

## Уточненный метод решения контактной задачи для кольцевого слоя с учетом сил.

### Сообщение 1. Математическая модель контактного взаимодействия кольцевого слоя с жестким основанием

д.т.н. проф. Божкова Л.В., к.т.н. доц. Норицина Г.И., к.т.н. проф. Рябов В.Г.  
 Университет машиностроения  
 8(495) 223-05-23, tm@mami.ru

**Аннотация.** Предложен уточненный метод решения контактных задач для упругих кольцевых слоев с учетом сил трения в зоне контакта. Закон изменения радиальных контактных давлений представлен в виде некоторого бесконечного ряда, содержащего две группы неизвестных констант. Для определения неизвестных констант получена система двух функциональных уравнений. Предложенный метод решения контактных задач справедлив для кольцевых слоев любой толщины одновременно в случае сжимаемого и несжимаемого материалов.

**Ключевые слова:** контактная задача, силы трения, кольцевой слой, малые деформации, контактные давления, функциональные уравнения.

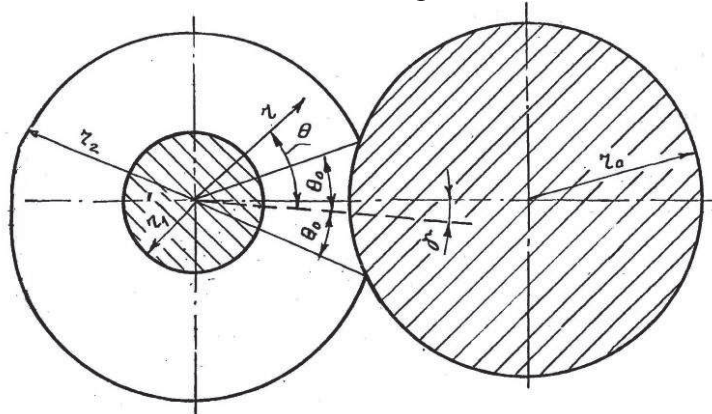
#### Часть I

В [1, 2] предложен инженерный метод решения контактных задач для упругого кольцевого слоя с учетом сил трения в зоне контакта. Он прост и удобен, однако, в основу этого метода положено допущение о том, что радиальные контактные давления изменяются по закону косинуса, а геометрическое условие контакта удовлетворяется приближенно (в трех точках зоны контакта).

Получение уточненного метода решения подобного типа контактных задач, свободного от указанных выше допущений, является весьма важным. Это объясняется тем, что по уточненному решению предоставляется возможность оценить погрешности, полученные при использовании приближенного метода решения, и определить класс задач, для которых целесообразно его применение.

Итак, рассмотрим задачу о контактном взаимодействии упругого кольцевого слоя, покрывающего твердый цилиндр, с другим твердым цилиндром и учтем при этом силы трения, возникающие в зоне контакта.

В результате деформации упругий слой соприкасается с жестким основанием по некоторой его части. Величина зоны контакта, характеризуемая углом  $\theta_0$ , а также закон распределения радиальных контактных давлений и сил трения являются неизвестными.



**Рисунок 1.** Схема контактного взаимодействия упругого кольцевого слоя твердого цилиндра с другим твердым цилиндром с учетом сил трения

Силы трения в зоне контакта вызовут угловое отклонение  $\gamma$  линии, проходящей через центр цилиндра и точку первоначального контакта упругого слоя с твердым цилиндром. В результате этого, середина зоны контакта будет отклонена на угол  $\gamma$  от положения, соответствующего случаю отсутствия сил трения (рисунок 1). Величина этого угла является также неизвестной.

Закон изменения радиальных контактных давлений  $p_r(\theta)$  представим следующим бесконечным рядом:

$$\bar{p}_r(\theta) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos\left(\frac{m\pi\theta}{\theta_0}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\theta_0}\right), & |\theta| < \theta_0, \\ 0, & |\theta| > \theta_0 \end{cases}, \quad (1)$$

где:  $\bar{p}_r(\theta) = \frac{p_r(\theta)}{E}$  ( $E$  – модуль упругости слоя),

$p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $h_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) – безразмерные неизвестные константы.

Будем предполагать, что силы статического трения в зоне контакта имеют максимальное значение (или имеет место скольжение в одном направлении по всей поверхности контакта), то есть допускаем, что силы трения в зоне контакта пропорциональны радиальным контактным давлениям:

$$F_{mp} = f p_r(\theta),$$

где:  $f$  - коэффициент трения.

