Модель эффективной динамической вязкости двухфазных смесей

д.т.н. проф. Кондратьев А.С., Швыдько П.П.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, ask41@mail.ru

Аннотация. Предложен способ расчета эффективной вязкости двухфазных смесей, учитывающий распределение частиц по размерам, стесненность жидкости в межчастичном пространстве и влияние формы частиц, поясняющий существующий разброс экспериментальных данных.

Ключевые слова: *эффективная вязкость, твердые частицы, распределение по размерам, стесненность, форма частиц.*

Расчет эффективной вязкости двухфазных полимодальных смесей твердых частиц необходим для разработки методов расчета скоростей стесненного осаждения твердых частиц при образовании донных отложений и других аналогичных процессов в природе и различных технических устройствах. Следует отметить, что, несмотря на многочисленность опубликованных теоретических и экспериментальных исследований, между ними имеется определенный качественный и количественный разрыв.

Например, проанализируем теоретическую модель и экспериментальные данные, которая предлагается для их описания [1]. Теоретическое обоснование вида функциональной зависимости получено исходя из предположения, что добавление одного и того же количества частиц в исходную дисперсионную среду (жидкость) и суспензию, имеющих одинаковые объемы, приведет к одинаковым относительным значениям эффективных вязкостей вновь образованных объемов двух сред [1]. Это допущение, видимо, приемлемо при небольшой концентрации монодисперсных частиц твердой фазы. При возрастании концентрации твердой фазы, отдельные струи жидкости, обтекающие одиночные частицы, начинают взаимодействовать друг с другом и условия гидродинамического подобия нарушаются даже для мономодальных частиц. Весь массив экспериментальных данных описывается единой функциональной степенной зависимостью, два коэффициента которой принимают попарно различные значения, которые определялись по результатам сопоставления с опытными данными.

$$\bar{\mu} = (1 - \varphi / 0,73)^{-1,525} : \quad (1)$$

$$\bar{\mu} = (1 - \varphi / 0,65)^{-1,675} : \quad (2)$$

$$\bar{\mu} = (1 - \varphi / 0,56)^{-1,8} : \quad (3)$$

Принималось, что численное значение коэффициента 0,73 соответствует максимальной объемной доле частиц при их гексагональной упаковке; значение 0,65 соответствует максимальной объемной доле частиц при их кубической центрированной упаковке; значение 0,56 соответствует максимальной объемной доле частиц при их простой кубической упаковке.

Из формул (1) ÷ (3) следует, что при стремлении объемной доли частиц φ к величинам максимальной объемной доли частиц для каждой из предполагаемых упаковок, величины $\bar{\mu}$ стремятся к бесконечности, что, например, для наименьшего значения 0,56, представляется физически не достоверным.

В таблице 1 приведены значения относительной эффективной вязкости двухфазных смесей, рассчитанных по формулам (1) ÷ (3). В дальнейшем, выражения (1) ÷ (3) используются в качестве информации об экспериментальном диапазоне величин относительной вязкости двухфазных смесей (суспензий).

Исходя из представлений о том, что избыточная вязкость суспензии пропорциональна не только объемной доле твердой фазы, но также обратно пропорциональна величине объемной доли свободной жидкости [2], и того, что формула Эйнштейна получена для бесконечно малой объемной доли частиц твердой фазы, преобразуем последнюю приближенно следующим образом:

$$\mu - \mu_0 = d\mu = \alpha\mu_0\varphi \approx \mu d[\alpha\varphi / (1-\beta\varphi)]. \quad (4)$$

Интегрируя (4), получим:

$$\bar{\mu} = \exp[\alpha\varphi(1-\beta\varphi)], \quad (5)$$

где: α и β – эмпирические коэффициенты, подбираемые из условия наилучшего совпадения с опытными данными.

