Интегрирование уравнений Навье-Стокса

к.т.н. доц. Выскребцов В.Г.
8(495) 373-42-51

Аннотация. Рассматривается интегрирование уравнений движения ньютоновской жидкости (уравнения Навье-Стокса) в векторной форме, при этом учитывается сделанное в более ранних статьях разделение векторного уравнения Навье-Стокса на два уравнения, содержащих порознь линейные и квадратичные члены. На этой основе демонстрируется возможность интегрирования разделённых уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости, которая в заметной степени определяется особенностями течения: граничные условия, осесимметричное, не осесимметричное течение и др.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая ньютоновская жидкость, установившееся течение, дифференциальные уравнения, точное решение уравнений Навье-Стокса, осесимметричное течение, кручение линий тока.

Продолжая тему исследования возможности интегрирования уравнений Навье-Стокса можно отметить, что, как следует из [1], если течение установившееся (т.е. если характер траекторий неизменен во времени t), то уравнение Навье-Стокса, выраженное в форме Громека, при условии несжимаемости жидкой среды, записанное через ротор скорости, можно представить в следующем виде, где неизвестная функция (вектор скорости V) есть только одно неизвестное:

$$rot(rotV \times V) = \nu \cdot rot \cdot rot \cdot rotV \tag{1}$$

Это уравнение является векторной записью относительно скорости $\boldsymbol{V}$ в частных производных третьего порядка. Существенно, что оно содержит только два члена. Один член квадратичный, а второй - первой степени от производных скорости, т.е. линейный. Поэтому из уравнения Навье-Стокса, записанного в виде (1) и не содержащего в такой форме давления и координат положения жидкой частицы, следует, что при условии сохранения картины течения при изменении скорости в m раз один член (левый) изменяется в m^2 раз, а второй (правый) в m раз. Но при этом оба члена уравнения остаются равными. Такое положение возможно только в том случае, если каждый из членов уравнения (1) тождественно равен нулю. Под выражением «сохранение картины течения» здесь и далее имеется в виду условие сохранения ламинарного режима течения и характера линий токов, т.е. сохранение траекторий движения жидких частиц, что и имеет место в наблюдаемых течениях Пуазейля и Куэтта.

Это позволяет разделить исходное уравнение (1) на два уравнения, содержащих отдельно линейные и квадратичные члены скорости. С учётом этого уравнения движения (1) имеют вид следующей системы:

$$\begin{aligned} &rot\ \ rot\ rotV = 0 \\ &rot\left(rotV \times V\right) = 0. \end{aligned} \tag{1a}$$

Формулы (1а) можно получить иначе, для чего подставим в (1) новое значение скорости $\boldsymbol{V_{нов}} = m\ \boldsymbol{V}$, причём m – произвольная постоянная, причём $m \neq 0$ и $m \neq 1$. Тогда из (1) получим:

$$m^2 rot(rotV \times V) = -m\ \nu \cdot rot \cdot rot \cdot rotV. \tag{2}$$

Подставляя сюда из (1) значение $rot\left(rotV \times V\right) \neq 0$ и сокращая на $-\nu\, rot\, rot\, rot\, V \neq 0$ получим: $m^2 = m$. Откуда m равно либо нулю, либо единице. Но это противоречит условию произвольности значения постоянной m. Отсюда и следуют (1а).

Вышеприведённые рассуждения могут встретить возражение следующего типа. Алгебраическое уравнение второй степени можно записать в виде: $aX^2 = b\,X + c$. Здесь:

$a, b, c = const$. Но это не означает, по аналогии с вышеприведенными рассуждениями, что это уравнение эквивалентно системе: $a X^2 = 0;\ \ b X + c = 0$.

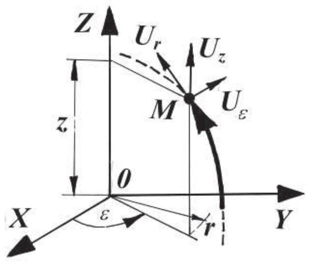
На это следует указать, что исходное уравнение (1) аналогично алгебраическому второй степени только по форме записи, т.к. описывает, в отличие от указанного алгебраического уравнения, целые семейства линий (а не две точки). A каждое из уравнений (1а) описывает свою систему линий токов. Причём эти системы (семейства) линий должны совпадать. В случае алгебраического уравнения подобное требование отсутствует.

