Опыт применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний

к.т.н. доц. Серов М.В., доц. Аверьянова Г.М., Карначева Е.В.
Университет машиностроения
8(495)223-05-23,tm@mami.ru

Аннотация. В статье рассмотрена возможность применения интегрального вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений свободных малых колебаний для системы с двумя степенями свободы. Получена и решена система дифференциальных уравнений свободных малых колебаний механизма вытягивания кристалла в установке для выращивания кремния, что позволяет при проектировании установки добиться устранения резонансных частот.

Ключевые слова: вариационный принцип Гамильтона-Остроградского свободные колебания, дифференциальные уравнения, установка выращивания кристалла кремния

Введение

Фактически весь монокристаллический кремний, используемый для производства интегральных схем, производится по методу Чохральского [1]. Рост кристаллов по методу Чохральского заключается в затвердевании атомов жидкой фазы на границе раздела фаз. Скорость вытягивания оказывает влияние на форму границы раздела фаз между растущим кристаллом и расплавом, которая является функцией радиального градиента температуры и условий охлаждения боковой поверхности растущего кристалла.

Установка для выращивания кристаллов кремния включает в себя четыре основных узла: печь, в которую входит тигель, механизм вытягивания кристалла, устройство для управления составом атмосферы и блока управления [1]. Наиболее опасными для технических объектов оказываются вибрационные воздействия.

Механизм вытягивания должен с минимальной вибрацией и высокой точностью обеспечить реализацию параметра процесса роста кристалла – постоянную скорость вытягивания. На качество выращиваемого кристалла влияют колебания, возникающие вследствие вибраций фундамента и упругих деформаций деталей механизма вытягивания кристалла. Чтобы иметь возможность при проектировании системы исключить резонансные частоты путём соответствующего подбора масс и размеров деталей механизма вытягивания необходимо знать собственные частоты его колебаний.

В настоящее время задачи теоретической и прикладной механики решаются с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Однако вывод этих уравнений, предложенный самим Лагранжем, отличается известной сложностью.

В работе [2] были исследованы дифференциальные уравнения свободных малых колебаний механизма для вытягивания кристалла, составленные методом Лагранжа для системы с двумя степенями свободы, и определены собственные частоты колебаний.

Однако наибольший эффект при решении задач движения систем под действием приложенных к ним сил дает применение интегрального принципа Гамильтона-Остроградского [3]. На основе указанного принципа легко получить дифференциальные уравнения и в дальнейшем использовать их для описания движения сложных механических устройств, в том числе при колебаниях систем со многими степенями свободы.

В данной работе рассматривается опыт применения интегрального вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления дифференциальных уравнений колебаний для системы с двумя степенями свободы.

Обычно различают дифференциальные и интегральные принципы. Эти принципы можно получить из общего уравнения динамики [3].

При рассмотрении интегральных вариационных принципов речь будет идти исключительно о системах с геометрическими или голономными связями. Принцип, определяемый равенством (1), в общей форме, пригодной и для консервативных и неконсервативных систем, называется принципом М.В. Остроградского [3]:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta A+\delta T\right)dt=0. \tag{1}$$

При движении системы в консервативном силовом поле первая вариация действия по Гамильтону должна быть равна нулю и равенство (1) приобретает вид:

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0, \tag{2}$$

где: $L=T-\Pi$ − функция Лагранжа, T − кинетическая энергия системы; Π − потенциальная энергия системы.

Интеграл S с переменным верхним пределом будем называть действием материальной системы по Гамильтону:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L\,dt. \tag{3}$$

Принцип, определяемый равенством (2) называется принципом Гамильтона-Остроградского. Этот принцип показывает, что при движении системы по «прямому» пути первая вариация действия по Гамильтону должна быть равна нулю. Равенство (2) – частный случай равенства (1).

Целью работы являются теоретические исследования применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского к практическим вопросам составления и решения дифференциальных уравнений свободных малых колебаний механизма вытягивания кристалла в установке для выращивания кремния.

Постановка задач

Расчётная схема механизма для вытягивания кристалла представлена на рисунке 1.

