [1] (рисунок 2). Угловая скорость скольжения $\omega = \Omega - \dot{\varphi}$, где φ – угол поворота балки как абсолютно твердого тела. Зависимость $M_{тр}(\omega)$ имеет падающий участок AB . Величина угловой скорости Ω выбирается на

участке AB , чтобы продемонстрировать эффект упругих автоколебаний балки.

Дифференциальное уравнение свободных изгибных колебаний однородной балки имеет вид [2]:

$$EJ_o \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu_o \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (1)$$

Примем граничные условия закрепления балки в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0, \quad y'(0, t) = 0, \\ y''(l, t) = 0, \quad y'''(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь производные $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$, $y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $y''' = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$.

Решение, согласно [2], ищем в виде:

$$y = f(x) \cdot s(t) \quad (3)$$

Из (1) получим дифференциальное уравнение для формы колебаний функции $f(x)$:

$$EJ_o f'''' + \mu_o \omega^2 f = 0. \quad (4)$$

Представим решение уравнения (4) в следующем виде:

$$f(x) = C_1 S(\lambda x) + C_2 T(\lambda x) + C_3 U(\lambda x) + C_4 V(\lambda x), \quad (5)$$

где: S, T, U, V – функции Крылова [1].

Граничные условия (2) для формы колебаний $f(x)$ [2]:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(l) = 0, \quad f'''(l) = 0. \quad (6)$$

Удовлетворяя первым двум соотношениям граничных условий (6), получим, что $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому искомое решение (5) примет вид:

$$f(x) = C_3 U + C_4 V. \quad (7)$$

Из третьего соотношения граничных условий (6) следует, что $C_4 = -C_3 \frac{S(\lambda l)}{T(\lambda l)}$. Поэтому форма колебаний i -го тона:

$$f_i(x) = C_{3i} \left[U(\lambda_i x) - \frac{S(\lambda_i l)}{T(\lambda_i l)} V(\lambda_i x) \right], \quad (8)$$

где: C_{3i} – произвольная константа.

Из третьего и четвертого соотношений граничных условий (6) получаем трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений λ_i ($i = 1, 2, \dots$) краевой задачи и частот свободных колебаний балки $\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EJ_o}{\mu_o}}$:

$$S^2(\lambda l) - T(\lambda l) \cdot V(\lambda l) = 0. \quad (9)$$

Известно [2], что функции $f_i(x)$ удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^l \mu_o f_i(x) f_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j). \quad (10)$$

С учетом условий ортогональности (10) построим эквивалентную маятниковую систему [3], [4] (рисунок 3) ($i = 1, 2, \dots$).

При построении эквивалентной маятниковой системы (механического аналога) постулируется равенство частот собственных колебаний исходной и эквивалентной систем.

Выпишем кинетическую энергию исходной системы с учетом условий ортогонально-

сти (10) форм колебаний и приравняем ее кинетической энергии эквивалентной системы [2]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu_o \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(x) \dot{s}_i^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} m_i^o \dot{s}_i^2, \quad (11)$$

где приведенная масса $m_i^o = \int_0^l \mu_o f_i^2(x) dx$.

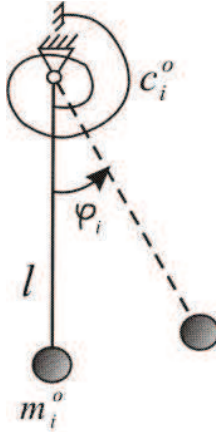


Рисунок 3. Эквивалентная маятниковая система

Пусть временная функция из (3) имеет вид $s_i(t) = l\varphi_i(t)$, тогда приведенный момент инерции эквивалентной системы (маятника) равен $J_{oi} = m_i^o l^2$, где l – длина балки.

Потенциальная энергия системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} c_i s_i^2,$$

где: $c_i = \int_0^l EJ_o (f_i'')^2 dx$, а крутильная жесткость эквивалентной системы (маятника) равна $c_i^o = c_i l^2$.

Здесь принято во внимание второе условие ортогональности форм колебаний:

$$\int_0^l EJ_o f_i'' \cdot f_j'' dx = 0 \quad (i \neq j). \quad (12)$$

Проверим равенство частот ω_i собственных колебаний упругой балки и эквивалентной системы (механического аналога):

$$\omega_i^2 = \frac{c_i^o}{J_{oi}} = \frac{c_i}{m_i^o}.$$

В дальнейшем будем учитывать только первый тон колебаний ($i = 1$).

Дифференциальное уравнение колебаний эквивалентной системы (механического аналога) ($i = 1$) имеет вид [1]:

$$J_{o1} \ddot{\varphi}_1 + c_1^o \varphi_1 = M_{\text{тр}}(\omega). \quad (13)$$

Характеристика момента сухого трения $M_{\text{тр}}(\omega)$ представлена на рисунке 2. Угловую скорость вращения вала Ω выбираем на падающем участке.

Рассмотрим случай 2: однородная балка массой m и длиной l шарнирно закреплена на концах O и A (рисунок 4).

Балка расположена горизонтально и опирается в середине на шероховатую горизон-

тальную плоскость, вращающуюся с угловой скоростью Ω . Тогда в середине ($x = \frac{l}{2}$) балка имеет участок, где сила трения $F_{\text{тр}}$ убывает при возрастании скорости скольжения v .