Проведя указанную процедуру, взамен соотношений (1) ÷ (3), получим следующие зависимости:

$$\ell n\bar{\mu} = 2,054\varphi / (1-0,856\varphi); \quad (6)$$

$$\ell n\bar{\mu} = 2,5266\varphi / (1-0,9714\varphi); \quad (7)$$

$$\ell n\bar{\mu} = 3,1502\varphi / (1-1,103\varphi). \quad (8)$$

В таблице 1 даны результаты расчетов по формулам (1) ÷ (3) и (6) ÷ (8).

Таблица 1.

φ		0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
№ формулы	(1)	1,021	1,11	1,25	1,42	1,63	1,89	2,24	2,71	3,36	4,31	5,82	8,46	13,9
	(2)	1,026	1,14	1,32	1,55	1,85	2,26	2,82	3,65	4,96	7,20	11,7	23,0	73,4
	(3)	1,033	1,18	1,43	1,75	2,22	2,90	3,98	5,84	9,54	18,8	55,7	1402	-
	(6)	1,021	1,11	1,25	1,42	1,64	1,92	2,29	2,79	3,49	4,50	6,02	8,46	12,6
	(7)	1,026	1,42	1,32	1,56	1,87	2,30	2,91	3,82	5,22	7,54	11,7	19,8	37,9
	(8)	1,032	1,18	1,43	1,76	2,24	2,97	4,11	6,03	9,54	16,7	33,5	81,8	267

Из численных данных следует, что при $0 \le \varphi \le 0,45$ расхождение между парными зависимостями (1) и (6), (2) и (7), (3) и (8) не превышает 5 %. Отсюда можно прийти к выводу, что конкретные расчетные зависимости (1) ÷ (3) и (6) ÷ (8), полученные на основе различных физико-математических моделей, при соответствующем подборе величин эмпирических коэффициентов, приводят к практически одинаковым результатам. Из выражений (6) ÷ (8) следует, что, при объемной доле частиц $\varphi \le 0,9066$, ни одна из этих зависимостей не стремится к бесконечности, что представляется физически более достоверным, в сравнении с тем, что по зависимости (3) при $\varphi \to 0,56$ $\varphi \to \infty$.

Приведенные в литературе опытные данные, например относительная эффективная вязкость $\bar{\mu} = \mu_p / \mu_f$, определяемая как отношение вязкости двухфазной смеси μ_p к вязкости дисперсионной среды μ_f, для однородных сфер при объемной концентрации равной $\varphi = 0,4$, составляют 7,4 и 16,0 [2], то есть различаются более чем в два раза, без какого либо комментария о физических причинах такого расхождения опытных данных. В работе [3] для тех же сферических частиц величина $\bar{\mu}$ равна 6,2, то есть расхождение с приведенным выше максимальным значением величины $\bar{\mu}$ составляет более чем 2,5 раза. Обсуждаемые теоретические модели содержат, как минимум, одну постоянную, подбираемую из условия наилучшего соответствия между теоретическими и опытными данными. При таком разбросе опытных данных, возникает представление, что сам процесс совместного движения частиц монодисперсного состава в действительности является движением частиц полидисперсного состава.

Так, например, в работе [4] экспериментально исследуется скорость осаждения монодисперсных твердых частиц, причем, фактическое отношение диаметров частиц (максимального к минимальному) в мономодальной фракции, изменялось в пределах от 1,17 до 2,34. Поэтому, можно ожидать, что скорости стесненного осаждения внутри одной фракции, определенной по среднему диаметру, будут различаться несколько меньше, чем скорости свободного осаждения частиц, которые будучи пропорциональны квадрату диаметра частиц, должны различаться в 1,18 и 2,79 раза, соответственно.

