

Тригонометрическое распределение вероятностей

к.э.н. Ивашнев Л.И.

Аннотация. В статье предлагается тригонометрическое распределение вероятностей, а также способ генерирования числовых последовательностей, распределенных по тригонометрическому закону. Экономические величины имеют ярко выраженную цикличность, поэтому указанное распределение может оказаться весьма полезным при анализе, исследовании, планировании, прогнозировании и моделировании экономических величин, объектов и процессов.

Ключевые слова: тригонометрическое распределение вероятностей, генерирование числовых последовательностей, экономические величины, цикличность, анализ, исследование, планирование, прогнозирование, моделирование.

В работе [1] рассмотрены важнейшие распределения случайных величин, такие как биномиальное, равномерное, нормальное и пр. Однако практически все экономические показатели включают циклические случайные составляющие, для которых распределение пока не получено. В связи с этим в предлагаемой статье описывается распределение случайной величины с плотностью вероятности:

$$\varphi(\psi) = b \cdot (1 + \sin a(\psi + \psi_c)) + c, \quad (1)$$

которое названо тригонометрическим распределением.

Сумма $1 + \sin a(\psi + \psi_c)$ применяется потому, что значения плотности вероятности не должны быть отрицательными. Аргумент ψ принимает значения на отрезке $[\psi_0; \psi_m]$, параметр ψ_c используется для того, чтобы задавать требуемый сдвиг функции $\varphi(\psi)$ вдоль оси ψ .

Распределение случайной величины с плотностью вероятности (1) является обобщенным тригонометрическим распределением, которое можно использовать для задания всевозможных разновидностей тригонометрических распределений вероятностей, включая и равномерное распределение. В этом случае функция распределения имеет вид:

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \int_{\psi_0}^{\psi} b(1 + \sin a(\psi + \psi_c)) + c d\psi = (b + c) \int_{\psi_0}^{\psi} d\psi + b \int_{\psi_0}^{\psi} \sin a(\psi + \psi_c) d\psi = \\ &= (b + c)\psi \Big|_{\psi_0}^{\psi} + \frac{b}{a} \int_{\psi_0}^{\psi} \sin a(\psi + \psi_c) da(\psi + \psi_c) = \\ &= (b + c)\psi - (b + c)\psi_0 - \frac{b}{a} \cos a(\psi + \psi_c) \Big|_{\psi_0}^{\psi} = \\ &= (b + c)(\psi - \psi_0) + \frac{b}{a} \cos a(\psi_0 + \psi_c) - \frac{b}{a} \cos a(\psi + \psi_c), \end{aligned}$$

т.е.

$$F(\psi) = (b + c)(\psi - \psi_0) + \frac{b}{a} \cos a(\psi_0 + \psi_c) - \frac{b}{a} \cos a(\psi + \psi_c). \quad (2)$$

По условию $F(\psi_m) = 1$. Поэтому:

$$F(\psi_m) = (b + c)(\psi_m - \psi_0) + \frac{b}{a} \cos a(\psi_0 + \psi_c) - \frac{b}{a} \cos a(\psi_m + \psi_c) = 1.$$

Из этого выражения получаем:

$$c = \frac{ab - ab^2(\psi_m - \psi_0) + b^2 \cos a(\psi_m + \psi_c) - b^2 \cos a(\psi_0 + \psi_c)}{ab(\psi_m - \psi_0)}. \quad (3)$$

Если вместо коэффициента c использовать выражение (3), то плотность вероятности для тригонометрического закона определяется выражением:

$$\varphi(\psi) = b(1 + \sin a(\psi + \psi_c)) + \frac{ab - ab^2(\psi_m - \psi_0) + b^2 \cos a(\psi_m + \psi_c) - b^2 \cos a(\psi_0 + \psi_c)}{ab(\psi_m - \psi_0)}. \quad (4)$$

Следовательно, функция распределения для тригонометрического закона принимает вид:

$$F(\psi) = \left(b + \frac{ab - ab^2(\psi_m - \psi_0) + b^2 \cos a(\psi_m + \psi_c) - b^2 \cos a(\psi_0 + \psi_c)}{ab(\psi_m - \psi_0)}\right)(\psi - \psi_0) + \frac{b}{a} \cos a(\psi_0 + \psi_c) - \frac{b}{a} \cos a(\psi + \psi_c). \quad (5)$$