Наблюдаемых в опытах типов течений известно к настоящему времени всего два (течения Пуазейля и Куэтта) [1]. У этих течений значения скоростей и роторов скоростей конечны. Поэтому уравнения системы (1а) имеют смысл (в отличие, например, от теоретических струйных течений) во всей области течения. Это даёт основание тому, что дальше рассматриваются решения только системы (1а).

Такими решениями, во-первых, будут течения, у которых вихрь скорости есть постоянная величина (как это имеет место для течения Куэтта) или равен нулю. Ранее уже отмечалось, что условие постоянства вихря и условие параллельности векторов вихря и скорости согласно (1) эквивалентно рассмотрению течений жидкостей с нулевой вязкостью, так называемых «идеальных». Поскольку таких жидкостей в природе не существует (если не считать одной формы жидкого гелия при температурах, близких к абсолютному нулю), то далее рассматриваются только течения классической, так называемой ньютоновской вязкой жидкости.

Для таких течений, у которых траектории имеют какие либо особенности, оказывается, что эти особенности могут дать дополнительные условия, облегчающие решение исходного уравнения. Так, случай автомодельности течений позволил свести исходное уравнение движения к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого оказалось (с учётом требования наблюдаемости течения) возможным представить траекториями в виде прямых линий, гипербол или парабол. Этот тип течений с нулевым значением ротора скорости уже был рассмотрен ранее, он наблюдался в опытах [2]. Поэтому теперь рассмотрим осесимметричные течения, аналитическое выражение которых записывается более просто по сравнению с общим случаем пространственных течений.

Случай осесимметричных течений есть более общий по сравнению с автомодельными течениями. Для осесимметричных течений наиболее удобно использовать цилиндрические координаты $(r;\ \varepsilon;\ z)$ [1, с 324]. В цилиндрических координатах вектор скорости течения записывается как: $V(U_r, U_\varepsilon, U_z)$ – рисунок 1.



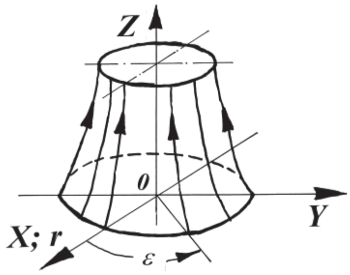


Рисунок 1. Слева – траектория движения жидкой частицы «M» в прямоугольной декартовой (x, y, z) и в цилиндрической (r, ε, z) системах координат. V – вектор скорости движения частицы «M», имеющий проекции скоростей соответственно в виде $V(U, V, W)$ и $V(U_r, U_\varepsilon, U_z)$. Справа – плоские траектории движения жидких частиц.

Совокупность таких осесимметричных траекторий образует поверхность тела вращения, которое пересекает координатную плоскость $0xy$ и параллельные ей при $z = const$ по окружностям. В цилиндрической системе координат эти траектории не содержат угловой координаты.

Условие осесимметричности позволяет выделить несколько типов или групп течений с различными свойствами траекторий течения, из которых наиболее простыми являются такие течения, которые имеют плоские траектории, а совокупность траекторий образует поверхность тела вращения. Координатную плоскость $(r,\varepsilon,0)$ и плоскости $z = const$ траектории течения пересекают в точках, лежащих на окружности. Линии токов образуют поверхность тела вращения – рис. 1. Компоненты проекций скорости не зависят от угла ε и имеют вид: $U_r(r,0,z)$, $U_\varepsilon(0,0.0)$, $U_z(r,0,z)$. Линии тока таких течений не имеют кручения, это плоские линии.

Более сложный вид должны иметь траектории тоже осесимметричной сети плоских траекторий, которые однако, не образуют поверхностей тела вращения при $z = const$. Координатную плоскость $0xy$ (или $0,r,\varepsilon)$ траектории пересекают не в точках, лежащих на окружности, а в точках, образующих осесимметричную фигуру. Как, например, эллипс, прямоугольник, фигуру в виде четырёхугольника с дугами окружности и т.п. (рисунок 2).