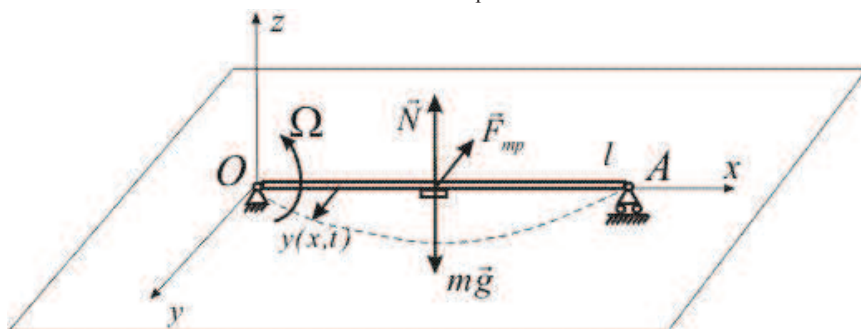


Рисунок 4. Шарнирно закрепленная балка

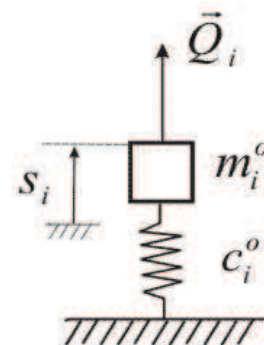


Рисунок 5. Эквивалентная система с грузом

Граничные условия закрепления концов балки для формы колебаний $f(x)$ имеют вид [1]:

$$f(0) = f(l) = 0, \quad f''(0) = f''(l) = 0. \quad (14)$$

Собственная форма $f_i(x)$ представляется в виде:

$$f_i(x) = A_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Система с грузом ($i = 1, 2, \dots$), эквивалентная рассмотренной горизонтальной упругой балке, представлена на рисунке 5.

Для номера $i = 1$, как и в первом случае, будем иметь приведенные массу и жесткость для эквивалентной системы:

$$m_i^o = \int_0^l \mu_o \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \mu_o \frac{l}{2}, \quad (16)$$

$$c_1^o = \int_0^l EJ_o \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = EJ_o \left(\frac{\pi}{l}\right)^4.$$

Дифференциальное уравнение для координаты s_1 груза в эквивалентной системе имеет вид:

$$m_1^o \ddot{s}_1 + c_1^o s_1 = Q_1. \quad (17)$$

$$\text{Здесь обобщенная сила } Q_1 = \frac{\sum \delta A_k^{(\delta s_1)}}{\delta s_1} = \frac{F_{mp}(v) f_1(\frac{l}{2}) \delta s_1}{\delta s_1}.$$

Так как возможное перемещение $\delta s_1 \neq 0$, то $Q_1 = F_{mp}(v) f_1(\frac{l}{2})$. И так как $f_1(\frac{l}{2}) = 1$, то $Q_1 = F_{mp}(v)$.

Уравнение (17), аналогичное уравнению (13), принимает вид:

$$m_1^o \ddot{s}_1 + c_1^o s_1 = F_{\text{тр}}(v). \quad (18)$$

Введем обозначение:

$$q(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{в случае 1.} \\ s(t) & \text{в случае 2.} \end{cases}$$

Тогда дифференциальное уравнение для координаты $q(t)$ имеет вид:

$$\ddot{q} + \omega_1^2 q = \frac{F(v)}{I}, \quad (19)$$

здесь: $\omega_1^2 = \frac{c}{I}$, $I = \begin{cases} J_1^o & \text{в случае 1.} \\ m_1^o & \text{в случае 2.} \end{cases}$, $c = \begin{cases} c_1^o & \text{в случае 1.} \\ c_1 & \text{в случае 2.} \end{cases}$, $F(v) = \begin{cases} M_{mp}(\omega) & \text{в случае 1.} \\ F_{mp}(v) & \text{в случае 2.} \end{cases}$.

Разложим функцию $F(v)$ в ряд по степеням v в первом и во втором случаях, соответственно. В результате уравнение (19) запишем в виде [1]:

$$\ddot{q} + \omega_1^2 q = -\alpha \dot{q} + \gamma \dot{q}^3. \quad (20)$$

Используя метод Ван-дер Поля [5] и полагая $q = A(t) \cos(\omega t + \varepsilon)$, получим из (20) для $A(t)$ «уравнение установления» в следующем виде [1]:

$$2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \gamma \omega^2 A^3 = 0. \quad (21)$$

Проинтегрируем уравнение (21) при начальном условии $q(0) = q_o$, затем возьмем предел при $t \rightarrow \infty$. В результате получим амплитуду автоколебаний установившегося периодического колебательного режима [1]:

$$A_{ак} = \frac{2}{\omega_1} \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}},$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{I}}$.

В [1] доказана устойчивость периодического режима, то есть при $q_o < A_{ак}$, $\frac{dA}{dt} > 0$, а при $q_o > A_{ак}$, $\frac{dA}{dt} < 0$. Таким образом, это утверждение доказано.

Заключение

В работе показана возможность существования автоколебаний при упругих изгибных колебаниях балок при наличии сухого трения.

Литература

1. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. СПб.: Лань, 2005. 438 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. Москва: КомКнига, 2006. 439 с.
3. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. Л.: Судпромгиз, 1969. 408 с.
4. Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. Колебания упругих одномерных систем с трением//Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 12. URL: <http://engiournal.ru/catalog/eng/teormech/1136.html> (дата обращения 15.01.2014).
5. Лампер Р.Е. Введение в теорию нелинейных колебаний авиаконструкций. М.: Машиностроение, 1985. 88 с.