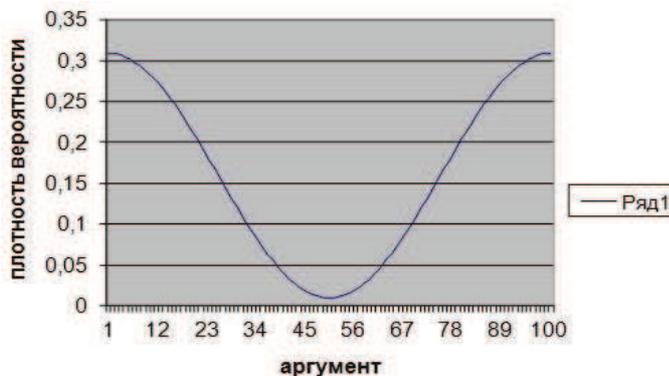


Рисунок 1. График плотности вероятности для распределения с вышеуказанными значениями параметров

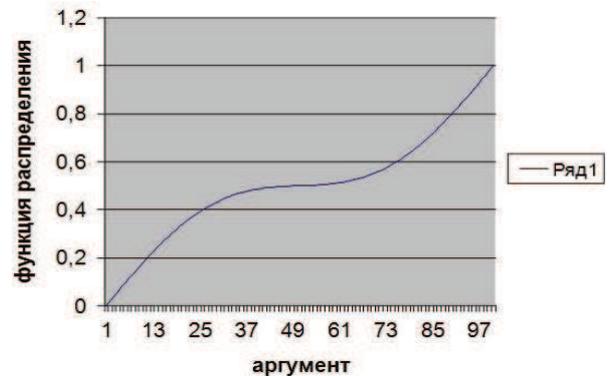


Рисунок 2. График функции распределения с вышеуказанными значениями параметров

Графики плотности вероятности и функции распределения для следующих значений параметров: $\psi_0 = 0$; $\psi_c = \pi/2$; $\psi_m = \pi$; $a = 1$; $b = 0,15$; $c = 0,009155$ представлены на рисунках 1 и 2.

Теперь можно получить выражения для математического ожидания и дисперсии рассматриваемой случайной величины:

$$\begin{aligned} M(\psi) &= \int_{\psi_0}^{\psi_m} \psi(b(1 + \sin a(\psi + \psi_c)) + c) d\psi = (b + c) \int_{\psi_0}^{\psi_m} \psi d\psi + b \int_{\psi_0}^{\psi_m} \psi \sin a(\psi + \psi_c) d\psi = \\ &= (b + c) \frac{\psi^2}{2} \Big|_{\psi_0}^{\psi_m} - \frac{b}{a} \psi \cos a(\psi + \psi_c) \Big|_{\psi_0}^{\psi_m} + \frac{b}{a} \int_{\psi_0}^{\psi_m} \cos a(\psi + \psi_c) d\psi = \\ &= (b + c) \frac{\psi_m^2 - \psi_0^2}{2} - \frac{b}{a} \psi_m \cos a(\psi_m + \psi_c) + \frac{b}{a} \psi_0 \cos a(\psi_0 + \psi_c) + \frac{b}{a^2} \sin a(\psi + \psi_c) \Big|_{\psi_0}^{\psi_m} = \\ &= (b + c) \frac{\psi_m^2 - \psi_0^2}{2} - \frac{b}{a} \psi_m \cos a(\psi_m + \psi_c) + \frac{b}{a} \psi_0 \cos a(\psi_0 + \psi_c) + \\ &+ \frac{b}{a^2} \sin a(\psi_m + \psi_c) - \frac{b}{a^2} \sin a(\psi_0 + \psi_c), \end{aligned}$$

т.е.

$$M(\psi) = (b+c) \frac{\psi_m^2 - \psi_0^2}{2} - \frac{b}{a} \psi_m \cos a(\psi_m + \psi_c) + \frac{b}{a} \psi_0 \cos a(\psi_0 + \psi_c) + \frac{b}{a^2} \sin a(\psi_m + \psi_c) - \frac{b}{a^2} \sin a(\psi_0 + \psi_c), \quad (6)$$

где: c определяется выражением (3).