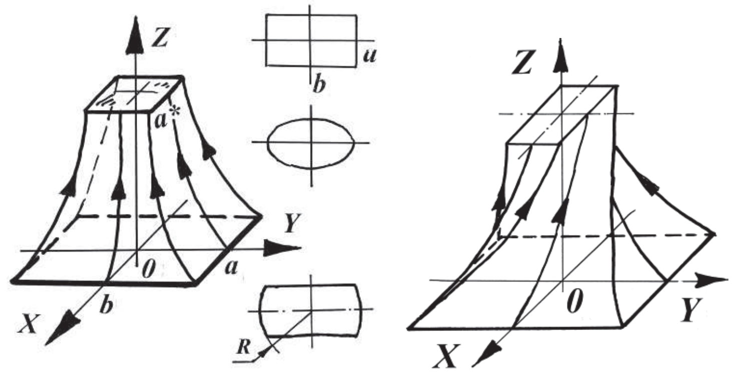


Рисунок 2. Слева – плоские траектории движения жидких частиц. Совокупность осесимметричных таких траекторий при $z = const$ не образует поверхности тела вращения. Координатную плоскость $0xy$ (или $r,\varepsilon,0$) траектории пересекают в точках, образующих осесимметричную фигуру. Например, прямоугольник размером $2a\times 2b$, эллипс с полуосями *a* и *b*, фигуру в виде четырёхугольника с боковыми дугами радиуса *R* и т.п. Линии тока, например, aa^* не имеют кручения. Справа – не плоские, а закрученные траектории движения жидких частиц. Совокупность осесимметричных таких траекторий не образует поверхности тела вращения

Компоненты скорости для семейства осесимметричных траекторий, показанные слева на рис.2, уже должны зависеть от угла ε и должны удовлетворять следующим свойствам: $U_r(r;\varepsilon;z) = U_r(r;\varepsilon \pm \pi;z)$.

Две другие компоненты скорости $U_\varepsilon(r:\varepsilon;z)$ и $U_z(r:\varepsilon;z)$ также должны обладать этими свойствами. Линии тока таких течений не имеют кручения.

Наконец, в самом общем случае осесимметричного течения траектории – это пространственные линии, линии, которые могут иметь кручение. Траектории таких течений могут пересекать координатную плоскость $(r,\varepsilon,0)$ в точках, образующих любую осесимметричную фигуру, как показано на рис.2 справа.

Вначале рассмотрим первый тип линий тока. Поскольку координаты скорости этого типа течения не зависят от полярного угла ε, то такое трёхмерное течение можно в некотором смысле считать двумерным. С учётом этого получим при условии несжимаемости жидкости для уравнения неразрывности следующее выражение [1, с 324]:

$$\partial(rU_r)/\partial r + r\partial\cdot U_z/\partial z = 0 \qquad (1b)$$

Для ротора скорости в соответствии с формулами [1, с 324] получим в цилиндрической системе координат:

$$rot V = (0;\partial U_r/\partial z - \partial U_z/\partial r;0) = (0;\omega,0). \qquad (2)$$

Здесь через ω обозначена для краткости ненулевая проекция ротора скорости:

$$\omega = \partial U_r / \partial z - \partial U_z / \partial r. \tag{2a}$$

С этим обозначением повторные операции ротора скорости первого уравнения системы (1а) примут следующий вид (с учётом того, что производные по угловой координате с учётом осесимметричности движения равны нулю):

$$\begin{aligned} &rot\ \ rot V = rot\,\omega = \left[-\partial\omega/\partial z; 0; (1/r)\partial(r\,\omega)/\partial r\right].\\ &rot\ rot\ rot V = \left\{0; -\omega^{II}_{zz} - \left[(1/r)\partial(r\,\omega)/\partial r\right]^{I}_{r};\ 0\right\} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

В тех же обозначениях квадратичные члены второго из уравнений (1а) записываются как:

$$\begin{aligned} &rot V \times V = \omega \times V = \{U_z\omega;\ \ 0;\ -U_r\omega\}.\\ &rot\ (rot V \times V) = rot(\omega \times V) = \left\{0; (U_z\omega)^{I}_{z} + (U_r\omega)^{I}_{r};\ 0\right\} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В соответствии с (3) и (4) таким образом, получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} &\omega^{II}_{zz} + \left[(1/r)\partial(r\,\omega)/\partial r\right]^{I}_{r} = 0.\\ &(U_z\omega)^{I}_{z} + (U_r\omega)^{I}_{r} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Первое уравнение этой системы является линейным, поэтому его общее решение можно искать используя метод разделения независимых переменных. Согласно этому методу [3] представим неизвестную функцию ω в виде произведения двух неизвестных функций, причём каждый из сомножителей зависит только от одного аргумента:

$$\omega = \varphi(r)\psi(z). \tag{5a}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (5) после деления на $\varphi(r)\ \ \psi(z)$ получим:

$$\psi(z)^{II}_{zz} / \psi(z) + \left[(1/r)\partial(r\,\varphi(r))/\partial r\right]^{I}_{r} / \varphi(r) = 0. \tag{6}$$