Поскольку различия в значениях эффективной динамической вязкости двухфазных смесей при постоянном значении объемной концентрации твердой фазы φ весьма значительны, то представления о том, что они целиком определяются максимальной объемной концентрацией φ_m для фактического гранулометрического состава твердой фазы, представляется физически некорректным, поскольку связь величины φ_m с фактически полимодальным гранулометрическим составом твердой фазы не определена. В общем случае, можно ожидать, что динамическая вязкость двухфазной смеси при постоянном значении объемной концентрации твердой фазы φ зависит от гранулометрического состава твердой фазы. Рассмотрим предельный случай, когда различия в размерах частиц так велико, что жидкость и частицы мелкой фракции образуют единую несущую среду для частиц более крупной фракции. В соответствии с этим положением, эффективная вязкость суспензии, образованной частицами мелкой фракции с объемной долей φ_1, рассчитывается по формуле:

$$\ell n\bar{\mu}_{p1} = 2,054\varphi_1 / (1-0,856\varphi). \tag{9}$$

При записи последнего выражения учитывается, что для мелких частиц величина объемной доли свободной жидкости равна $(1-0,856\varphi)$, в соответствии с эмпирической зависимостью (6).

Относительная вязкость суспензии образованной частицами крупной фракции с объемной долей φ_2, рассчитываемой по формуле (9), в дисперсионной среде образованной мелкими частицами с вязкостью $\bar{\mu}_{p1}$, с учетом того, что для крупных частиц величина объемной доли свободной дисперсионной среды, образованной мелкими частицами и жидкостью, равна $(1-0,856\varphi_2)$. С учетом этого вязкость является эффективной динамической вязкостью двухфазной смеси, по отношению к крупным частицам и поверхностям, ограничивающим объем, в котором находится двухфазная смесь, получим:

$$\ell n\bar{\mu}_{p2} = \{[2,054\varphi_1 / (1-0,856\varphi)] + [2,054\varphi_2 / (1-0,856\varphi_2)]\}. \tag{10}$$

В таблице 2 представлены результаты расчетов по формуле (10) для бимодальной смеси твердых частиц при варьировании объемных долей частиц двух видов крупности.

Из данных, представленных в таблице 2, следует, что, например, при $\varphi = 0,6$ по сравнению с монодисперсной двухфазной смесью различия в эффективной вязкости бимодальной двухфазной смеси в зависимости от распределения частиц по крупности может изменяться более чем в 1,5 раза.

Аналогичные выкладки могут быть выполнены и для полимодальной смеси. В этом случае выражение для эффективной вязкости полимодальной двухфазной смеси, с учетом того что $\varphi_0 = 0$, принимает вид:

$$\ell n\mu_{pn} = 2,054\sum_{i}^{n}\varphi_i / [1-0,856(\varphi - \sum_{k=i-1}^{i-1}\varphi_k)], \tag{11}$$

Таблица 2.

	φ	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
φ_1	0	1,11	1,25	1,64	2,29	3,49	6,02	8,45	12,6
	0,1φ	1,11	1,25	1,63	2,23	3,30	5,38	7,23	10,1
	0,3φ	1,11	1,25	1,61	2,17	3,10	4,78	6,17	8,22
	0,5φ	1,11	1,25	1,60	2,16	3,07	4,72	6,09	8,13
	0,7φ	1,11	1,25	1,61	2,18	3,16	5,00	6,61	9,12
	0,9φ	1,11	1,25	1,63	2,25	3,35	5,62	7,69	11,1
	φ	1,11	1,25	1,64	2,29	3,49	6,02	8,45	12,6

Выполним уточнение развиваемой модели расчета эффективной вязкости двухфазной смеси, а именно, примем во внимание то, что при движении фактическая скорость обтекания частиц жидкостью, с учетом стесненности течения жидкости в межчастичном пространстве, выше скорости натекания потока жидкости в лобовой точке частицы. В случае бимодальной смеси значения поправочной функции f равно [5]:

$$f = \{[1-\pi(6\varphi_1/\pi)^{2/3}/4][1-\pi(6\varphi_2/\pi)^{2/3}/4]\}^{-1/2}. \qquad (12)$$