Соответственно, дисперсия:

$$\begin{aligned} D(\psi) &= \int_{\psi_0}^{\psi_m} \psi^2 (b(1 + \sin a(\psi + \psi_c)) + c) d\psi = (b+c) \int_{\psi_0}^{\psi_m} \psi^2 d\psi + b \int_{\psi_0}^{\psi_m} \psi^2 \sin a(\psi + \psi_c) d\psi = \\ &= (b+c) \frac{\psi_m^3 - \psi_0^3}{3} + \frac{2b\psi}{a^2} \sin a(\psi + \psi_c) \Big|_{\psi_0}^{\psi_m} - b \left(\frac{\psi^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos a(\psi + \psi_c) \Big|_{\psi_0}^{\psi_m} = \\ &= (b+c) \frac{\psi_m^3 - \psi_0^3}{3} + \frac{2b\psi_m}{a^2} \sin a(\psi_m + \psi_c) - \frac{2b\psi_0}{a^2} \sin a(\psi_0 + \psi_c) - \\ &- \left(\frac{b\psi_m^2}{a} - \frac{2b}{a^3} \right) \cos a(\psi_m + \psi_c) + \left(\frac{b\psi_0^2}{a} - \frac{2b}{a^3} \right) \cos a(\psi_0 + \psi_c), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} D(\psi) &= (b+c) \frac{\psi_m^3 - \psi_0^3}{3} + \frac{2b\psi_m}{a^2} \sin a(\psi_m + \psi_c) - \frac{2b\psi_0}{a^2} \sin a(\psi_0 + \psi_c) - \\ &- \left(\frac{b\psi_m^2}{a} - \frac{2b}{a^3} \right) \cos a(\psi_m + \psi_c) + \left(\frac{b\psi_0^2}{a} - \frac{2b}{a^3} \right) \cos a(\psi_0 + \psi_c), \end{aligned} \quad (7)$$

где: c определяется выражением (3) и коэффициенты $a \geq 0$; $b \geq 0$; $c \geq 0$.

Выражения (6) и (7) могут использоваться для расчета математического ожидания и дисперсии тригонометрического распределения с требуемыми параметрами.

Полученная функция распределения (2) может использоваться для моделирования цикличности экономических показателей, что имеет особое значение при моделировании экономики предприятия, отрасли и даже государства, находящихся в условиях кризиса, когда вопросам экономии средств следует уделять особое внимание.

Для моделирования циклических изменений экономического показателя с помощью датчика случайных чисел можно использовать последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на интервале $(0; 1)$. Для каждого случайного числа ξ определяется соответствующее значение функции распределения $F(\xi)$, причем это значение и используется в качестве очередного значения циклически изменяющегося экономического показателя. В системе EXCEL обращение к такому датчику имеет вид =СЛЧИС().

Для этого следует использовать выражение, обратное выражению (2), т.е. $\psi = F^{-1}(y)$, обратное функции распределения:

$$y = (b+c)(\psi - \psi_0) + \frac{b}{a} \cos a(\psi_0 + \psi_c) - \frac{b}{a} \cos a(\psi + \psi_c). \quad (8)$$

Соответствующее выражение, позволяющее получать значения функции $\psi = F^{-1}(y)$, пока не получено, поэтому для моделирования последовательности случайных чисел, распределенных в соответствии с тригонометрическим распределением, можно реализовать следующую последовательность действий (алгоритм):

1. Получить последовательность значений случайных чисел, соответствующих функции распределения (2) на отрезке $[\psi_0; \psi_m]$ для концов равных, достаточно малых элементар-

ных отрезков

$$\Delta\psi = \frac{\Psi_m - \Psi_0}{n},$$

где: n – число элементарных отрезков. Тогда нижним концом 1-го элементарного отрезка будет координата ψ_0 , а верхним концом k -го элементарного отрезка ($k = 1 \dots n$) будет координата

$$\psi_k = \psi_0 + k \cdot \frac{\Psi_m - \Psi_0}{n}.$$

- Полагая $y_0 = 0$, для верхнего конца y_k каждого элементарного отрезка следует получить значение функции распределения (8). Это удобно выполнить в системе EXCEL, причем фрагмент столбца (далее кол.) значений функции распределения (кол. D, рисунок 3) получен при значениях: $\psi_0 = 0$; $\psi_c = \pi/2$; $\psi_m = 2\pi$; $n = 100$ (кол. B, рисунок 3).
- Здесь в кол. A получены значения аргумента ψ от 0 до 2π с интервалом $\Delta\psi = 0,062832$, кол. B содержит номера элементарных отрезков, а в кол. D получены значения плотности вероятности, рассчитанные для верхней границы каждого элементарного отрезка. В кол. C получены соответствующие значения функции распределения для верхнего конца каждого элементарного отрезка.