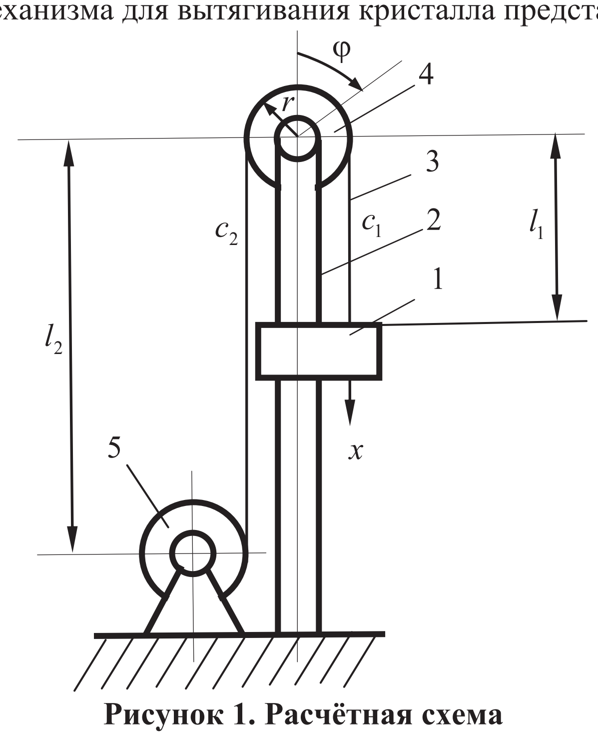

Рисунок 1. Расчётная схема

В механизме для вытягивания кристалла затравочный кристалл (затравка) крепится к каретке 1, которая с постоянной скоростью порядка 0,3 – 7 мм/мин поднимается вверх по двум направляющим колоннам 2 посредством стальной ленты 3, переброшенной через неподвижный блок 4 и наматываемой на барабан 5. Осью блока 4 служит траверса, соединяющая концы направляющих колонн.

При расчёте направляющие колонны принимаются абсолютно жесткими, трением каретки о направляющие пренебрегаем, проскальзывание ленты по блоку отсутствует.

Механическая система (механизм для вытягивания кристалла) имеет две степени свободы. За обобщённые координаты примем координату x, определяющую положение каретки 1 и угол поворота блока φ отсчитываемые от положений статического равновесия. В положении статического равновесия $x = 0, \quad \varphi = 0$.

Результаты исследований

Воспользуемся равенством (2) и покажем, что из интегрального принципа Гамильтона-Остроградского так же, как из принципа Даламбера-Лагранжа, можно получить дифференциальные уравнения малых колебаний механической системы с двумя степенями свободы:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \; dt = 0, \tag{4}$$

или с учётом функции Лагранжа (считаем, что варьирование и интегрирование − переставимые операции) получим:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T - \delta \Pi \right) dt = 0. \tag{5}$$

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{J \dot{\varphi}^2}{2}, \tag{6}$$

где: m − масса каретки, J − момент инерции блока относительно оси вращения.

Проварьировав функцию (6), для изохронных вариаций найдём:

$$\delta T = m \dot{x} \, \delta \dot{x} + J_C \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi}. \tag{7}$$

Воспользуемся тождеством для преобразования первого члена:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x} \delta x \right) = \ddot{x} \delta x + \dot{x} \frac{d}{dt} \delta x. \tag{8}$$

Так как $\frac{d}{dt} \delta x = \delta \dot{x}$ (считаем, что варьирование и дифференцирование − переставимые операции), то с помощью (8) запишем:

$$\dot{x} \; \delta \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} \; \delta x \right) - \ddot{x} \delta x. \tag{9}$$

Аналогичным тождеством воспользуемся для преобразования второго члена:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} \delta \varphi \right) = \ddot{\varphi} \delta \varphi + \dot{\varphi} \frac{d}{dt} \delta \varphi. \tag{10}$$

Так как $\frac{d}{dt} \delta \varphi = \delta \dot{\varphi}$, то с помощью (10) запишем:

$$\dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} \delta \varphi \right) - \ddot{\varphi} \delta \varphi. \tag{11}$$

Подставив результаты (9) и (11) в формулу (5), найдём:

$$\delta T = \frac{d}{dt}\left(m \dot{x} \delta x \right) - m \ddot{x} \delta x + \frac{d}{dt}\left(J_C \dot{\varphi} \delta \varphi \right) - J_C \ddot{\varphi} \delta \varphi. \tag{12}$$

Потенциальная энергия механической системы:

$$П = П_{кар} + П_{бл} + П_1 + П_2 \,, \tag{13}$$

где: $П_{кар} = -mgx$ − потенциальная энергия силы тяжести каретки, $П_{бл} = 0$ − потенциальная энергия силы тяжести блока, так как точка приложения силы тяжести блока неподвижна, $П_1$ − потенциальная энергия упругой силы стальной ленты длиной l_1, $П_2$ − потенциальная энергия упругой силы стальной ленты длиной l_2.

$$П_1 = -\frac{c_1}{2}\left[\Delta_{cm}^2 - \left(x + \Delta_{cm} - \varphi r\right)^2\right], \tag{14}$$

где: c_1 − коэффициент жёсткости стальной ленты длиной l_1, Δ_{cm} − удлинение этой ленты в положении статического равновесия, φ − угол поворота блока, r − радиус блока.