Таким образом, имеем:

$$\bar{F}_{mp} = \begin{cases} f \left[ \sum_{m=0}^{\infty} p_m \cos\left(\frac{m\pi\theta}{\theta_0}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\theta_0}\right) \right], & |\theta| < \theta_0, \\ 0, & |\theta| > \theta_0 \end{cases},$$

где:  $\bar{F}_{mp} = \frac{F_{mp}}{E}$ .

При решении задачи не налагается никаких ограничений на конструктивные параметры (величины радиусов  $r_1, r_2, r_0$ ), то есть полученные результаты будут справедливы для упругого слоя любой толщины и при любом, сколько угодно большом радиусе  $r_0$  (при  $r \rightarrow \infty$  упругий слой будет контактировать с плоским твердым основанием). Кроме того, полученные результаты будут справедливы одновременно в случае сжимаемого и несжимаемого материалов упругого слоя.

В рассматриваемом случае величина зоны контакта ( $2\theta_0$ ) при малых упругих деформациях будет величиной малой, вследствие чего радиальные упругие перемещения в зоне контакта могут быть представлены в виде:

$$W(r_2, \theta) = -\delta + \frac{1}{2} r_2 \left( 1 + \frac{r_2}{r_0} \right) (\theta - \gamma)^2, \quad |\theta| < \theta_0. \quad (2)$$

Параметр  $\delta$  определяет величину сближения тел (центров цилиндров) при сжатии и является неизвестной величиной.

В безразмерных параметрах соотношение (2) примет вид:

$$\bar{W}(1, \theta) = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_2}{r_0} \right) (\theta - \gamma)^2, \quad |\theta| < \theta_0, \quad (3)$$

где:  $\bar{W}(1, \theta) = \frac{W(r_2, \theta)}{r_2}$ ,  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r_2}$ .

В результате контактного взаимодействия с твердым цилиндром на упругий слой в зоне контакта  $(-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0)$  будут действовать радиальные контактные давления  $p_r(\theta)$  и силы трения. В этом случае радиальные перемещения точек внешней границы упругого слоя (в том числе и точек, принадлежащих зоне контакта) на основании результатов [3] могут быть представлены в виде

$$\bar{W}(1, \theta) = \alpha_0 \bar{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_n \bar{A}_n + f \alpha_n^* \bar{B}_n \right] \cos n\theta + \left[ -f \alpha_n^* \bar{A}_n + \alpha_n \bar{B}_n \right] \sin n\theta, \quad (4)$$

где:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{(A^2 - B^2)(\rho_1 - \rho_1^{-1})}{(A+B)\rho_1^{-1} + (A-B)\rho_1},$$

$$\alpha_1 = \frac{\left[ (A-B)(3A-B)\rho_1^2 + (A+B)^2 \right] \cdot \left[ -\rho_1^2(A-3B) - (A+B)\rho_1^{-2} + 2(A-B) \right]}{8A \left[ (3A-B)\rho_1^2 + (A+B)\rho_1^{-2} \right]} +$$

$$+ \frac{(A-B)(A-3B)(\rho_1^2 - 1)}{8A} - \left[ \frac{(A-B)^2}{4A} - A \right] \ln \rho_1,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2(1-n^2)} \left\{ b_n^* \left[ 4A(1-n)(A+B) - \frac{4A \left[ (3A-B)\rho_1^{n+1} + (A+B)\rho_1^{-n-1} \right]}{\rho_1^{n-1} - \rho_1^{-n+1}} \right] + \right.$$

$$\left. 2(A+B) - \frac{4A\rho_1^{-1}}{\rho_1^{-1} - \rho_1} \right\}, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$b_n^* = E^* / N, \quad E^* = n(A+B)\rho_1^{-2} + (B-3A)\rho_1^{-2n} - (A+B)(1+n);$$

$$N = 2(1-n^2)(A+B)^2 + n^2(A+B)^2(\rho_1^{-2} + \rho_1^2) +$$

$$+ (A+B)(3A-B)(\rho_1^{2n} - \rho_1^{-2n}) - 8A(B-A)\rho_1^2, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5)$$

$$\rho_1 = \frac{r_1}{r_2}, \quad A = (1 - \nu^2), \quad B = \nu(1 + \nu) \quad (\nu - \text{коэффициент Пуассона}).$$

$$\alpha_1^* = \frac{(3A+B)(A-3B)(1-\rho_1^2)}{8A} - \left[ \frac{(A-B)^2}{4A} - A \right] \ln \rho_1 -$$

$$- \frac{\left[ (3A-B)(3A+B)\rho_1^2 + (A+B)^2 \right] \left[ -\rho_1^2(A-3B) - (A+B)\rho_1^{-2} + 2(A-B) \right]}{8A \left[ (3A-B)\rho_1^2 + (A+B)\rho_1^{-2} \right]},$$

