# *Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы*

д.ф.-м.н. проф. Кирсанов М.Н.
*НИУ МЭИ*
*8(495) 362-73-14, C216@ya.ru*

*Аннотация*. Для пространственной фермы треугольного сечения найдено аналитическое решение для прогиба с учетом строительного подъема. Это позволило найти то значение подъема, при котором ферма выпрямляется под действием нагрузки. Получена простая асимптотика решения. Основой решения явился метод индукции с использованием системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: *строительный подъем, ферма, индукция, точное решение, Maple*

## Введение

Для расчета плоских ферм можно применять метод сечений, метод вырезания узлов, метод замены стержней и графические методы (теперь уже только в учебных целях). При расчете пространственных ферм обычно используют только метод вырезания узлов или приближенные методы, основанные на разложении нагрузки по плоскостям фермы, которые выделяются в пространственной конструкции [1]. В настоящей работе описан расчет фермы, в которой одна из граней не плоская и метод разложения неприменим. Основной целью работы является получение аналитического решения для произвольного числа панелей. Аналогичные задачи были уже решены для пространственных ферм [2-5], найдены оптимальные размеры, неожиданные условия вырождения систем. Здесь же еще решается практически важная задача о выборе строительного подъема конструкции.

## Схема фермы

Пространственная ферма состоит их двух плоских ферм с треугольными решетками, соединенных стержнями нижнего пояса. Нижний пояс имеет в центре излом и плоскую ферму не образует (рисунок 1). Высота фермы – $h$, ширина в основании – $b$, длина одной панели – $a$, число панелей – $n=2k$, подъем в середине пролета – $kc$. Принятое четное число панелей не снижает общность результата. Для нечетного числа панелей решение принципиально не отличается, а для большого числа стержней оба решения практически совпадают. При $c=0$ ферма совпадает с фермой, рассчитанной в [2], но для другой схемы нагрузок (одна нагрузка в середине пролета). Стержни предполагаются упругими, возможность потери устойчивости и исчерпание прочности здесь не изучаются. Шарниры, соединяющие стержни, идеальные. Ферма представляет собой статически определимую конструкцию.

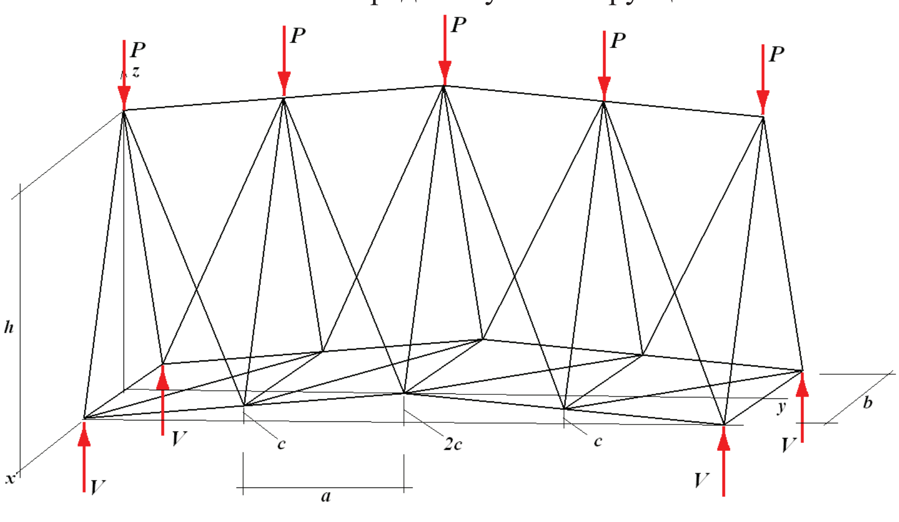


**Рисунок 1**

## Метод

Ферма загружена уравновешенной системой вертикальных сил. Силами $P$ равномерно загружен верхний пояс фермы, четыре одинаковых силы $V=(n+1)P/4$, имитирующих реакции вертикальных опор, приложены по углам основания (рисунок 1, $k$ = 2). Такая схема нагрузок позволяет избежать раскрытия неизбежной при четырех угловых опорах статической неопределимости.