Примем также, что возрастание производной скорости по поперечной координате равно величине f. Потери на перемещение сферической частицы при ламинарном режиме обтекания, в соответствии с формулой Стокса, пропорциональны произведению вязкости среды на скорость движения частицы. В действительности эти два фактора, стесненность потока жидкости в межчастичном пространстве и рост потерь энергии на диссипацию за счет изменения вязкости среды, сочетаются. В данной работе фактор стесненности движения жидкости относится только к расчету скорости обтекания частицы, поскольку использовалась эмпирическая зависимость эффективной вязкости от объемного содержания твердой фазы, которая автоматически учитывает увеличение потерь энергии на диссипацию за счет изменения вязкости среды, в сравнении с однородной жидкостью. С учетом этих соображений, величина эффективная вязкость двухфазной среды определяется как произведение выражений (10) и (12).

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{p2} &= \{[1-\pi(6\varphi_1/\pi)^{2/3}/4][1-\pi(6\varphi_2/\pi)^{2/3}/4]\}^{-1/2}\times \\ &\times\exp\{[2,054\varphi_1/(1-0,856\varphi)]+[2,054\varphi_2/(1-0,856\varphi_2)]\},\end{aligned} \qquad (13)$$

В таблице 3 представлены результаты расчетов по формуле (13) для бимодальной смеси твердых частиц при варьировании объемных долей частиц двух видов крупности.

Таблица 3.

	φ	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
φ1	0	1,22	1,46	2,14	3,39	5,96	12,3	19,5	33,7
	0,1φ	1,23	1,48	2,17	3,38	5,72	10,9	16,1	25,2
	0,3φ	1,24	1,49	2,17	3,29	5,31	9,32	12,9	18,5
	0,5φ	1,24	1,49	2,17	3,27	5,23	9,07	12,5	17,8
	0,7φ	1,24	1,49	2,17	3,31	5,41	9,75	13,8	20,5
	0,9φ	1,23	1,48	2,18	3,40	5,81	11,4	17,2	27,7
	φ	1,22	1,46	2,14	3,39	5,95	12,3	19,5	33,7

Из данных представленных в таблице 3 следует, что принятый способ учета стесненности потока жидкости в межчастичном пространстве расширяет диапазон значений относительной эффективной вязкости двухфазной среды и почти полностью охватывает область экспериментальных значений, задаваемых зависимостями (1) ÷ (3) или (6) ÷ (8). Расхождение между минимальным и максимальным значениями эффективной вязкости близко к 2, то есть рассчитанные значения полностью находятся внутри области экспериментальных значений относительной эффективной вязкости двухфазных смесей.

Оценим влияние формы и ориентации частиц на величину относительной вязкости. Как было показано, например в [5], при анализе движения частиц произвольной формы целесообразно использование эквивалентного относительного диаметра частиц (аналога коэффициента сферичности частиц), определяемого по формуле:

$$\theta_i = (2d_{si} + d_{mi})/(3d_{vi}), \qquad (14)$$

где: d_{si}, d_{mi} и d_{mi} – эквивалентные диаметры сферических частиц, определенные по площади боковой поверхности, миделевому сечения и объему частицы. Для сферической частицы $\theta = 1$.

Выражение для эффективной вязкости бимодальной смеси примет вид:

$$\bar{\mu}_{p2} = \{[1-\pi(6\varphi_1/\pi)^{2/3}/4][1-\pi(6\varphi_2/\pi)^{2/3}/4]\}^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\{[2,054\varphi_1\theta_1/(1-0,856\varphi)]+[2,054\varphi_2\theta_2/(1-0,856\varphi_2)]\}, \quad (15)$$

Для оценки влияния формы частиц на величину относительной вязкости рассмотрим пространственную ориентацию вытянутого и сплющенного эллипсоидов вращения. Используя выражения, приведенные в [5], получим значения эквивалентного относительного диаметра частиц: для удлиненных (иглообразных) частиц при отношении полуосей эллипсоида вращения $(a/b=1\div1000)$; а для сжатых (дискообразных) частиц, при $(b/a=1\div0,001)$. Значения эквивалентного относительного диаметра приведены в таблице 4. Величины θ_1 относятся к случаю ориентации частицы вдоль наибольшей полуоси эллипсоида или вдоль наименьшей полуоси эллипсоида. Величины θ_2 относятся к случаю поперечной ориентации частиц, по отношению к наибольшей полуоси эллипсоида иглообразных частиц или к наименьшей полуоси эллипсоида дискообразных частиц.

