Система разрешающих уравнений для расчета пологих цилиндрических панелей

к.т.н. проф. Володин В.П., Надиров Э.Р.
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
+7 (4822) 52-63-63, n-emin@mail.ru

Аннотация. Система разрешающих уравнений, полученная в работе [3], записывается в безразмерной форме, что позволяет установить параметры, от которых зависит процесс нагружения панели.

Ключевые слова: *пологая оболочка, напряжения, деформации, внутренние усилия.*

Введение

При решении задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с помощью вычислительной техники (ВТ) все уравнения принято записывать в безразмерной форме, когда в них входят безразмерные величины.

Безразмерная относительная величина – это отношение самой величины к некоторому расчетному значению, выбираемому по усмотрению расчетчика. Безразмерные величины будем отмечать чертой сверху, а их расчетные значения индексом «р». Например:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_p},\ \bar{v} = \frac{v}{v_p},\ \bar{w} = \frac{w}{w_p};$$

$$u_p = \frac{h^2}{b} = \frac{h^2}{l^2}a,\ v_p = \frac{h^2}{a} = \frac{h^2}{l^2}b,\ w_p = h,\ l = \sqrt{ab};$$

где: h – толщина оболочки; a, b – ее размеры в плане; u, v, w – перемещения точек срединной поверхности.

Деформации, напряжения и внутренние усилия в оболочке

В дальнейшем будем использовать индексную систему обозначений для указанных величин и правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Безразмерные координаты:

$$\bar{x}_1 = x_1/a,\ \bar{x}_2 = x_2/b,\ \bar{x}_3 = \bar{z} = 2z/h$$

при принятой системе координат меняются в пределах: $0 \le \bar{x}_1, \bar{x}_2 \le 1$; $-1 \le \bar{z} \le 1$.

Деформации в точках, расположенных на одной нормали, определяются так:

$$\bar{e}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\bar{z}\bar{æ}_{ij},\ i,j = 1,2;\ e_p = \varepsilon_p = \frac{h^2}{l^2},\ æ_p = \frac{h}{l^2};$$

где: $\bar{\varepsilon}_{ij}$ – деформации растяжения-сжатия и сдвига; $\bar{æ}_{ij}$ – кривизны изгиба и кручения в точках срединной поверхности. Они связаны с перемещениями:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha^{i-j}\bar{u}_{,i} + \alpha_0^{i-j}\bar{u}_{,j} + \alpha^{i+j-3}\bar{w}_{,i}\bar{w}_{,j}) - \delta_{ij}\sqrt{\bar{\bar{k}}_i\bar{\bar{k}}_j}\,\bar{w}; \qquad (1)$$

$$\bar{æ}_{ij} = -\alpha^{i+j-3}(\bar{w}_{,ij} + \bar{k}_i\bar{k}_j\bar{w}); \qquad (2)$$

индексы после запятой указывают, по какой из координат (x_1 или x_2) производится дифференцирование. В (1) и (2):

$$\alpha = \frac{a}{b},\ \alpha_0 = \frac{b}{a},\ \bar{k}_1 = k_1 a,\ \bar{k}_2 = k_2 b,\ \bar{\bar{k}}_1 = \frac{b}{h}\bar{k}_1,\ \bar{\bar{k}}_2 = \frac{a}{h}\bar{k}_2,\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ если } i = j, \\ 0 \text{ если } i \ne j; \end{cases},$$

$\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ – кривизны изгиба цилиндрической панели. Кривизна изгиба $\bar{k}_1$, отражающая начальное несовершенство оболочки в продольном направлении (в направлении оси x_1) выбирается из условия:

$$\sin \bar{k}_1 \approx \bar{k}_1 \ \rightarrow \ \bar{k}_1 \le 0,4 . \qquad (3)$$

В соответствии с утверждением В.З. Власова цилиндрическую панель можно считать пологой, если отношение стрелы подъема оболочки к поперечному размеру (считается, что $b \le a$) меньше одной пятой, значит:

$$\frac{f}{b} \le \frac{1}{5} \ \rightarrow \ \bar{k}_2 = k_2 b = \frac{b}{R} \le 1,4 , \qquad (4)$$

где: f – стрела подъема оболочки; R – радиус кривизны срединной поверхности в поперечном направлении (в направлении оси x_2).

