Обобщенное уравнение релятивистской квантовой механики

к.т.н. доц. Кецарис А.А., к.т.н. доц. Калпина Н.Ю.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23 доб. 1312, 1149

Аннотация. В статье выводится обобщенное уравнение релятивистской квантовой механики из уравнений структуры алгебры Клиффорда. Показано, что уравнение относится к двум частицам, одна из которых является безмассовой. Отсюда полученное уравнение рассматривается как относящееся к лептонам одного поколения.

Ключевые слова: *уравнение релятивистской квантовой механики, уравнение Дирака, алгебра Клиффорда, структурные постоянные алгебры, структурные матрицы, уравнение структуры.*

Введение

В [1] было показано, что квантовые явления могут быть объяснены алгебраической структурой пространства фундаментальной физической величины – действия, а задача на собственные значения дифференциального оператора физической величины является следствием алгебраического закона умножения векторов действия. Отсюда следует, что уравнения квантовой механики могут быть получены из уравнений структуры алгебры действия, но при этом необходимо конкретизировать эту алгебру. В настоящей работе алгебра действия отождествляется с алгеброй Клиффорда. Для удобства изложения мы будем использовать следующие обозначения для индексов. Индексы, обозначаемые большими латинскими буквами без цифры внизу, например A , B , I , K , принимают значения:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124)\,.$$

Те же индексы, но с цифрой 1 внизу (например, A_1, B_1, I_1, K_1) принимают значения:

$$(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123)\,.$$

В этих обозначениях $C^{IK}{}_{L}$, $C^{L}{}_{KI}$ есть точные структурные матрицы контравариантной и ковариантной алгебр Клиффорда. Соответственно

$$C^{I_1K_1}{}_{L_1}\,,\ C^{L_1}{}_{K_1I_1}$$

есть структурные матрицы тех же алгебр в первом сжатом представлении.

Отметим, что первое сжатое представление соответствует теории Дирака, второе сжатое представление соответствует теории Паули, а третье сжатое представление соответствует теории Шредингера. И чем выше сжатие, тем менее точно представлены структурные матрицы алгебры Клиффорда. После указанных замечаний перейдем к уравнению Дирака. Оно будет основополагающим для нашего исследования. В принятых нами обозначениях уравнение Дирака запишется следующим образом:

$$(C^{mK_1}{}_{L_1}\partial_m + \frac{m_e c}{\hbar}\cdot C^{0K_1}{}_{L_1})\cdot\psi^{L_1} = 0\,.$$

Итак, уравнение Дирака использует неточные, соответствующие первому сжатию структурные матрицы. Отсюда возникает естественное стремление переписать уравнение Дирака для точных структурных матриц. Но тогда мы должны перейти от волновой функции ψ^{L_1} к волновой функции ψ^{L}, имеющей в два раза больше компонент. И дополнительным компонентам необходимо дать соответствующую интерпретацию. В [2] было высказано предположение о том, что можно попытаться дополнительные компоненты волновой функции использовать для описания электронного нейтрино, а всю волновую функцию отнести к двум частицам первого поколения – электрону и электронному нейтрино. Далее мы рассмотрим обобщенное уравнение релятивистской квантовой механики, соответствующее переходу к точным структурным матрицам и вернемся к этому предположению.

Обобщенное уравнение релятивистской квантовой механики

Обобщить уравнение Дирака можно было бы формально, записав в нем точные структурные матрицы алгебры Клиффорда. Однако такой подход может привести к ошибке, так как переход от сжатого представления к точному есть переход от частного к общему и может быть не однозначным. Поэтому мы поступим иначе и воспользуемся самыми общими соотношениями, предназначенными для описания квантовых явлений, –квантовыми постулатами. А именно воспользуемся соотношением (11) из [1], записав его в следующем виде:

$$\partial_M \psi^L = \frac{1}{\hbar} \cdot \tilde{N}^L{}_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K . \qquad (1)$$

Далее придадим этому соотношению форму уравнения Дирака. Для этого умножим его обе части на структурные константы $C^{MN}{}_L$. Получим:

$$C^{MN}{}_L \cdot \partial_M \psi^L = \frac{1}{\hbar} C^{MN}{}_L \cdot C^L{}_{KI} \cdot p^I_M \cdot \psi^K . \qquad (2)$$

(Как принято, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.)