Таблица 4.

Иглообразные частицы										
a/b	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1000
θ_1	1	0,956	0,974	1,024	1,097	1,225	1,345	1,486	1,797	1,901
θ_2	1	1,066	1,215	1,359	1,523	1,774	1,991	2,235	2,504	2,922
Дискообразные частицы										
b/a	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
θ_1	1	1,118	1,413	1,749	2,190	2,966	3,736	4,706	6,387	8,047
θ_2	1	0,995	1,098	1,258	1,488	1,912	2,343	2,895	3,860	4,8195

Таблица 5.

Иглообразные частицы и дискообразные частицы									
$\theta_1=0,956; \theta_2=1,118$									
φ		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
φ_1	0	1,23	1,44	2,27	3,73	6,90	15,3	25,1	45,4
	0,5	1,25	1,50	2,20	3,35	5,39	9,41	13,0	18,5
	1	1,21	1,53	2,10	3,26	5,63	11,4	17,7	30,1
Дискообразные частицы и иглообразные частицы									
$\theta_1=1,118; \theta_2=0,956$									
φ_1	0	1,21	1,44	2,10	3,26	5,63	11,4	17,7	30,1
	0,5	1,25	1,50	2,21	3,38	5,51	9,80	13,7	19,9
	1	1,22	1,59	2,27	3,73	6,90	15,3	25,1	45,4
Иглообразные частицы и дискообразные частицы									
$\theta_1=1,024; \theta_2=1,749$									
φ_1	0	1,32	1,72	3,11	6,30	15,2	47,3	96,4	224,7
	0,5	1,30	1,62	2,58	4,31	7,59	15,1	22,2	34,1
	1	1,22	1,46	2,17	3,45	6,13	12,9	20,5	35,8
Дискообразные частицы и иглообразные частицы									
$\theta_1=1,749; \theta_2=1,024$									
φ_1	0	1,22	1,46	2,17	3,45	6,13	12,9	20,5	35,8
	0,5	1,29	1,63	2,63	4,50	8,45	18,0	28,2	46,8
	1	1,32	1,72	3,11	6,30	15,2	47,3	96,4	224,7

Из данных представленных в таблице 3, следует, что принятый способ учета стесненности потока жидкости в межчастичном пространстве, расширяет диапазон значений относительной эффективной вязкости двухфазной среды, и почти полностью охватывает область экспериментальных значений, задаваемых зависимостями (1) ÷ (3) или (6) ÷ (8). Расхождение между минимальным и максимальным значениями эффективной вязкости близко к 2, то есть рассчитанные значения полностью находятся внутри области экспериментальных значений относительной эффективной вязкости двухфазных смесей.

В таблице 5 приведены расчеты позволяющие оценить суммарное влияние гранулометрического состава, стесненности течения жидкости в межчастичном пространстве и пространственной ориентации удлиненных эллипсоидальных частиц $(a/b \geq 1)$ и сжатых эллипсоидальных частиц $(b/a \leq 1)$ на относительную эффективную вязкость двухфазной смеси при ориентации частицы вдоль наибольшей полуоси эллипсоида или вдоль наименьшей полуоси эллипсоида, соответственно.

Если вместо зависимости (6) использовать зависимость (7), то для тех же условий, которые использовались выше, расчетные значения эффективной динамической вязкости двухфазной смеси приведены в таблице 6.

Таблица 6.