Или, согласно методу разделения переменных [3]:

$$\left[(1/r)\partial(r\phi(r))/\partial r\right]^{I}_{r} / \phi(r) = \lambda = \text{const}.\ \psi(z)^{II}_{zz} / \psi(z) = -\lambda. \tag{6a}$$

Здесь $\lambda = const$ – неизвестная постоянная. Раскрывая скобки из второго уравнения (6а) получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами [3]:

$$\psi(z)^{II}_{zz} + \lambda\psi(z) = 0. \tag{7}$$

Если $\lambda = 0$, то это простейший случай. В этом случае решение (7) имеет вид:

$$\psi(z) = D_1 z + D_2.$$

Значения произвольных постоянных интегрирования D_1 и D_2 неизвестны, но они определяются видом конкретного течения. Если $D_1 = D_2 = 0$, то: $\psi(z) = 0$ и соответственно значение вихря тоже нулевое: $\omega = \varphi(r)\psi(z) = 0$.

Далее рассматриваются случаи, когда $\omega \neq 0$, т.к. любые безвихревые течения, как уже отмечалось, удовлетворяют исходному уравнению Стокса (1).

При условии $\lambda \neq 0$ первое из уравнений (6) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами [3]:

$$r^2\varphi(r)^{II} + r\varphi(r)^{I} - \varphi(r)\left(1 + \lambda r^2\right) = 0. \tag{8}$$

Для случая $\lambda = 0$ это уравнение приобретает более простой вид (это уравнение Эйлера):

$$r^2\varphi(r)^{II} + r\varphi(r)^{I} - \varphi(r) = 0. \tag{9}$$

Решение этого уравнение находится известным способом [3]. Оно имеет вид:

$$\varphi(r) = E_{01}\, r + E_{02} / r. \tag{9a}$$

Здесь E_{01} и E_{02} – постоянные интегрирования, не зависящие от r. Таким образом, выражение вихря для случая $\lambda = 0$ имеет вид:

$$\varphi = \varphi(r)\psi(z) = (E_{01}\, r + E_{02} / r)(D_1\, z + D_2). \tag{10}$$

Если $D_1 \neq 0$, то это тот случай, когда вихрь скорости течения должен неограниченно возрастать при $z \to \pm\infty$, что физически невозможно (если по смыслу задачи $z \in \pm\infty$), т.к. такое течение не может быть наблюдаемо. Поэтому, если рассматривать только наблюдаемые течения, то при $z \in \pm\infty$ должно быть $D_1 = 0$. Но формально полученное выражение вихря (10) при $D_1 \neq 0$ удовлетворяет уравнению Стокса и может рассматриваться как новое точное решение если даже переменная z может считаться неограниченной.

Для случая, когда в (9) $\lambda \neq 0$ решение его можно искать в виде степенного ряда вида:

$$\varphi(r) = a_0 + a_1\, r + a_2\, r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4 + a_5 r^5 + a_6 r^6 + a_7 r^7 + \ldots$$

Подставляя это выражение в (9), получим следующие значения постоянных коэффициентов ряда:

$$a_0 = 0;\ a_2 = 0;\ a_3 + a_1\lambda / 8;\ a_4 = 0;\ a_5 = -a_1\lambda^2 / (8 \times 24);\ \mathrm{a}_6 = 0;\ \mathrm{a}_7 = a_1\lambda^3 / (8 \times 24 \times 48)\ \ldots\text{и т.д.} \tag{11}$$

Здесь a_1 неизвестная постоянная.