Выражение для прогиба принимаем в виде:

$$\bar{w} = 2 S_{\frac{\lambda}{2}} \bar{f}_{\lambda 1} \left[X_{C0}(\bar{x}_1) - C_{\frac{\lambda}{2}} \right] \sin \pi \bar{x}_2 ,$$

где: $X_{C0}(\bar{x}_1) = \cos \lambda_x \left(\bar{x}_1 - \frac{1}{2} \right)$, $S_{\frac{\lambda}{2}} = \sin \frac{\lambda_x}{2}$, $C_{\frac{\lambda}{2}} = \cos \frac{\lambda_x}{2}$, $\lambda_x^2 = \lambda^2 + \bar{k}_1^2$, $\lambda^2 = 12(1-\mu)\alpha \left| \bar{p}_{11} \right|$,

$$\bar{p}_{11} = \frac{p_{11}}{p} , \ p = 2Gh \frac{h^2}{l^2} .$$

Здесь: $\bar{f}_{\lambda 1}$ – неизвестный коэффициент, меняющийся в процессе нагружения $(f_p = h)$; p_{11} – интенсивность продольной сжимающей нагрузки; p – ее расчетное значение.

В соответствии с методикой, предложенной в работе [2], для определения касательных перемещений и деформаций из уравнения:

$$\alpha_0^2 \frac{\partial^4 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}_2^4} = \bar{w}_{,12}^2 - \bar{w}_{,11} \bar{w}_{,22} - \bar{k}_1 a \bar{w}_{,22} - \bar{k}_2 b \bar{w}_{,11} ,$$

определяется функция перемещений $\bar{\Psi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. При принятом выражении для прогиба и равномерном двухстороннем сжатии панели эта функция имеет вид $(\Psi_p = h^2)$:

$$\bar{\Psi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2} \bar{a}_{11} \bar{x}_2^2 + \frac{1}{2} \bar{a}_{22} \bar{x}_1^2 + \bar{f}_1^2 S_{\frac{\lambda}{2}} S_\lambda X_{C0}(\bar{x}_1) - \frac{1}{4} \bar{f}_2^2 C_\lambda X_{C1}(\bar{x}_1) - \bar{f}_3^2 S_{\frac{\lambda}{2}} S_\lambda X_{C0}(\bar{x}_1) \cos 2\pi \bar{x}_2 +$$
$$+ \frac{1}{4} \bar{f}_4^2 C_\lambda \cos 2\pi \bar{x}_2 - \alpha \bar{f}_5 \bar{\bar{k}}_1 S_\lambda \sin \pi \bar{x}_2 + 2 \bar{f}_6 \bar{\bar{k}}_\lambda S_{\frac{\lambda}{2}} X_{C0}(\bar{x}_1) \sin \pi \bar{x}_2 .$$

Здесь: $X_{C1}(\bar{x}_1) = \cos \lambda_x (2\bar{x}_1 - 1)$, $S_\lambda = \sin \lambda_x$, $C_\lambda = 1 - \cos \lambda_x$, $\bar{\bar{k}}_\lambda = \alpha \bar{\bar{k}}_1 \pi^2 + \alpha_0 \bar{\bar{k}}_2 \lambda_x^2$; $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$, $\bar{f}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ – неизвестные коэффициенты, $a_{1p} = \frac{h^2}{b}$, $a_{2p} = \frac{h^2}{a}$, $f_p = h$.

Зная функцию $\bar{\Psi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, можно найти перемещения:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \int \left(\alpha \bar{\Psi}_{,22} - \mu \alpha_0 \bar{\Psi}_{,11} \right) d\bar{x}_1 ; \\ \bar{u}_2 = \int \left(\alpha_0 \bar{\Psi}_{,11} - \mu \alpha \bar{\Psi}_{,22} \right) d\bar{x}_2 ; \end{cases}$$

и деформации:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = -(1+\mu) \alpha^{i+j-3} \bar{\Psi}_{,ij} + \delta_{ij} (\alpha_0 \bar{\Psi}_{,11} + \alpha \bar{\Psi}_{,22}) .$$