Усилия в стержнях определяем методом вырезания узлов с использованием метода индукции [2] и системы Maple. Заметим, что использование системы компьютерной алгебры существенно упрощает аналитическое решение, особенно для ферм с произвольным числом пролетов. Однако, как и в численном расчете, где существует так называемое «проклятие размерностей», имеющее в данном случае характер накопления ошибок округления при решении систем линейных уравнений, в решении задач в символьном виде это проявляется в нереально большом времени счета систем с числом панелей фермы более 10. При этом, если проблему накопления ошибок в численном счете еще как-то можно решить, увеличивая точность вычислений, то скорость преобразования символьных выражений зависит только от производительности компьютера. Немного ускоряет счет наличие нескольких ядер (в последних версиях Maple это используется) и увеличение оперативной памяти, но здесь есть предел, и этот предел быстро достигается, не позволяя в принципе решить аналитически задачу о прогибе фермы с десятками панелей. В реальных же конструкциях несколько десятков панелей вполне допустимая ситуация. Кроме того, скорость зависит и от степени сложности самой задачи. Так, при $c$ = 0 (ферма без строительного подъема) скорость преобразований в несколько раз выше. Именно эти проблемы стимулировали автора разработать индуктивный метод, пригодный для анализа ферм с неограниченным числом панелей.

## Решение

Стержни предполагаются упругими. Ферма представляет собой статически определимую конструкцию. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов. Задаются координаты узлов. Ось $x$ направлена по ширине фермы, ось $y$ – по длине, $z$ – по высоте (рисунок 1):

$$x_j=b/2,\ x_{j+1}=-b/2,\ x_{j+2}=0,\ y_j=y_{j+1}=y_{j+2}=a(i-1),$$

$$z_j=\begin{cases}(i-1)c, & i<k+1\\(n-i+1)c, & i\ge k+1\end{cases},$$

$$z_{j+1}=z_j,\ z_{j+2}=z_j+h,$$

где: $j=3i-2,\quad i=1,\dots,n+1.$

Указываются номера узлов по концам стержней, условно представленных векторами. Составляется [2] матрица направляющих косинусов $G$ и решается система уравнений $G\overline{S}=\overline{B}$, где: $\overline{S}=\{S_1,\dots,S_m\}$ – вектор усилий в стержнях, $m=9n+3$ – число стержней, $\overline{B}=\{P_{x,1},P_{y,1},P_{z,1},\dots,P_{x,m},P_{y,m},P_{z,m}\}$ – вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам).

Из решения системы определяются усилия в стержнях. В стержнях решетки основания, как и следовало ожидать, усилия оказываются равными нулю (кроме двух крайних стяжек, в которых усилия равны $Pb(2k+1)/(8h)$ и в средней стяжке на изломе основания, сжатой усилием $-k^2bc/(4h^2)$ при числе панелей $k$). Если для решения системы (1) использовать программу Maple [6, 7], то усилия можно рассчитать как в численном, так и аналитическом представлении. Например, усилия в продольных стержнях одной половины пролета верхней (загруженной силами $P$) грани фермы имеют вид:

$$O_i=-((2k+1)(2i-1)-2i^2)P\sqrt{a^2+c^2}/(4h),\ i=1,\dots,k.$$

В другой половине пролете усилия симметричны. Прогиб середины пролета (вертикальное перемещение точки приложения силы $P$) определяем по формуле Максвелла-Мора, принимая жесткость $EF$ стержней одинаковой:

$$\Delta = P\sum_{i=1}^{m} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где: $S_i^{(1)}$ – усилия в стержнях от единичной силы, приложенной к середине верхнего пояса,

$S_i^{(P)}$ – усилия в стержнях от нагрузки, $l_i$ – длины стержней.

Подставляя значения длин и усилий, для малых значений параметра $c$ (в степенном ряду удерживался линейное слагаемое) получаем

$$\tilde{\Delta} = P\left(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 b^3\right) / (32h^2),$$

где: $\tilde{\Delta} = EF\Delta$, $\alpha_1 = k^2 + 1 - 2k(k+1)c/h$, $\alpha_2 = k^2$, $\alpha_3 = 2k^2(5k^2 - 1)$, $\alpha_4 = 2k + 1$,

$q_1 = (b^2 + 4h^2)^{3/2}$, $q_2 = (4a^2 + b^2 + 4h^2)^{3/2}$.