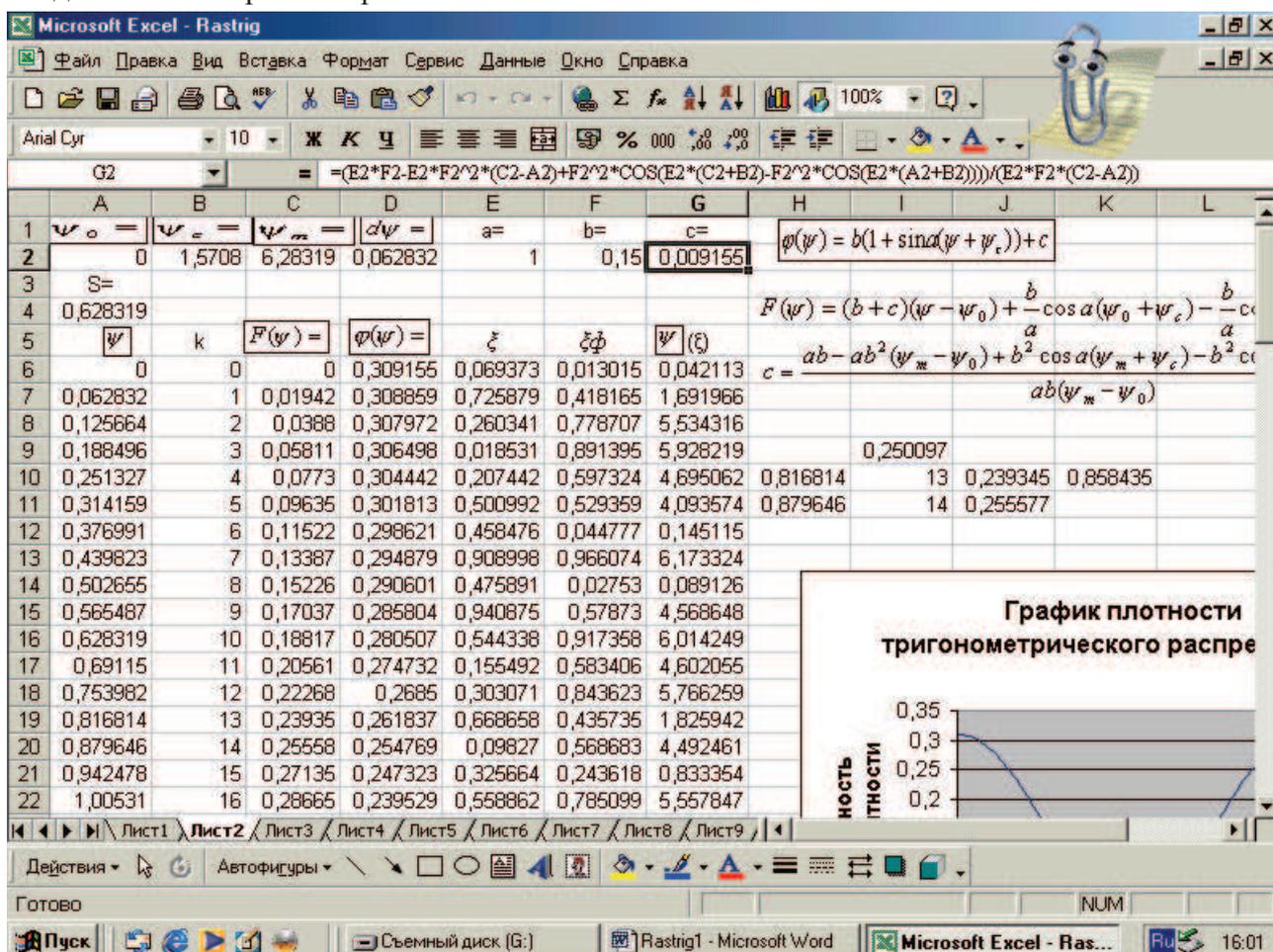


Рисунок 3. Генерирование случайных чисел с заданными параметрами, распределенных по тригонометрическому закону на интервале (0; π)

- В кол. E на этом же рисунке представлена последовательность из 100 случайных чисел ξ из интервала (0; 1), полученных с помощью датчика =СЛЧИС(), используемого в системе

EXCEL.