Чтобы сделать дальнейшие формулы менее громоздкими, будем вместо линейных деформаций, нормальных напряжений и усилий, а также изгибающих моментов рассматривать их полусуммы и полуразности и снабжать индексами 1 и 2; деформации сдвига, касательные напряжения, сдвигающие усилия и крутящие моменты – индексом 3. Например:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{2}(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{22}),\ \bar{e}_2 = \frac{1}{2}(\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22}),\ \bar{e}_3 = \bar{e}_{12}.$$

Тогда:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_1 = \mu_1\left(\alpha\bar{\Psi}_{,22} + \alpha_0\bar{\Psi}_{,11}\right), \\ \bar{\varepsilon}_2 = \mu_2\left(\alpha\bar{\Psi}_{,22} - \alpha_0\bar{\Psi}_{,11}\right), \\ \bar{\varepsilon}_3 = -2\mu_2\bar{\Psi}_{,12}. \end{cases} \tag{5}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(1-\mu),\ \mu_2 = \frac{1}{2}(1+\mu).$$

Напряжения и деформации связаны таким образом [1] ($k = 1,\ 2,\ 3$):

$$\bar{\sigma}_k = \bar{N}_p^{(k)}\bar{e}_k,\ \sigma_p = 2G\left(\frac{h}{l}\right)^2; \tag{6}$$

$$\bar{N}_p^{(1)} = \frac{3\bar{N}_p}{2\mu_0\bar{N}_p + 1},\ \bar{N}_p^{(2)} = \bar{N}_p^{(3)} = \bar{N}_p,\ \mu_0 = \frac{1-2\mu}{1+\mu}.$$

Значение функционала $\bar{N}_p$ для оболочек из упругого и нелинейно-упругого материала и при квазипростом нагружении приведены в работе [1].

Для внутренних усилий получим на основании (6) ($k = 1,\ 2,\ 3$):

$$\bar{N}_k = \left[\bar{H}_p^{(1)}\bar{\varepsilon}_k + \bar{H}_p^{(2)}\bar{æ}_k\right],\ \bar{M}_k = \left[\bar{H}_p^{(2)}\bar{\varepsilon}_k + \bar{H}_p^{(3)}\bar{æ}_k\right]; \tag{7}$$

где: $\bar{H}_p^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \int\limits_{-1}^{+1} \bar{N}_p^{(k)}\bar{z}^{k-1}d\bar{z}$, $N_p = p = 2Gh\left(\frac{h}{l}\right)^2$, $M_p = ph$.

Система разрешающих уравнений

Система разрешающих уравнений получается из условий сближения краёв панели и условий минимума полной потенциальной энергии деформации оболочки [3]. Постоянные $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22}$ определяются из уравнений:

$$\alpha\bar{a}_{11} - \mu\alpha_0\bar{a}_{22} = -\bar{\Delta}_0 - \mu\alpha_0\lambda_x S_\lambda C_\lambda(\bar{f}_1^2 - \bar{f}_2^2) - \frac{1}{\lambda_x}\lambda_1^0 S_\lambda C_\lambda \bar{f}_3^2 + \frac{1}{4}\alpha_0\lambda_x^2 C_\lambda \bar{f}_{\lambda 1}^2,$$

$$\alpha_0\bar{a}_{22} - \mu\alpha\bar{a}_{11} = -\beta\alpha\bar{\Delta}_0 + 2\mu\alpha^2\pi\bar{\bar{k}}_1 S_\lambda \bar{f}_5 + \frac{2}{\pi}\lambda_4^0\bar{\bar{k}}_\lambda S_\lambda \bar{f}_6 + \frac{1}{4}\alpha C_\lambda(3 - C_\lambda)\bar{f}_{\lambda 1}^2.$$

Параметр $\bar{\Delta}_0$ ($\Delta_p = h^2 a / l^2$) характеризует сближение краёв панели; β – постоянный коэффициент ($\beta = 0$ – продольные края неподвижны; $\beta = 1$ – сближение продольных и поперечных краёв одинаковое).