Формула для прогиба получена индуктивным методом. Суть метода такова. При последовательном решении задачи для увеличивающихся значений $k$ в решении выявлялись подобные, не меняющиеся при разных $k$ коэффициенты. В данном случае это выражения $q_1$, $q_2$, $a^3$, $b^3$. При $q_1$, например, получилась следующая последовательность коэффициентов: 2, 5, 10,17,26, 37… Найти общий член этой последовательности можно и в уме, но в общем случае лучше воспользоваться помощью команды **rgf_findrecur** пакета **genfunc** системы Maple. Сначала эта команда получает рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет искомая функция $\alpha_1 = \alpha_1(k)$, потом оператор **rsolve** находит решение этого уравнения. Порядок рекуррентного уравнения, а следовательно, и длина необходимой для ввода в Maple последовательности в различных случаях оказывается разной. Наиболее сложным оказался коэффициент $\alpha_3 = \alpha_3(k)$. Для его нахождения сначала пришлось решать задачу о прогибе десять раз при $k$=1,…,10 и получить последовательность 1, 19, 99, 316, 775, 1611, 2989, 5104, 8181, 12475, для которой команда **rgf_findrecur** получила уравнение пятого порядка:

$$\alpha_3(k) = 5\alpha_3(k-1) - 10\alpha_3(k-2) + 10\alpha_3(k-3) - 5\alpha_3(k-4) + \alpha_3(k-5).$$

Затем, используя пять начальных условий

$$\alpha_3(1) = 1, \quad \alpha_3(2) = 19, \ \alpha_3(3) = 99, \ \alpha_3(4) = 316, \ \alpha_3(5) = 775,$$

с помощью **rsolve** и был найден коэффициент $\alpha_3 = \alpha_3(k)$.

Разложение решения в ряд для его линеаризации по $c$ произведено оператором **mtaylor,** предназначенным в общем случае для функций многих переменных, что удобнее, чем оператор **taylor**, который помимо разложения дает еще и остаточный член, от которого необходимо избавляться.

### Анализ

Приравнивая прогиб строительному подъему $kc$, можно найти значение параметра $c$, при котором нижний пояс фермы после нагружения принимает прямолинейное очертание – «выпрямляется» под действием нагрузки:

$$c = \frac{Ph(q_1(k^2+1) + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 b^3)}{2k(q_1 P(1+k) + 16h^3 EF)}.$$

При $k \to \infty$ эта зависимость имеет предел: $c \to h$. Предел также вычисляется в системе Maple (оператор **limit(c,k=infinity)**).

Проект реальной фермы всегда включает выбор ее оптимальной высоты. Пусть задана $L = 2ka$ – длина половины пролета фермы. Зависимость безразмерного прогиба $\tilde{\Delta} = EF\Delta/(PL)$ от высоты $h$ (рисунок 2) обнаруживает минимум. На рисунке 2 зависимости найдены при $L = 10$, $b$=1, c=0,1-0.14 (все размеры в метрах) и $k$ = 5. Заметим, что оптимальная высота не зависит от строительного подъема. С увеличением $c$ минимальный прогиб заметно уменьшается.

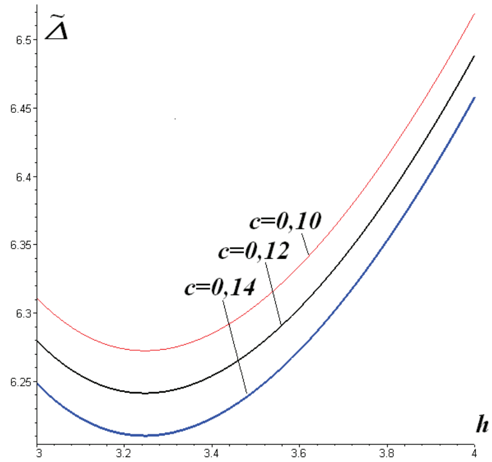


**Рисунок 2**

## Выводы

Рассчитаны усилия в пространственной балочной ферме, имеющей строительный подъем. Найдены аналитические выражения для прогиба середины фермы при произвольном числе панелей. Получена зависимость от параметров задачи величины подъема, при котором балка-ферма под действием нагрузки выпрямляется. Показана эффективность метода индукции в работе с системой аналитических вычислений Maple.

## Литература


1. Русаков А.И. Строительная механика. М.: Проспект, 2009. 359 с.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ, 2012. № 5. С. 5-8.
3. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем. // Строительная механика и расчет сооружений, 2011. № 5. С. 11-15.
4. Кирсанов М. Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 28-34
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
6. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. –208 с.
7. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2011 644 с.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitectured cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses//ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9, p. 607 – 617.