Таким образом, выражение для степенного ряда при $\lambda \neq 0$ будет иметь вид:

$$(r) = a_1 S(r;\lambda) = a_1\left[r - r^3\,\lambda / 8 + r^5\,\lambda^2 / (8 \times 24) - r^7\,\lambda^3 / (8 \times 24 \times 48) + \ldots\right. \tag{9b}$$

Здесь для краткости степенной ряд обозначен через сумму $S(r;\lambda)$. Таким образом, система уравнений (6) интегрируется при любом значении λ. Для определения не вихря, а именно скоростей течения при $\lambda = 0$, рассмотрим следующую систему из уравнений (10), (1б) и (2а) и учитывающую уравнение неразрывности (1б):

$$\begin{aligned} &\omega = \varphi(r)\psi(z) = (E_{01}\, r + E_{02} / r)(D_1\, z + D_2) = \partial U_r / \partial z - \partial U_z / \partial r. \\ &\partial(r U_r)/\partial r + r\,\partial U_z / \partial z = 0 \end{aligned} \tag{11a}$$

Исключая перекрёстным дифференцированием проекцию скорости U_z переходим к уравнению от одной неизвестной функции U_r:

$$\left[(1/r)\,\partial(r U_r)/\partial r\right]^{I}_{r} + (U_r)^{II}_{zz} = -(E_{01}\, r + E_{02} / r) D_1. \tag{11в}$$

Если $D_1 = 0$, то после раскрытия скобок получим линейное уравнение в частных производных:

$$(U_r)^{II}_{rr} + (U_r)^{I}_{r} / r - U_r / r^2 + (U_r)^{II}_{zz} = 0. \tag{12}$$

Решение этого уравнения ищем методом разделения переменных [3], полагая, что: $U_r = f(r)F(z)$.

Подставляя это выражение в (12), после разделения переменных получим:

$$\left(f^{II}_{rr} + f^{I}_{r} / r - f / r^2\right)/ f(r) = F^{II} / F(z) = n. \tag{13}$$

Здесь f^{II}, f^{I} и F^{II} означают производные по соответствующим независимым переменным. Значение постоянной $n = const$ неизвестно. Далее получим:

$$F(z)^{II} / F(z) = -n. \tag{13a}$$

Здесь n – произвольная постоянная и вид решения зависит от её значения. Сначала рассмотрим случай когда $n = 0$. Тогда имеем после двойного интегрирования:

$$F(z)/ D_{01} z + D_{02}. \tag{13b}$$

Значения постоянных интегрирования D_{01} и D_{02} неизвестны и определяются видом конкретного течения. Если $D_{01} = D_{02} = 0$, то $F(z) = 0$, и соответственно скорость $U_r = 0$. Течение определяется согласно (1b) зависимостью: $\partial U_z / \partial z = 0, \qquad U_z = C(r)$.

Здесь $C(r)$ – постоянная интегрирования, которая может зависеть от переменной *r*. Итак, получены следующие значения проекций скорости осесимметричного течения (при $\lambda = 0;\ n = 0$): $U_r = 0;\ \ U_z = C(r)$.

При этом согласно (3) должно выполняться ещё условие: $(1/r)\left[r\, C_r^I(r)\right]_r^I = const$. Данное условие выражает квадратичный закон изменения скорости в зависимости от радиуса *r*. Более определённое выражение для $C(r)$ применённый метод анализа обеспечить не может. Можно только указать на то, что найденные значения для U_r и U_z характеризуют течение в круглой трубе вдоль прямых, это течение типа течения Пуазейля. Дополнительно можно указать, что если принять во внимание то, что для несжимаемой жидкости величина расхода вдоль длины круглой трубы конечного радиуса должна быть постоянной, то значение $C(r)$ должно быть ограниченным.

Теперь рассмотрим другие возможности для значений постоянных D_{01} и D_{02} в выражении (13б). Пусть D_{01} и D_{02} не равны одновременно нулю. Пусть $D_{01} \neq 0$. Тогда компонента скорости течения, выражаемая как $U_r = f(r)\,F(z)$ согласно решению (13б) должна неограниченно возрастать при $z \to \pm\infty$. Т.е. с удалением от начала координат компонента U_r скорости течения должна неограниченно расти, что (если рассматривается неограниченный участок течения) физически необъяснимо. Поэтому следует считать, что $D_{01} = 0$. Пусть при этом $D_{02} \neq 0$. Тогда получим, что функция $F(z)$ является просто постоянным множителем при проекции скорости U_r, значение которой определим из (13) с учётом того, что рассматривается случай соответствующий $n = 0$:

$$f_{rr}^{II} + f_r^I / r - f / r^2 = 0\,. \tag{13c}$$

Уравнение (13c), как и уравнение (9a), является уравнением Эйлера [3]. Его решение имеет вид:

$$f(r) = M_{01}\, r + M_{02} / r.$$

Здесь M_{01} и M_{02} – постоянные интегрирования, не зависящие от переменной r. Соответственно проекция скорости U_r равна:

$$U_r = f(r)F(z) = (M_{01}\, r + M_{02} / r)D_{02} = M_1 r + M_2 / r\,. \tag{14}$$

