

Прикладной вариант теории упругопластических процессов, учитывающий дополнительное изотропное упрочнение

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С., к.ф.-м.н. доц. Даншин В.В., Костин А.В.

Университет машиностроения

8(495) 223-05-23, доб. 1318, tm@mami.ru

Аннотация. На основе уравнений теории упругопластического деформирования материалов, обладающих эффектом дополнительного изотропного упрочнения при непропорциональном (сложном) циклическом нагружении получен прикладной вариант теории упругопластических процессов и кинетическое уравнение накопления повреждений. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций, замыкающих вариант теории.

Ключевые слова: пластичность, накопление повреждений, сложное нагружение, базовый эксперимент, идентификация.

Введение

Экспериментальные исследования [1-8] упругопластического деформирования материалов, в основном нержавеющей стали, при непропорциональном (сложном) циклическом нагружении показали, что изотропное упрочнение материала значительно превышает (для некоторых траекторий деформаций практически в два раза) упрочнение при пропорциональном циклическом нагружении. Это явление было названо эффектом дополнительного изотропного упрочнения. Эффект дополнительного упрочнения зависит от вида траектории циклического непропорционального нагружения. Наибольший эффект достигается при нагружении по круговой траектории деформаций. При переходе с одного вида траектории непропорционального циклического нагружения на другой может иметь место, как увеличение дополнительного изотропного упрочнения, так и разупрочнение.

Первое описание эффекта дополнительного упрочнения предпринято Беналлалом и Марки [4]. Основой для построения этой теории послужили определяющие уравнения теории пластического течения при комбинированном упрочнении, предложенные Шабоши. Учет эффекта дополнительного упрочнения осуществляется и в эндохронной теории пластичности [9, 10]. Несколько иное построение теории, учитывающей эффект дополнительного упрочнения, содержится в работах Ю.Г. Коротких и его учеников [11-15], а также П.В. Трусова и его ученика И.Э. Келлера [16, 17]. Наиболее экспериментально обоснованной теорией пластичности, учитывающей эффект дополнительного упрочнения, является теория упругопластического деформирования (пластического течения при комбинированном упрочнении), развитая в работах В.С. Бондаря и его учеников [18-20].

Вариант теории упругопластических процессов

В векторном представлении А.А. Ильюшина [21, 22] уравнения теории упругопластического деформирования [18-20] будут иметь вид:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}^e + \bar{\mathcal{E}}^p, \quad \bar{\mathcal{E}}^e + \bar{S} / 2G, \quad (1)$$

$$d\bar{\mathcal{E}}^p = \frac{1}{C} (\bar{S} - \bar{A}) ds^p, \quad (2)$$

$$d\bar{A} = g_B d\bar{\mathcal{E}}^p + (g_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}}^p + g_A \bar{A}) ds^p, \quad (3)$$

где: $g_B = E_B + \beta_B \cdot \sigma_B$, $g_{\mathcal{E}} = \beta_B \cdot E_B$, $g_A = -\beta_B$,

$$dC = (q_{\mathcal{E}} + q_{\mathcal{E}D}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{где: } q_{\bar{\mathcal{E}}} &= dC_B / ds^p, \quad q_{\bar{\mathcal{E}}D} = \theta_D \cdot (C_D - C), \\ \theta_D &= (1-D) \cdot \theta_0 + D \cdot \theta_1, \quad C_D = (1-D) \cdot C_0 + D \cdot C_1, \\ C_0 &= \begin{cases} C_B, & \text{при } q_{\bar{\mathcal{E}}D} \geq 0 \\ C_{B^*}, & \text{при } q_{\bar{\mathcal{E}}D} < 0 \end{cases}, \\ C_{B^*} &= C_B + d_0 \cdot (C_1 - C_B), \\ C_1 &= d_1 \cdot C_B, \end{aligned}$$

$$D = 1 - \left(\frac{d\bar{\mathcal{E}} \cdot d\bar{S}}{|\bar{d}\bar{\mathcal{E}}| \cdot |d\bar{S}|} \right)^2, \quad (5)$$