$$\alpha_n^* = \frac{1}{2(1-n^2)} \left\{ b_n^{**} \left[ 4A(1-n)(A+B) - \frac{4A[(3A-B)\rho_1^{n+1} + (A+B)\rho_1^{-n-1}]}{(\rho_1^{n-1} - \rho_1^{-n+1})} \right] - \right.$$

$$\left. -2(A+B) + \frac{4A\rho_1^{n-1}}{\rho_1^{n-1} - \rho_1^{-n+1}} + (A+B)(1+n) \right\}, \quad (n=2,3,\dots)$$

$$b_n^{**} = E^* / N^*, \quad E^* = -n(A+B)\rho_1^{-2} - (B-3A)\rho_1^{-2n} + (A+B)(1+n) + 2(A+B)(1+n)(\rho_1^{-2} - 1),$$

$$N^* = 2(1-n^2)(A+B)^2 + n^2(A+B)^2(\rho_1^{-2} + \rho_1^2) + (A+B)(3A-B)(\rho_1^{2n} - \rho_1^{-2n}) - 8A(B-A)\rho_1^2, \quad n=2,3,\dots$$

$\bar{A}_n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ),  $\bar{B}_n$  ( $n=1,2,\dots$ ) – коэффициенты ряда Фурье функции (1), выраженные в безразмерной форме.

Разлагая функцию  $p_r(\theta)$  (1) в ряд Фурье на промежутке  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , получим:

$$\bar{p}_r(\theta) = \frac{\bar{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin n\theta, \quad (6)$$

где:

$$A_0 = \frac{2\theta_0}{\pi} p_0,$$

$$\bar{A}_n = \frac{2 \sin n\theta_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} P_m \frac{n}{(\tilde{m}^2 - n^2)}, \quad n=1,2,\dots \quad (7)$$

$$\bar{B}_n = \frac{2 \sin n\theta_0}{\theta_0} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{m h_m}{(\tilde{m}^2 - n^2)}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\tilde{m} = \frac{m\pi}{\theta_0} \quad (m=0,1,\dots).$$

Функция радиальных перемещений точек внешней поверхности упругого слоя (4) должна совпадать с функцией (3) в зоне контакта. Приравнявая правые части (3) и (4), получим следующее функциональное соотношение:

$$\alpha_0 \bar{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (\alpha_n \bar{A}_n + f \alpha_n^* \bar{B}_n) \cos n\theta + (-f \alpha_n^* \bar{A}_n + \alpha_n \bar{B}_n) \sin n\theta = \right.$$

$$\left. -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_2}{r_0} \right) (\theta - \gamma)^2, \quad |\theta| < \theta_0. \quad (8)$$

Для того, чтобы исключить неизвестный параметр  $\bar{\delta}$  из соотношения (8), следует взять производную от (8) по  $\theta$ . В результате будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} -(\beta_n \bar{A}_n + f \beta_n^* \bar{B}_n) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (-f \beta_n^* \bar{A}_n + \beta_n \bar{B}_n) \cos n\theta = \left( 1 + \frac{r_2}{r_0} \right) (\theta - \gamma), \quad |\theta| < \theta_0, \quad (9)$$

где:

$$\beta_n = n\alpha_n, \quad \beta_n^* = n\alpha_n^*. \quad (10)$$

Величину углового смещения  $\gamma$  можно определить, подставив в выражение (9) значение  $\theta = 0$ :

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (f\beta_n^* \bar{A}_n - \beta_n \bar{B}_n). \quad (11)$$

Параметр  $\bar{\delta}$  можно определить, подставляя в (8) значения угла  $\theta = 0$ . В результате получим:

$$\bar{\delta} = -\alpha_0 \bar{A}_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \bar{A}_n + f\alpha_n^* \bar{B}_n) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right) \gamma^2. \quad (12)$$

Учитывая, что правую и левую части соотношения (8) можно разложить на симметричную и кососимметричную части, на основании (8) получим два соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-f\alpha_n^* \bar{A}_n + \alpha_n \bar{B}_n) \sin n\theta = -\left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right) \theta \gamma, \quad (13)$$

$$\alpha_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \bar{A}_n + f\alpha_n^* \bar{B}_n) \cos n\theta = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right) (\theta^2 + \gamma^2). \quad (14)$$

На основании (13) и (14), с учетом (11), (12), (6), а также (10) будем иметь следующие два функциональных уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} [p_m \Phi_m(\theta) + h_m \Psi_m(\theta)] = 0, & |\theta| < \theta_0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} [p_m T_m(\theta) + h_m F_m(\theta)] = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right) \theta^2, & |\theta| < \theta_0 \end{cases}, \quad (15)$$