Здесь M_1 и M_2 – постоянные. Значение второй проекции скорости U_z определим с учётом найденного значения U_r из уравнения неразрывности (1б):

$$2M_1 + (U_z)_z^I = 0, \qquad U_z = -2\, M_1\, z + M_3(r).$$

Здесь $M_3(r)$ – постоянная интегрирования, которая может быть функцией от независимой переменной *r*. Если $M_1 \neq 0$, то проекция скорости U_z должна неограниченно возрастать при $z \to \pm\infty$, что физически неосуществимо. Поэтому (если $z \in \pm\infty$) должно быть $M_1 = 0$. Тогда окончательно для рассматриваемого случая $(\lambda = 0;\ n = 0)$ получим:

$$\begin{aligned} U_r &= M_1 r + M_2 / r\,. \\ U_z &= M_3(r). \end{aligned} \tag{14a}$$

Согласно (11) для таких значений компонент скорости величина вихря скорости равна: $\omega = -\partial U_z / \partial r = -\partial(M_3) / \partial r$. Если $M_3(r) = const$, то течение безвихревое. Если $M_3(r)$ пропорционально r, то согласно (2) вихрь скорости постоянен, что эквивалентно рассмотрению безвихревого течения. В обоих случаях решение (14) удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса.

Пусть теперь по-прежнему $D_{01}=0$ и $n\neq 0$. Тогда решение уравнения (13а) в зависимости от знака n будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}&\text{При } n<0 \quad F(z)=C_{01}\exp\left(\sqrt{-n\,z}\right)+C_{02}\exp\left(\sqrt{-n\,z}\right).\\ &\text{При } n>0 \quad F(z)=C_{03}\cos\left(\sqrt{n\,z}\right)+C_{04}\sin\left(\sqrt{n\,z}\right).\end{aligned} \qquad (14в)$$

Итак, полностью рассмотрен частный случай значений постоянной: $\lambda=0$. Теперь отметим случай, когда в уравнениях (7) и (9) $\lambda\neq 0$. Тогда из уравнения (7) после интегрирования получим следующие выражения в зависимости от знака $\lambda = const$ [3]:

$$\begin{aligned}&\text{При } \lambda<0 \quad \psi(z)=C_{05}\exp\left(\sqrt{-\lambda\,z}\right)+C_{06}\exp\left(-\sqrt{-\lambda\,z}\right).\\ &\text{При } \lambda>0 \quad \psi(z)=C_{07}\cos\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)+C_{08}\sin\left(\sqrt{\lambda\,z}\right).\end{aligned} \qquad (15)$$

Из (15) следует, что вихрь скорости либо изменяется вдоль оси $0z$ монотонно по экспоненте, либо меняется периодически по гармоническому закону. Поскольку течение с неограниченно уменьшающимся или увеличивающимся вдоль бесконечной оси вихрем скорости до сих пор не было наблюдаемо, то более подробно исследуем второй случай, для которого (при $\lambda > 0$), принимая во внимание (2а) и (5а), получим:

$$\omega=\partial U_r/\partial z-\partial U_z/\partial r=\varphi(r)\left\{C_{07}\cos\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)+C_{08}\sin\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)\right\}. \qquad (15а)$$

Здесь $\varphi(r)$ определяется из (9в). С учётом уравнения несжимаемости (1б) получим следующую систему уравнений для определения производных от проекций скоростей течения при $\lambda>0$:

$$\begin{aligned}&\partial(rU_r)/\partial r+\partial(rU_z)/\partial z=0\\ &\partial U_r/\partial z-\partial U_z/\partial r=\varphi(r)\left\{C_{07}\cos\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)+C_{08}\sin\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)\right\}.\end{aligned} \qquad (16)$$

Из системы (16) после перекрёстного дифференцирования получим линейное уравнение в частных производных для проекции скорости U_r:

$$\left\{U_r/r+(U_r)_r^I\right\}_r^I+(U_r)_{zz}^{II}=\varphi(r)\sqrt{\lambda}\left\{-C_{07}\sin\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)+C_{08}\cos\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)\right\}. \qquad (17)$$