здесь: $\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{E}}^e, \bar{\mathcal{E}}^p$ – вектора деформаций, упругих деформаций, пластических деформаций;
 $\bar{S}, \bar{A}, \bar{S}^* = \bar{S} - \bar{A}$ – вектора напряжений, микронапряжений и активных напряжений;
 s, s^p – длины дуг траекторий деформаций и пластических деформаций;
 C – радиус (размер) поверхности нагружения;
 $\theta(D)$ – характеризует интенсивность (скорость) дополнительного упрочнения или разупрочнения;
 $C_D(D, s^p)$ – величина дополнительного упрочнения или разупрочнения;
 D – параметр (мера) непропорциональности нагружения.

Итак, для описания изотропного упрочнения или разупрочнения на основе уравнений (1) – (5) необходимо экспериментально определить $G, C_B(s^p), E_B, \beta_B, \sigma_B, \theta_0, \theta_1, d_0, d_1$.

Для описания процесса накопления повреждений используется энергетический подход и тогда кинетическое уравнение накопления повреждений будет иметь следующий вид [23, 24]:

$$d\omega = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{1}{W} (\bar{A} d\bar{\mathcal{E}}^p) \quad (6)$$

$$\alpha = \left(\sigma_B / |\bar{A} - E_B \bar{\mathcal{E}}^p| \right)^{n_\alpha}, \quad W = (1-D)W_0 + DW_1.$$

Здесь ω – повреждение ($\omega \in [0,1]$), α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений, W – энергия разрушения. Кинетическое уравнение (6) накопления повреждений замыкает экспериментально определяемые параметры n_α, W_0, W_1 .

При развитых пластических деформациях в условиях пластического деформирования можно принять, что:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}^p, \quad s = s^p. \quad (7)$$

Тогда уравнения (1)-(6) примут вид:

$$d\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{C} (\bar{S} - \bar{A}) ds, \quad (8)$$

$$d\bar{A} = g_B d\bar{\mathcal{E}} + (g_{\bar{\mathcal{E}}} \bar{\mathcal{E}} + g_A \bar{A}) ds, \quad (9)$$

$$dC = (q_{\bar{\mathcal{E}}} + q_{\bar{\mathcal{E}}D}) ds, \quad (10)$$

$$d\omega = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{1}{W} (\bar{A} d\bar{\mathcal{E}}). \quad (11)$$

Разрешая (8) относительно \bar{A} и дифференцируя по s , совместно с (9) и (10) можно получить следующее уравнение:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = (q_{\mathcal{E}} + q_{\mathcal{E}D} - g_A C) \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds} + g_A \bar{S} + g_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}} + C \frac{d^2 \bar{\mathcal{E}}}{ds^2}. \quad (12)$$

На основе проведенных исследований [23-27] упругопластического деформирования при сложном нагружении последним слагаемым в уравнении (12) можно пренебречь. Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{ds} + N_S \bar{S} + N_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}}, \quad (13)$$

$$N = q_{\mathcal{E}} + q_{\mathcal{E}D} - g_A C, \quad N_S = g_A, \quad N_{\mathcal{E}} = g_{\mathcal{E}}. \quad (14)$$

Уравнение (13) принадлежит А.А. Ильюшину [21, 22]. Здесь же на основе теории упругопластического деформирования [18-20] получены аппроксимации функционалов пластичности для процессов непропорционального деформирования с учетом дополнительного упрочнения.