6. В кол. F представлены зафиксированные значения ξ_{ϕ} датчика СЛЧИС (скопированы значения этого датчика из кол. E). Значения этого датчика заключены в интервале (0; 1), т.е. их можно использовать в качестве случайных значений функции распределения. Соответствующие значения аргумента ψ можно получить из кол. A.

Так, значение $\xi = 0,013015$ заключено между с значениями $F(\psi_6) = 0,11522$ в C12 (кол. C) и $= 0,13387$ в C13 в строках с $k = 6$ и $k = 7$.

Для уточнения величины ψ в диапазоне H9:K11 выполняется аппроксимация по формуле: $=H10+(I9-J10)*(H11-H10)/(J11-J10)$, которая помещена в ячейку K10. Отмечаем, что диапазон ячеек H9:K11 используется как блок линейной аппроксимации для каждого случайного числа, полученного с помощью датчика =СЛЧИС(). При этом, получив очередное случайное число ξ (для этого в ячейку I9 можно вставить обращение к встроенной функции =СЛЧИС()) или, выбрав его из очередной строки ξ_{ϕ} в кол. F, подставляем его значение в ячейку I9. Затем ищем в кол. C значения $F(\psi_1) < \xi \leq F(\psi_2)$, между которыми заключено указанное случайное число. Так, на рисунке 3 в аппроксиматор скопирован диапазон ячеек A19:C20, характеризующий 14-й элементарный отрезок, причем линейная аппроксимация дала значение тригонометрически распределенного случайного числа $\psi(\xi) = 0,858435$, которое размещено между верхней и нижней границами указанного диапазона (кол. A).

Так может быть получено число, соответствующее любому случайному числу, полученному с помощью датчика СЛЧИС, т.е. так может генерироваться последовательность случайных чисел распределенных по тригонометрическому закону с любыми параметрами распределения.

7. Тригонометрически распределенные случайные числа помещены в кол. G. Далее этот столбец скопирован в окно 3 кол. A, где выполнена их сортировка по возрастанию (рисунок 4).



Рисунок 4. Построение гистограммы по полученной числовой последовательности

8. Полученная последовательность случайных чисел, распределенных по тригонометрическому закону, может быть использована для построения гистограммы, т.е. графика статистической плотности вероятности.
9. Для этого область изменений величины $F(\psi)$, т.е. интервал (0; 2π) разобьем на некоторое число разрядов (на рисунке 4 определено 10 разрядов шириной по $S = 0,628319$, т.е.

по 20 строк кол. А). Далее определяем число попаданий полученных случайных чисел в каждый разряд и по столбцу счетчиков В строим гистограмму. По виду полученной гистограммы можно сказать, что она напоминает тригонометрическое распределение (рисунок 1), но если бы количество случайных чисел было больше, чем 100 элементов выборки, то и полученная гистограмма больше бы напоминала рисунок 1.

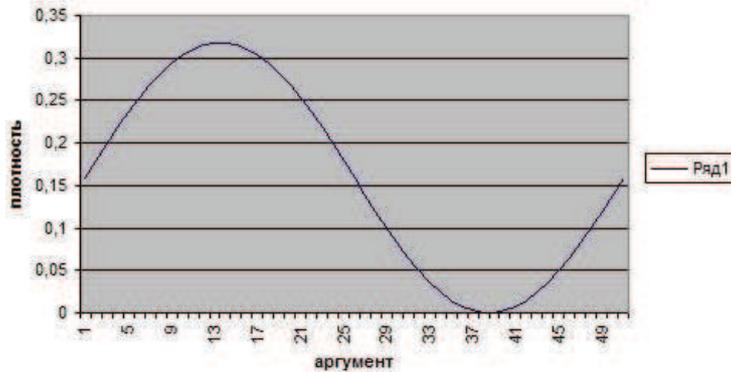


Рисунок 5. График плотности вероятности тригонометрического распределения (1) на отрезке $[0; 2\pi]$, если $a = 1$, $\psi_c = 0$

Если надо построить график плотности вероятности (1) при $\psi_0 = 0$; $\psi_c = 0$; $\psi_m = \pi$; $a = 1$; $b = 0,15$; $c = 0,009155$ для отрезка $[0; 2\pi]$, то получается обычная синусоида (рисунок 5).