Применим для его решения метод разделения переменных, причём будем считать второй множитель $F(z)$ известным и равным множителю второго члена в правой части уравнения (17). Тогда:

$$U_r=f(r)F(z)=f(r)\left\{-C_{07}\sin\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)+C_{08}\cos\left(\sqrt{\lambda\,z}\right)\right\}. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и сокращая на выражение в фигурных скобках, получим с учётом (9в) из (17) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, где $\varphi(r)$ берётся согласно (9в) при $\lambda>0$, а через $S(r;\lambda)$ обозначена сумма ряда:

$$\left\{f/r+f_r^I\right\}_r^I-\lambda f=\sqrt{\lambda}\ \varphi(r)=\sqrt{\lambda}\ a_I\,S(r;\ \lambda). \qquad (19)$$

Раскрывая скобки и умножая обе части (19) на r^2, получим обыкновенное дифференциальное уравнение [3]:

$$r^2f^{II}+rf^I-f\left(\lambda r^2+1\right)=\sqrt{\lambda}\ a_I\,S(r;\ \lambda)r^2. \qquad (20)$$

Решение этого дифференциального линейного уравнения (20) ищем в виде степенного ряда:

$$f(r)=\sum b_i r^i,\quad i=0,1,2,3... \qquad (21)$$

Подставляя выражение для степенного ряда в (20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим (коэффициент b_1 остаётся неопределённым):

$$b_0=0; b_2=-2b_1;\ b_3=\left(\lambda b_1+\sqrt{\lambda}\,a_1\right)/8;\ b_4=0;\ b_5=\lambda^2 b_1/\left(8\times 24\right); b_6=0 \text{ и т.д.} \qquad (22)$$

Отсюда функция $f(r)$, выраженная степенным рядом, принимает вид:

$$f(r)=b_1 r+\left(\lambda b_1+\sqrt{\lambda}\, a_1\right)r^3/8+\lambda^2 b_1 r^5/(8\times 24)+ \qquad (21a)$$

Таким образом решение (18) согласно (21) зависит от произвольных постоянных интегрирования C_{07}; C_{08}; b_1; a_1 и λ. Формально решение вида (18) с учётом (21) будет являться точным решением уравнения Навье-Стокса. Применённый при этом математический аппарат хотя и не допускает исчерпывающий анализ системы (1), но он довольно подробно позволяет анализировать систему (1а).

Однако, имеется интерес в том, чтобы указать, что и в общем случае, при использовании декартовых координат без каких либо ограничений по отношению к компонентам проекций скорости возможно аналитическое исследование уравнений (1а).

Для этого при поиске решений уравнений (1а) запишем условие безвихревого движения и условие несжимаемости в прямоугольной декартовой системе координат для проекций скорости $V(U,V,W)$ в виде [1]:

$$\begin{aligned} rot_x V &= W_Y^I - V_Z^I = 0;\\ rot_y V &= U_Z^I - W_X^I = 0;\\ rot_z V &= V_X^I - U_Y^I = 0; \end{aligned} \qquad (23)$$

$$Div V = U_x^I + V_y^I + W_z^I = 0. \qquad (24)$$

Исключая с помощью повторного дифференцирования из этих уравнений координату скорости W, получим новое уравнение:

$$V_{XYY}^{III} + U_{XXY}^{III} = 0. \qquad (25)$$

Интегрируя это уравнение дважды, получим:

$$V_Y^I + U_X^I = A(y,z) + B(x,z). \qquad (26)$$

Здесь $A(y,z)$ и $B(x,z)$ – произвольные функции. При таком условии уравнение (1) имеет неопределённое множество решений в зависимости от выбора произвольных функций $A(y,z)$ и $B(x,z)$. Например, решениями (25) будут (составляющую скорости W при этом можно принять равной нулю):

$$U = a + a_1 x + a_2 y;\quad V = b_0 + a_2 x - a_1 y$$

при условии, что $A(x,y)+B(x,y)=0$.

Или, в более общем виде: $U = U_1(y) + C_0 x$; $V = -C_0 y + V_I(x)$ при условии выбора: $C_0 = \mathrm{const}$; $A(x, y) + B(x, y) = 0$, и т.д. Все подобные формально точные решения будут точными решениями уравнений Навье-Стокса, но не обязательно они будут описывать движение жидкости некоторой физической задачи, и им удастся придать правдоподобную интерпретацию. Вопрос о том, насколько адекватно они будут соответствовать реальным течениям вязкой жидкости, остаётся не решённым до того, как будут установлены опытным путём траектории течения.