Окончательно уравнение прикладного варианта теории упругопластических процессов и кинетическое уравнение накопления повреждений с учетом дополнительного упрочнения примут следующий вид:

$$|\bar{S} - \bar{A}| < C \cup (\bar{S} - \bar{A}) \cdot \dot{\bar{\mathcal{E}}} \leq 0 \text{ – упругое состояние,} \quad (15)$$

$$\dot{\bar{S}} = 2G \dot{\bar{\mathcal{E}}}, \quad (16)$$

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{C} = 0, \quad \dot{\omega} = 0, \quad (17)$$

$$|\bar{S} - \bar{A}| = C \cap (\bar{S} - \bar{A}) \dot{\bar{\mathcal{E}}} > 0 \text{ – пластическое состояние,} \quad (18)$$

$$\dot{\bar{S}} = N \dot{\bar{\mathcal{E}}} + (N_S \bar{S} + N_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}}) \dot{s}, \quad (19)$$

$$\dot{\bar{A}} = g_B \dot{\bar{\mathcal{E}}} + (q_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}} + g_A \bar{A}) \dot{s}, \quad (20)$$

$$\dot{C} = (q_{\mathcal{E}} + g_{\mathcal{E}D}) \dot{s}, \quad (21)$$

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{1}{W} (\bar{A} \dot{\bar{\mathcal{E}}}). \quad (22)$$

К уравнениям (15)-(22) следует добавить уравнение, связывающее шаровые составляющие тензоров напряжений $\sigma = \sigma_{ii} / 3$ и деформаций $\varepsilon = \varepsilon_{ii} / 3$:

$$\sigma = 3K\varepsilon. \quad (23)$$

Материальные функции

Прикладной вариант теории упругопластических процессов и кинетическое уравнение накопления повреждений замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

- G, K – упругие параметры;
- E_B, σ_B, β_B – параметры анизотропного упрочнения;
- $C_B(s)$ – функция изотропного упрочнения;

- W_0 – энергия разрушения при пропорциональном нагружении ($D = 0$);
- n_α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;
- $\theta_0, \theta_1, d_0, d_1$ – модули дополнительного изотропного упрочнения и разупрочнения;
- W_1 – энергия разрушения при непропорциональном нагружении ($D = 1$).

Базовый эксперимент

Для определения материальных функций необходим следующий набор данных базового эксперимента. Упругие параметры определяются традиционными методами.

Для пластических процессов необходимы:

- диаграмма одноосного пластического растяжения;
- диаграмма одноосного пластического растяжения после предварительного сжатия;
- циклические пластические диаграммы при одноосном растяжении-сжатии с постоянным размахом деформации.

Для описания процессов накопления повреждений и разрушения дополнительно необходимы:

- данные по малоциклового усталости при одноблочном циклическом нагружении с постоянным размахом деформации;
- данные по малоциклового усталости при двухблочном циклическом нагружении.

Для описания дополнительного изотропного упрочнения и соответствующих процессов накопления повреждений необходимы:

- данные по дополнительному изотропному упрочнению при двухосном непропорциональном циклическом нагружении по круговой траектории деформаций и последующему разупрочнению при пропорциональном циклическом нагружении;
- данные по малоциклового прочности при непропорциональном циклическом нагружении по круговой траектории деформаций.

Расчетно-экспериментальный метод определения материальных функций по данным базового эксперимента изложен в работах [18-27].

Заключение

Представленный здесь прикладной вариант теории упругопластических процессов и кинетическое уравнение накопления повреждений предназначен для адекватного описания процессов упругопластического деформирования и накопления повреждений при непропорциональном (сложном) нагружении с учетом эффектов дополнительного изотропного упрочнения.