где:

$$\Phi_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2f}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\beta_n^* \cdot n \sin n\theta_0}{\tilde{m}^2 - n^2} \cdot \left( \theta - \frac{\sin n\theta}{n} \right) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\Psi_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2m}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\beta_n \cdot \sin n\theta_0}{(\tilde{m}^2 - n^2)} \cdot \left( \frac{\sin n\theta}{n} - \theta \right) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$T_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\beta_n \cdot \sin n\theta_0 (\cos n\theta - 1)}{(\tilde{m}^2 - n^2)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$F_m(\theta) = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2f}{\theta_0} m \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\beta_n^* \cdot \sin n\theta_0 (\cos n\theta - 1)}{n(\tilde{m}^2 - n^2)} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Для определения угла  $\theta_0$  (величины зоны контакта) необходимо составить уравнения статического равновесия цилиндра с упругим покрытием. В случае малой зоны контакта и малого угла  $\gamma$  уравнения статического равновесия будут иметь вид:

$$Q = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p_r(\theta) r_2 d\theta, \quad (20)$$

$$M = r_2^2 f \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p_r(\theta) d\theta, \quad (21)$$

где:  $Q$  и  $M$  – величины, действующие на цилиндр с упругим покрытием соответственно результирующей нагрузки и момента.

На основании (20) и (21) с учетом (1) получим:

$$\bar{Q} = 2\bar{p}_0 \theta_0, \quad (22)$$

$$\bar{M} = 2f \cdot \bar{p}_0 \cdot \theta_0, \quad (23)$$

где:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Er_2 \left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right)}, \quad (24)$$

$$\bar{p}_0 = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right)}, \quad (25)$$

$$\bar{M} = \frac{M}{Er_2^2 \left(1 + \frac{r_2}{r_0}\right)}. \quad (26)$$

Определяя для разных значений угла  $\theta_0$  константы  $p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), можно на основании (22) построить график зависимости между результирующей силой  $Q$ , действующей между цилиндрами и углом  $\theta_0$ .

Соотношение (23) позволяет определить величину результирующего момента  $M$ , при котором силы статического трения по всей области контакта будут иметь максимальное значение.

Таким образом, общая схема решения контактной задачи для кольцевого упругого слоя с учетом сил трения в зоне контакта по уточненному методу следующая:

- По заданным упругим характеристикам материала кольцевого слоя с помощью соотношений (5) вычисляем коэффициенты  $A$  и  $B$ .
- Зная радиусы кольцевого слоя  $r_1$  и  $r_2$ , находим безразмерный параметр  $\rho_1 = \frac{r_1}{r_2}$ .
- На основании формул (5) и (10) вычисляем последовательность чисел  $\beta_n$  и  $\beta_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).
- Задаваясь последовательно различными значениями угла  $Q_0$  ( $0,5^\circ; 1^\circ; 1,5^\circ$  и т.д.), определяем соответствующие им две группы констант  $p_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $h_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) путем решения системы двух функциональных уравнений (15) с учетом (16)-(19).
- Строим график зависимости между результирующей нагрузкой  $Q$  и углом  $\theta_0$  на основании (22) с учетом (24) и (25).

- Строим график зависимости между параметром  $\bar{\delta}$  и углом  $\theta_0$ , а также график зависимости между  $\gamma$  и  $\theta_0$  в соответствии с (11) и (12).
- При заданном значении результирующей силы  $Q$  (или при заданном значении параметра  $\bar{\delta}$ ) по одному из построенных графиков определяем угол  $\theta_0$ .
- Для найденного значения угла  $\theta_0$  определяем две группы безразмерных констант  $p_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $h_m (m = 1, 2, \dots)$  путем решения системы двух функциональных уравнений (15).
- На основании (1) находим закон распределения радиальных контактных давлений, действующих на упругий слой в зоне контакта.
- На основании результатов [3] определяем напряженное и деформированное состояние упругого слоя.

Во второй части данной работы будут рассмотрены два метода решения системы функциональных уравнений (15).

### Литература

1. Божкова Л.В., Чебанюк А.М. Взаимодействие кольца, жестко насаженного на абсолютно твердое цилиндрическое тело, с жестким основанием // Известия вузов. Машиностроение. 1977, № 8, с. 16-22.
2. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Контактная задача для кольцевого слоя произвольной толщины с учетом сил трения в зоне контакта // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2010, № 7.
3. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Плоская задача теории упругости для кольцевого слоя при несимметричной радиальной и касательной нагрузках // Сборка в машиностроении, приборостроении. 2006, № 2.