Параметры нагрузки определяются из уравнений ($i = 1,\ 2$):

$$\bar{p}_i = -\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \bar{N}_i d\bar{x}_1 d\bar{x}_2. \tag{8}$$

Определив $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$, можно найти интенсивность действующей нагрузки:

$$\bar{p}_{11} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2,\ \bar{p}_{22} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2.$$

Для определения коэффициентов $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_4$, $\bar{f}_5$ служат такие уравнения:

$$\int_0^1\int_0^1(\mu_1\bar{N}_1-\mu_2\bar{N}_2)X_{C0}(\bar{x}_1)d\bar{x}_1d\bar{x}_2=\frac{1}{2\lambda_x}\mu C_\lambda\bar{p}_{11}; \tag{9}$$

$$\int_0^1\int_0^1(\mu_1\bar{N}_1-\mu_2\bar{N}_2)X_{C1}(\bar{x}_1)d\bar{x}_1d\bar{x}_2=\frac{1}{2\lambda_x}\mu S_\lambda\bar{p}_{11}; \tag{10}$$

$$\int_0^1\int_0^1(\mu_1\bar{N}_1+\mu_2\bar{N}_2)\cos 2\pi\bar{x}_2d\bar{x}_1d\bar{x}_2=0; \tag{11}$$

$$\int_0^1\int_0^1(\mu_1\bar{N}_1+\mu_2\bar{N}_2)\sin \pi\bar{x}_2d\bar{x}_1d\bar{x}_2=\frac{1}{\pi}\mu\bar{p}_{22}. \tag{12}$$

Из уравнений:

$$\int_0^1\int_0^1\left[(\mu_1\lambda_1\bar{N}_1+\mu_2\lambda_2\bar{N}_2)X_{C0}(\bar{x}_1)\cos 2\pi\bar{x}_2+4\mu_2\pi\lambda_x\bar{N}_3X_{S0}(\bar{x}_1)\sin 2\pi\bar{x}_2\right]d\bar{x}_1d\bar{x}_2=0; \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\int_0^1\int_0^1\left[(\mu_1\lambda_3\bar{N}_1+\mu_2\lambda_4\bar{N}_2)X_{C0}(\bar{x}_1)\sin \pi\bar{x}_2-2\mu_2\pi\lambda_x\bar{N}_3X_{S0}(\bar{x}_1)\cos \pi\bar{x}_2\right]d\bar{x}_1d\bar{x}_2=\\=-\frac{4}{\pi\lambda_x}S_{\frac{\lambda}{2}}\left(\mu_1\lambda_3\bar{p}_1+\mu_2\lambda_4\bar{p}_2\right)\end{gathered} \tag{14}$$

должны определяться коэффициенты $\bar{f}_3$ и $\bar{f}_6$. Здесь:

$$X_{S0}(\bar{x}_1)=\sin\lambda_x\left(\bar{x}_1-\frac{1}{2}\right);\ \lambda_1=4\alpha\pi^2+\alpha_0\lambda_x^2,\ \lambda_2=4\alpha\pi^2-\alpha_0\lambda_x^2,\ \lambda_3=\alpha\pi^2+\alpha_0\lambda_x^2,\ \lambda_4=\alpha\pi^2-\alpha_0\lambda_x^2.$$

Наконец, коэффициент $\bar{f}_{\lambda 1}$, характеризующий изгиб оболочки, находится на основании уравнения:

$$\begin{gathered}\int_0^1\int_0^1\left[(\alpha_0\lambda^2+\bar{k}_{11}^2)\bar{M}_1+(\alpha_0\lambda^2-\bar{k}_{22}^2)\bar{M}_2-2\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{M}_3\right]X_{C0}(\bar{x}_1)\sin\pi\bar{x}_2d\bar{x}_1d\bar{x}_2-\\-C_{\frac{\lambda}{2}}\int_0^1\int_0^1(\bar{k}_{11}^2\bar{M}_1-\bar{k}_{22}^2\bar{M}_2-2\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{M}_3)\sin\pi\bar{x}_2d\bar{x}_1d\bar{x}_2+2\pi\lambda_x\int_0^1\int_0^1\bar{M}_3X_{S0}(\bar{x}_1)\cos\pi\bar{x}_2d\bar{x}_1d\bar{x}_2=\\=\bar{p}_{11}\left[\frac{1}{2}\alpha_0S_{\frac{\lambda}{2}}(S_\lambda-\lambda_x)\bar{f}_{\lambda1}-\frac{4}{\pi\lambda_x}S_{\frac{\lambda}{2}}\bar{\bar{k}}_1\right]+\\+\bar{p}_{22}\left[\frac{1}{2}\alpha\pi^2S_{\frac{\lambda}{2}}(3-C_\lambda)\bar{f}_{\lambda1}-\frac{4}{\pi\lambda_x}S_{\frac{\lambda}{2}}\bar{\bar{k}}_1+\frac{2}{\pi}C_{\frac{\lambda}{2}}\bar{\bar{k}}_2\right]+\frac{2}{\pi}\alpha_0\lambda_xS_{\frac{\lambda}{2}}\bar{p}_{11}\bar{z}_p.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь: $\bar{k}_{11}^2=\alpha(\pi^2-\bar{k}_2^2)+\alpha_0\bar{k}_1^2$, $\bar{k}_{22}^2=\alpha(\pi^2-\bar{k}_2^2)-\alpha_0\bar{k}_1^2$.