Иглообразные частицы и дискообразные частицы									
$\theta_1 = 0,956; \theta_2 = 1,118$									
φ		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,55	0,6
φ_1	0	1,27	1,59	2,63	4,88	10,8	31,9	64,7	155,4
	0,5	1,28	1,59	2,51	4,19	7,67	16,1	25,1	42,1
	1	1,24	1,53	2,40	4,17	8,49	22,2	41,7	91,1
Дискообразные частицы и иглообразные частицы									
$\theta_1 = 1,118; \theta_2 = 0,956$									
φ_1	0	1,14	1,52	2,38	4,11	8,28	21,4	39,9	86,3
	0,5	1,28	1,59	2,52	4,26	7,94	17,2	27,6	47,8
	1	1,27	1,60	2,66	4,98	11,1	33,3	68,2	165,6
Иглообразные частицы и дискообразные частицы									
$\theta_1 = 1,024; \theta_2 = 1,749$									
φ_1	0	1,38	1,90	3,91	9,59	39,7	150,4	425,5	1539
	0,5	1,34	1,75	3,06	5,75	12,1	29,7	50,7	93,8
	1	1,26	1,56	2,51	4,49	9,52	26,4	51,3	117,0
Дискообразные частицы и иглообразные частицы									
$\theta_1 = 1,749; \theta_2 = 1,024$									
φ_1	0	1,25	1,55	2,48	4,42	9,27	25,3	48,9	110,4
	0,5	1,34	1,76	3,14	6,18	14,1	40,0	76,5	164,6
	1	1,39	1,91	3,98	9,88	32,1	160,8	461,5	1700

Данные представленные в таблицах 2, 3, 5 и 6 последовательно демонстрируют влияние дисперсности гранулометрического состава частиц, стесненность условий течения жидкости в межчастичном пространстве, формы и ориентацию частиц в пространстве относительно направления движения частиц. Последние две серии расчетов выполнялись для бимодальной смеси твердых частиц. Проведенные расчетные оценки показывают, что при постоянном значении объемной доли твердых частиц в двухфазной смеси величина её эффективной динамической вязкости сильно зависит от конкретных характеристик твердых частиц – её гранулометрического состава и формы частиц и, в зависимости от этих величин, может различаться в десятки процентов и достигать кратных значений. Область расчетных значений эффективной динамической вязкости полностью охватывают область экспериментальных значений. Отсутствие или неполнота данных о рассмотренных характеристиках дисперсной фазы не позволяет проводить сравнения опытных и расчетных данных по скоростям осаждения, без дополнительных предположений, о значениях этих характеристик твердых дисперсных частиц, что затрудняет проведение сравнительных расчетов по скоростям осаждения (всплытия) твердых частиц и движения взвесенесущих потоков. При выполнении данного анализа предполагалось, что абсолютные линейные размеры частиц не влияют на эффективную динамическую вязкость двухфазной смеси, а их влияние учитывается при записи уравнения движения частиц и контактного взаимодействия между частицами различных классов [7].

Полученные соотношения позволяют оценить влияние различных факторов на величину эффективной вязкости двухфазных смесей.

Литература

1. Жданов В.Г., Старков В.М. Определение эффективной вязкости концентрированных суспензий // Коллоидный журн. Т. 60. № 6. 1998. С. 771-774.
2. Хаппель Д., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 631 с.
3. Бэтчелор Д. Влияние броуновского движения на среднее напряжение в суспензии сферических частиц. Механика. Новое в зарубежной науке. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях. Вып. 22. М.: Мир. 1980. с. 124-153.
4. Higginbotham G.H., Oliver D.R., Ward S.G. Studies of the viscosity and sedimentation of suspensions Part 4. – Capillary-tube viscometry applied to stable suspensions of spherical particles // British Journal of Applied Physics. 1958. V. 9. № 9. p. 372-377.
5. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. Скорость стесненного осаждения бимодальной смеси сферических частиц в ньютоновской жидкости // Теорет. основ. хим. технол.. 2006. Т. 40. № 4. С. 417-423.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. М.: Наука. 1974. 480 с.
7. Кондратьев А.С. Осаждение полимодальных твердых частиц в ньютоновских жидкостях. М.: Спутник +. 2014. 121 с.