После преобразований получаем:

$$П_1 = -\frac{c_1}{2}\left(\Delta_{cm}^2 - x^2 - \Delta_{cm}^2 - 2x\Delta_{cm} + 2x\varphi r + 2\Delta_{cm}\varphi r - \varphi^2 r^2\right) = \frac{c_1}{2}\left[\left(x - \varphi r\right)^2 + 2\Delta_{cm}\left(x - \varphi r\right)\right]. \tag{15}$$

Найдём:

$$П_2 = -\frac{c_2}{2}\left[\varphi_{cm}^2 r^2 - \left(\varphi + \varphi_{cm}\right)^2 r^2\right], \tag{16}$$

где: c_2 − коэффициент жёсткости стальной ленты длиной l_2, φ_{cm} − удлинение этой ленты в положении статического равновесия, φ_{cm} − угол поворота блока при статическом приложении к системе силы тяжести каретки.

После преобразований получаем:

$$П_2 = -\frac{c_2}{2}\left(\varphi_{cm}^2 r^2 - \varphi^2 r^2 - 2\varphi\varphi_{cm} r^2 - \varphi_{cm}^2 r^2\right) = \frac{c_2}{2}\left(\varphi^2 r^2 + 2\varphi\varphi_{cm} r^2\right). \tag{17}$$

Рассмотрев положение равновесия каретки и блока, найдём:

$$mg = c_1\Delta_{cm}; \quad c_2 r\varphi_{cm} = mg; \quad c_1\Delta_{cm} = c_2 r\varphi_{cm}\,. \tag{18}$$

Тогда подставив выражения потенциальной энергии системы, найдём:

$$П = П_{кар} + П_1 + П_2 = -mgx + \frac{c_1}{2}\left[\left(x - \varphi r\right)^2 + 2\Delta_{cm}\left(x - \varphi r\right)\right] + \frac{c_2}{2}\left(\varphi^2 r^2 + 2\varphi\varphi_{cm} r^2\right). \tag{19}$$

Подставив в (19) выражения $\Delta_{cm} = \dfrac{mg}{c_1}$, $\varphi_{cm} = \dfrac{mg}{c_2}$, получим:

$$\begin{aligned} П &= -mgx + \frac{c_1}{2}\left[\left(x - \varphi r\right)^2 + 2\frac{mg}{c_1}\right] + \frac{c_2}{2}\left(\varphi^2 r^2 + 2\varphi\frac{mg}{c_2} r\right) = \\ &= -mgx + \frac{c_1\left(x - \varphi r\right)^2}{2} + mg\left(x - \varphi r\right) + \frac{c_2}{2}\varphi^2 r^2 + mg\varphi r = \\ &= -mgx + \frac{c_1\left(x - \varphi r\right)^2}{2} + mgx - mg\varphi r + \frac{c_2}{2}\varphi^2 r^2 + mg\varphi r = \frac{c_1\left(x - \varphi r\right)^2 + c_2\varphi^2 r^2}{2}. \end{aligned} \tag{20}$$

В положении равновесия при значениях $x = 0$ и $\varphi = 0$ для консервативной системы должны выполняться равенства:

$$\left.\frac{\partial П}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial П}{\partial \varphi}\right|_{\substack{x=0\\ \varphi=0}} = 0\,. \tag{21}$$

Для потенциальной энергии, принимая во внимание равенство (20), окончательно получим:

$$П = \frac{1}{2}c_1\left(x - \varphi r\right)^2 + \frac{1}{2}c_2\,\varphi^2 r^2. \tag{22}$$

Проварьировав функцию (22) для изохронных вариаций, найдём:

$$\delta\Pi = c_1\left(x-\varphi r\right)\delta x - c_1 r\left(x-\varphi r\right)\delta\varphi + c_2\,\varphi r^2\,\delta\varphi\,. \tag{20}$$

Для применения принципа Гамильтона-Остроградского внесём результаты (12) и (20) в равенство (5), получим:

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\,\delta x\right) - m\ddot{x}\,\delta x + \frac{d}{dt}\left(J_C\dot{\varphi}\,\delta\varphi\right) - J_C\ddot{\varphi}\,\delta\varphi - \\ -\left(c_1\left(x-\varphi r\right)\delta x - c_1 r\left(x-\varphi r\right)\delta\varphi + c_2\,\varphi r^2\,\delta\varphi\right)\Big]dt = 0\end{aligned}. \tag{21}$$

После перегруппировки слагаемых в формуле (21) получим:

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\,\delta x\right) + \frac{d}{dt}\left(J_C\dot{\varphi}\,\delta\varphi\right) - m\ddot{x}\,\delta x - J_c\,\ddot{\varphi}\,\delta\varphi - \\ -\left(c_1\left(x-\varphi r\right)\delta x - c_1 r\left(x-\varphi r\right)\delta\varphi + c_2\,\varphi r^2\,\delta\varphi\right)\Big]dt = 0\end{aligned}. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что первый и второй интегралы в формуле (22) обращаются в нуль. Действительно,

$$\int_{t_1}^{t_2} d\left(m\dot{x}\,\delta x\right) = m\dot{x}\,\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{23}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\left(J_C\dot{\varphi}\,\delta\varphi\right) = J_C\dot{\varphi}\,\delta\varphi\Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{24}$$