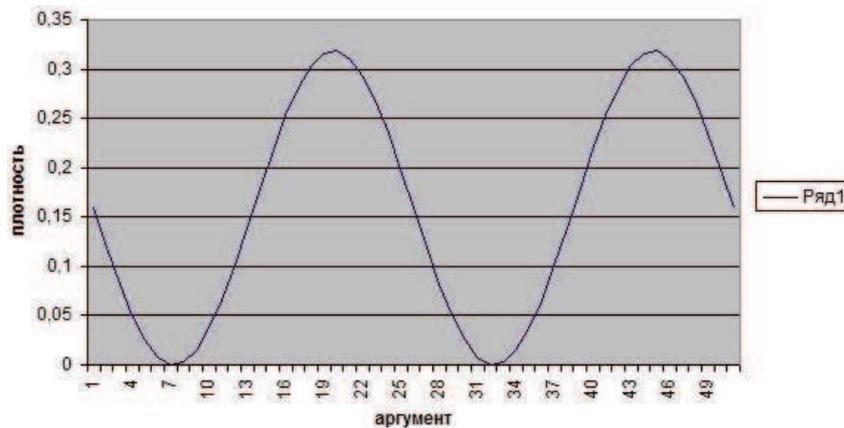


Рисунок 6. Плотность вероятности тригонометрического распределения с параметрами: $\psi_0 = \pi$; $\psi_m = 3\pi$; $\psi_c = \pi/2$; $a = 2$

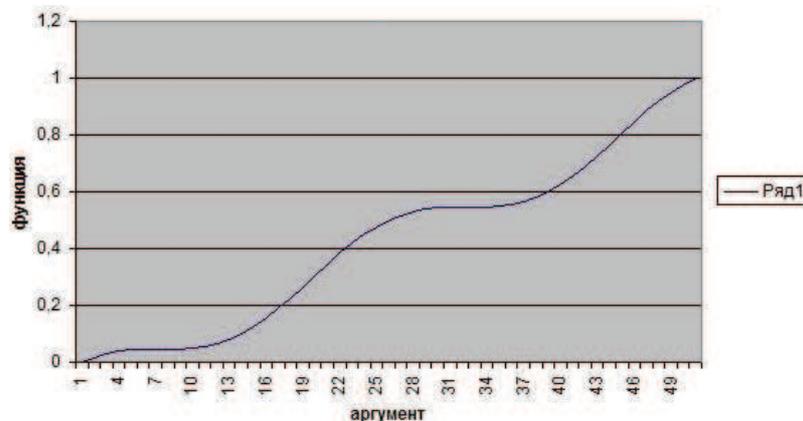


Рисунок 7. Функция тригонометрического распределения с параметрами: $\psi_0 = \pi$; $\psi_m = 3\pi$; $\psi_c = \pi/2$; $a = 2$

Разнообразие возможных тригонометрических распределений весьма велико. Так, на

рисунках 6 и 7 показано тригонометрическое распределение с параметрами: $\psi_0 = \pi$; $\psi_m = 3\pi$; $\psi_c = \pi / 2$; $a = 2$.

Отмечаем, что предложенный метод построения графиков распределений может использоваться и для других законов распределений, для которых трудно или невозможно получить функцию, обратную функции распределения. Так можно генерировать последовательность случайных чисел, распределенных по нормальному закону, причем соответствующий датчик очень легко запрограммировать и получаемая числовая последовательность может более точно соответствовать нормальному закону.

Если в выражениях (1) – (5) использовать значение $b = 0$ или $a = 0$, то будет получено равномерное распределение [1]. Кроме того, экономические величины имеют ярко выраженную цикличность [2], поэтому тригонометрическое распределение случайной величины может оказаться весьма полезным при анализе, исследовании, планировании, прогнозировании и моделировании экономических величин, объектов и процессов.

В заключение отмечаем, что в настоящее время большинство экономистов не владеют методами исследования цикличности экономических показателей т.е. гармоническим анализом. Этим вопросом легко овладеть по учебнику [2], что может позволить более точно решать вопросы планирования и прогнозирования развития экономики предприятия, отрасли и даже государства. Предлагаемая статья также может помочь в овладении этими проблемами.

Литература

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 543 с.
2. Ивашнев Л.И. Методы и модели в экономике: Учеб. пособие. – М.: Издательский дом «Лидер-М», 2011. – 328 с.
3. Ивашнев Л.И. Методы регрессии в экономической математике: Монография. – М.: Изд-во МГОУ, 2005. – 200 с.
4. Ивашнев Л.И. Методы и модели в экономике: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГОУ, 2004. – 110 с.