Изложенное позволяет сделать ряд выводов. Во первых, что уже существующий математический аппарат позволяет получить множество формально аналитически точных решений уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Навье-Стокса, по крайней мере, для несжимаемых жидкостей. Во вторых, что имеющийся на сегодняшний день объём «базы» опытных данных очевидно недостаточен для выявления действительно точных решений, соответствующих фактически наблюдаемым течениям.

Такое положение обусловлено отчасти тем, что в современной гидромеханике обычно не делается различий между чисто теоретическими и реальными, наблюдаемыми течениями. Теоретические течения, отчасти похожие на реальные, особенно получаемые на основании использования дискретных численных методов, полагают идентичными реальным течениям, особенно если граничные условия совпадают. В качестве примера можно указать на так называемую «тестовую» задачу расчёта траекторий плоского течения вязкой жидкости в прямоугольной полости или каверны. Эта задача обусловлена важностью исследования течения в лабиринтных уплотнениях, широко используемых в машиностроении [1].

К сожалению, результаты счёта даже этой одной и той же «тестовой» задачи меняются от автора к автору, отличаясь иногда в десятки раз [8]. Более того, результаты такого рода счёта этой же задачи даже у одного автора изменяются со временем [9]. Результаты опытных данных таким изменчивым свойством не обладают.

Однако различие между поведением, например, теоретических, воображаемых невязких и реальных вязких жидкостей не всегда осознаётся. Об этом иногда упоминается в курсах по механике жидкости, например, следующим образом: «Об огромной разнице, возникающей в зависимости от того, оставляем ли мы слагаемое с вязкостью или нет, в своё время хорошо знал Джон фон Нейман. Известно ему было и то, что во времена наибольшего расцвета гидродинамики, т.е. примерно до 1900 г., основные усилия были направлены на решение красивых *математических* задач в рамках именно этого приближения, которые ничего не имеют общего с реальными жидкостями. Поэтому теоретиков, которые занимались подобными веществами, он называл людьми, изучающими «сухую воду». Они отбрасывали *важнейшее* свойство жидкости» [10].

Но в настоящее время интерес к экспериментальным работам в области гидромеханики сильно снижен. Исследование в области сплошных сред заменяется расчётными работами, проведением так называемого «численного эксперимента».

Изложенное позволяет сделать вывод о том, что, по мнению автора, существенный прогресс в области гидроаэромеханики может быть достигнут не на пути применения достаточно широко используемых многоцелевых пакетов программ типа NASTRAN, ANSIS, KATIA и других, а на пути проведения экспериментов, в которых бы выяснялась истинность основных законов поведения вязких жидкостей и которые (законы) и были положены сто пятьдесят лет назад в основу уравнений Стокса [11]. Пока же на сегодняшний день уверенности в достаточной идентичности уравнений Стокса фактическим свойствам жидкостей нет (например, проблематично существование у жидкостей так называемой второй вязкости или кручения траекторий движения и др.).

Литература

1. Лоцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд-во «Наука», М, 1973.
2. Выскребцов В.Г. О возможности найти общее решение уравнений Навье-Стокса. Известия МГМУ «МАМИ», М, №2(13), 2012.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. Том 2, М, Издательство «Наука», М, 1976.
4. Попов Д.Н. и др. Гидромеханика. Изд -во МГТУ им. Н.Э.Баумана, М, 2002.
5. Кузнецов Д.С. Гидродинамика. Гидрометеорологическое изд – во, Л, 1951.
6. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. ОНТИ НКТП СССР, М-Л, 1936.
7. Выскребцов В.Г. Установившееся течение вязкой жидкости при входе в трубу. Известия МГМУ «МАМИ», М, № 1(15), 2013.
8. Выскребцов В.Г. Гидромеханика в новом изложении. – М.: Компания Спутник$^+$, 2001.
9. Лоцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд-во «Дрофа», М, 2003 (издание седьмое, исправленное).
10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Феймановские лекции по физике. Том 2. Физика сплошных сред. Изд-во «Мир», М, 1966.
11. Выскребцов В.Г., Корнейчук Л.Г., Пухлий В.А. Некоторые особенности проведения гидроаэродинамических расчётов элементов энергоблоков АЭС на основе уравнений Навье-Стокса. 11-я Международная научно-практическая конференция по атомной энергетике «Безопасность, эффективность, ресурс ЯЭУ»., Тезисы докладов. Изд-во Нац. компании «Энергоатом», Севастополь, 2013.