Напомним, что в основу вывода интегрального принципа Гамильтона-Остроградского положено условие соединения начала и конца «прямого» и «окольного» путей. Значит, в данном случае при значениях времени $t = t_1$ и $t = t_2$ имеем $\delta x = 0$ и $\delta\varphi = 0$. Поэтому интегралы (23) и (24) обращаются в нуль и уравнение (22) принимает вид:

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\Big[-m\ddot{x}\,\delta x - J_c\,\ddot{\varphi}\,\delta\varphi - \\ -\left(c_1\left(x-\varphi r\right)\delta x - c_1 r\left(x-\varphi r\right)\delta\varphi + c_2\,\varphi r^2\,\delta\varphi\right)\Big]dt = 0\end{aligned}. \tag{25}$$

В подынтегральном выражении вариации обобщенных координат δx и $\delta\varphi$ линейно независимы, так как неголономные связи отсутствуют. Поэтому коэффициенты при них дожны быть порознь равны нулю.

Имеем:

$$m\ddot{x} + c_1\left(x-\varphi r\right) = 0, \tag{26}$$

$$J_C\ddot{\varphi} + \left(c_1+c_2\right)r^2\varphi - c_1 r\,x = 0\,. \tag{27}$$

Таким образом, выражения (26) и (27) являются искомыми дифференциальными уравнениями свободных малых колебаний механической системы с двумя степенями свободы.

Запишем полученные дифференциальные уравнения (26) и (27) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} + a\,x - a\,r\,x = 0\\ \ddot{\varphi} + b\,\varphi - d\,x = 0\end{aligned}\right\}, \tag{29}$$

где: $a = \dfrac{c_1}{m};\quad b = \dfrac{r^2\left(c_1+c_2\right)}{J};\quad d = \dfrac{c_1 r}{J}.$

Решение системы дифференциальных уравнений (29) будем искать в виде:

$$\left.\begin{aligned}x = A\,k^2\,sin\left(kt+\alpha\right)\\ \varphi = B\,sin\left(kt+\alpha\right)\end{aligned}\right\}, \tag{30}$$

где: A и B постоянные величины.

Подставив эти решения в уравнение (4), получим:

$$\left.\begin{aligned} A\left(a-k^2\right)-bar=0 \\ -Ad+B\left(b-k^2\right)=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (31)$$

Однородная линейная система имеет решения, отличные от нуля, если определитель системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a-k^2 & -ar \\ -d & b-k^2 \end{vmatrix}=0. \qquad (32)$$

Раскрыв определитель, получим уравнения частот:

$$\left(a-k^2\right)\left(b-k^2\right)-adr=0. \qquad (33)$$

После ряда преобразований собственные частоты колебаний запишутся в следующем виде:

$$k_1=\sqrt{\frac{a+b}{2}-\sqrt{\left[\frac{(a+b)^2}{4}-a(b-dr)\right]}};\quad k_2=\sqrt{\frac{a+b}{2}+\sqrt{\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]-a(b-dr)}}. \qquad (34)$$

Проведём определение коэффициентов жесткости стальной ленты на двух участках механизма.

На участке длиной l_1: $c_1=\dfrac{EF}{l_1}=\dfrac{E\delta h}{l_1}$.

На участке длиной l_2: $c_2=\dfrac{EF}{l_2}=\dfrac{E\delta h}{l_2}$,

где: E − модуль Юнга стали (материала ленты), F − площадь поперечного сечения ленты, δ − толщина ленты, h − ширина ленты.

Заключение

Применение вариационного принципа Гамильтона-Остроградского при составлении дифференциальных уравнений свободных малых колебаний для механизма вытягивания кристалла в установке для выращивания кремния оказалось целесообразным и эффективным.

Получена система дифференциальных уравнений движения для механической системы с двумя степенями свободы. В результате решения системы дифференциальных уравнений определены собственные частоты колебаний системы и коэффициенты жесткости стальной ленты на двух участках механизма вытягивания кристалла.

Полученные соотношения дают возможность при проектировании установки исключить резонансные частоты путём соответствующего подбора масс направляющих колонн, каретки, блока и размеров направляющих колонн.

Литература

1. Интернет-ресурс: http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=43201
2. Щербаков А.В., Серов М.В. Сб. тр. МНК ММТТ-27, Т. 5. Тамбов: ТГТУ, 2014.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики: Учебное пособие. Т. 2. − М. Наука, 1977. − 544 с. ил.