Литература

1. Лэмба, Сайдботтом. Пластичность при циклическом деформировании по непропорциональным траекториям // Теоретические основы инженерных расчетов. 1978. №1. С. 108-117.
2. Макдауэлл. Экспериментальное изучение структуры определяющих уравнений для непропорциональной циклической пластичности // Теоретические основы инженерных расчетов. 1985. №4. С. 98-111.
3. Охаси, Каваи, Каито. Неупругое поведение нержавеющей стали 316 при многоосных непропорциональных циклических нагружениях при повышенной температуре // Теоретические основы инженерных расчетов . 1985. №2. С.6-15.
4. Benallal A., Marquis D. Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elasto-Viscoplasticity // Journal of Engineering Materials and Technology. 1987. V. 109. P. 326-337.
5. Kremple E. and Lu H. "The Hardening and Rate Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial in Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room

- Temperature”, ASME Journal of Engineering Materials and Technology. Vol. 106, 1984. P. 376-382.
6. McDowell D.L. and Socie D.F. “Transient and Stable Deformation Behavior Under Cyclic Nonproportional Loadings”, ASTM – STP 853. Proceedings of the International Symposium on Biaxial-Multiaxial Fatigue, San Francisco, Dec. 1982. P. 64-87.
 7. Tasnim H., Stelios K. Ratcheting of Cyclically hardening and softening materials: II Multiaxial behavior/ Inter. J. of Plasticity. Vol. 10. No. 2, 1994. P. 185-212.
 8. Tanaka E., Murakami S. and Ooka M. “Effects of Plastic Strain Amplitudes on Non-proportional Cyclic Plasticity”, Acta Mech., Vol. 57, 1985. P. 167-182.
 9. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. О соотношениях эндохронной теории пластичности с “новой” мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении // Технология легких сплавов. 1990. №3. С. 32-36.
 10. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Об эффекте непропорциональности при сложном циклическом нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических систем: Межвуз. сб. / М.: Товарищ. науч. изд. КМК. 1995. С.171-175.
 11. Коротких Ю.Г., Маковкин Г.А., Сбитнев В.А. Моделирование эффектов локальной анизотропии упрочнения в рамках модели пластичности с комбинированным упрочнением // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / М.: Товарищ. науч. изд. КМК. 1995.С. 23-31.
 12. Коротких Ю.Г., Маковкин Г.А. О моделировании процессов непропорционального упругопластического деформирования на базе уравнений пластичности с комбинированным упрочнением // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / М.: Товарищ. науч. изд. КМК. 1997.С. 5-10.
 13. Маковкин Г.А. Моделирование циклического упрочнения при блочном непропорциональном деформировании // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Межвуз. сб./ М.: товарищ.науч. изд. КМК. 1997. С. 62-69.
 14. Маковкин Г.А. Обоснование применимости модели пластичности с комбинированным упрочнением для процессов сложного нагружения материалов и анализа прочности конструктивных элементов: Диссертация на соиск. уч. степени к.ф.-м.н./ ННГУ, Н.Новгород, 1992. 162 с.
 15. Маковкин Г.А. Сравнительный анализ параметров непропорциональности сложного упругопластического деформирования // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия механика. Вып. 1. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. С. 30-36.
 16. Келлер И.Э., Трусов П.В. Простая модель упругопластичности для непропорционального циклического нагружения // Проблемы прочности. 1988. № 1. С.15-24.
 17. Келлер И.Э., Трусов П.В. Модель, описывающая эффекты пластичности металлов при непропорциональном циклическом нагружении // ПМТФ. 1999. Т.40. №6. С.146-153.
 18. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 144 с.
 19. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 176 с.
 20. Бондарь В.С., Титарев И.А. Вариант теории пластичности для пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. Вып. 63. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2001. С.5-17.
 21. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории.- М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.
 22. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ. 1990. 310 с.
 23. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Нелинейные процессы накопления поврежде-

-
- ний при циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. 2013. № 75(2). С. 096-104.
24. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Численное моделирование нелинейных процессов накопления повреждений при циклических нагружениях // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т.6 № 3. С.286-291.
25. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Простейший вариант аппроксимации функционалов пластичности теории упругопластических процессов // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 3. С.82-90.
26. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Вариант теории упругопластических процессов и аппроксимации функционалов пластичности // Проблемы прочности и пластичности. 2011. № 73. С.5-12.
27. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упругопластических процессов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. №3. С. 46-56.