Подставляя в уравнения (8)-(15) выражения (7) с учетом (2) и (5), получим систему разрешающих уравнений процесса нагружения панели в развернутом виде.

Заключение

Ранее было указано, что основная цель записи необходимых уравнений в безразмерной форме – установить параметры, от которых зависит расчет оболочки. Из полученных уравнений следует, что такими параметрами являются:

1. $\alpha=a/b$ $(b\le a)$ – коэффициент, характеризующий соотношение размеров оболочки в

плане. Можно считать, что $0 \le \alpha \le 20$;

2. $\bar{k}_1 = k_1 a$ – параметр, характеризующий начальное искривление панели в продольном направлении. При условиях (3) $0 \le \bar{k}_1 \le 0,4$;
3. $\bar{k}_2 = k_2 b$ – относительная кривизна цилиндрической панели в поперечном направлении. При условиях (4) $0 \le \bar{k}_2 \le 1,4$. Если $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0$, то панель становится прямоугольной пластиной;
4. β – коэффициент, учитывающий поведение продольных краёв панели. Если $\beta = 0$, то продольные края неподвижные, если $\beta = 1$, то сближение продольных краёв такое же, как и поперечных (равностороннее сжатие оболочки);
5. h/b – отношение, от значения которого зависит, является оболочка тонкой или толстой. Оболочки, для которых справедливы гипотезы Кирхгоффа-Лява, являются тонкими, и для них [4], [5]: $\frac{1}{1000} \le \frac{h}{R} \le \frac{1}{30}$, где: R – минимальный главный радиус кривизны оболочки. Но

$$\frac{h}{R} = \frac{h}{b}\frac{b}{R} \rightarrow \frac{1}{1000}\frac{R}{b} \le \frac{h}{b} \le \frac{1}{30}\frac{R}{b}.$$

При условиях (4) минимальное значение $R/b = 0,715$ и значит: $0,715 \cdot 10^{-3} \le h/b \le 0,0238$.

В работе [5] утверждается, что задачи изгиба пологих оболочек в нелинейной постановке целесообразно решать при коэффициенте вспарушенности (отношение стрелы подъема к толщине оболочки) меняющемся в пределах: $6 \le f/h \le 20$. Но:

$$\frac{h}{b} = \frac{h}{f}\frac{f}{b} \rightarrow \frac{1}{20}\frac{f}{b} \le \frac{h}{b} \le \frac{1}{6}\frac{f}{b}.$$

При максимальном значении $f/b = 0,2$ $0,01 \le h/b \le 0,0333$ ($f/b \le 1/5$).

Литература

26. Володин В.П., Надиров Э.Р. Вариант связи между напряжениями и деформациями в теории пологих оболочек // Известия МГТУ «МАМИ»: научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. – М.: МГТУ «МАМИ», 2013. № 3(17). Т. 1. С. 66 – 70.
27. Володин В.П., Надиров Э.Р. Определение аппроксимирующих функций в выражениях для перемещений при расчете пологих оболочек // Вестник Тверского государственного университета: научный журнал. Серия «Прикладная математика» – Тверь: ТвГУ, 2012. №17. Вып. 2 (25). С. 41 – 51.
28. Володин В.П., Надиров Э.Р. Уравнения процесса нагружения пологих цилиндрических оболочек при двустороннем сжатии // Известия МГТУ «МАМИ»: научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. – М.: МГТУ «МАМИ», 2013. № 1(15). Т. 3. С. 30 – 36.
29. Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2007. 528 с.
30. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей) / под ред. Варвака П.М. и Рябова А.Ф. – Киев: Будiвельник, 1971. 418 с.