С нашей точки зрения это уравнение и есть уравнение релятивистской квантовой механики в самом общем виде. Отталкиваясь от него, будем искать обобщение уравнения Дирака на точные структурные матрицы. Для этого поставим следующий вопрос. При каких условиях уравнение (2) сводится к уравнению Дирака? Во-первых, дифференцирование в левой части уравнения должно выполняться только по координатам образующего пространства и волновая функция должна зависеть от этих координат. Во-вторых, структурные матрицы должны быть записаны в первом сжатом представлении. С учетом этих двух обстоятельств уравнение (2) принимает вид:

$$C^{mN_1}{}_{L_1} \cdot \partial_m \psi^{L_1}(x) = \frac{1}{\hbar} C^{MN_1}{}_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_1 I} \cdot p^I_M \cdot \psi^{K_1} .$$

И третье условие выглядит так:

$$C^{MN_1}{}_{L_1} \cdot C^{L_1}{}_{K_1 I} \cdot p^I_M = -m \cdot c \cdot \delta^{N_1}{}_{K_1} .$$

Это условие может быть выполнено только в одном случае, если структурные матрицы являются символами Кронеккера. Среди матриц $C^{MN_1}{}_{L_1}$ только матрица $C^{0N_1}{}_{L_1}$ удовлетворяет этому условию. Среди матриц $C^{L_1}{}_{K_1 I}$ этому условию удовлетворяют две матрицы:

$$C^{L_1}{}_{K_1 0} ,\ C^{L_1}{}_{K_1 34} .$$

В результате мы получаем, что третье условие сводится к следующему:

$$p^0_0 + p^{34}_0 = -m \cdot c .$$

Это соотношение не представляет собой нечто неожиданное. Из СТО следует, что $p^0_0 = -m \cdot c$. Поэтому полученное условие нужно рассматривать как уточнение СТО. Далее мы будем полагать:

$$p^0_0 = p^{34}_0 = -\frac{m \cdot c}{2} .$$

Подтверждением этого соотношения будет полученный результат.

На основании приведенных соображений уравнение Дирака можно записать следующим образом:

$$C^{mN_1}{}_{L_1} \cdot \partial_m \psi^{L_1}(x) + \frac{m \cdot c}{2\hbar} (C^{N_1}{}_{K_1 0} + C^{N_1}{}_{K_1 34}) \cdot \psi^{K_1} = 0 .$$

И теперь, переходя от приближенных структурных матриц первого сжатия к точным матрицам, получим искомое обобщение уравнения Дирака:

$$C^{mN}{}_{L} \cdot \partial_m \psi^L(x) + \frac{m \cdot c}{2\hbar}(C^N{}_{K0} + C^N{}_{K34}) \cdot \psi^K(x) = 0 . \quad (3)$$

Здесь также $C^N{}_{K0} = \delta^N{}_K$ в отличие от $C^N{}_{K34}$.

Для действительного регулярного представления алгебры Клиффорда компоненты волновой функции ψ^K представляют собой шестнадцать действительных функций. В комплексном представлении волновая функция содержит восемь комплексных компонент вида:

$$\begin{aligned} &\Psi^{32} = i \cdot \psi^{32} + \psi^{13}, && \Psi^{0} = i \cdot \psi^{21} + \psi^{0}, \\ &\Psi^{14} = i \cdot \psi^{42} + \psi^{14}, && \Psi^{34} = i \cdot \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ &\Psi^{2} = i \cdot \psi^{1} + \psi^{2}, && \Psi^{123} = i \cdot \psi^{3} + \psi^{123}, \\ &\Psi^{234} = i \cdot \psi^{134} + \psi^{234}, && \Psi^{124} = i \cdot \psi^{4} + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (4)$$

И в кватернионном представлении компонентами волновой функции являются четыре кватерниона вида:

$$\begin{aligned} \Psi^{0} &= a \cdot I \cdot \psi^{32} + b \cdot I \cdot \psi^{13} + i \cdot \psi^{21} + \psi^{0}, \\ \Psi^{34} &= a \cdot I \cdot \psi^{42} + b \cdot I \cdot \psi^{14} + i \cdot \psi^{1324} + \psi^{34}, \\ \Psi^{123} &= a \cdot I \cdot \psi^{1} + b \cdot I \cdot \psi^{2} + i \cdot \psi^{3} + \psi^{123}, \\ \Psi^{124} &= a \cdot I \cdot \psi^{134} + b \cdot I \cdot \psi^{234} + i \cdot \psi^{4} + \psi^{124}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведем обобщенное уравнение квантовой механики по отношению к кватернионным компонентам:

$$\begin{aligned} i \cdot \partial_4 \Psi^{124} + i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \Psi^{123} &= \frac{m \cdot c}{2\hbar}(\psi^0 + \psi^{34}), \\ i \cdot \partial_4 \Psi^{123} + i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \Psi^{124} &= \frac{m \cdot c}{2\hbar}(\psi^0 + \psi^{34}), \\ i \cdot \partial_4 \Psi^{34} - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \Psi^{0} &= \frac{m \cdot c}{2\hbar}(\psi^{123} + \psi^{124}), \\ i \cdot \partial_4 \Psi^{0} - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \Psi^{34} &= \frac{m \cdot c}{2\hbar}(\psi^{123} + \psi^{124}). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь необходимо выяснить назначение компонент волновой функции, число которых в два раза больше, чем в теории Дирака. Для этого обратимся к *стандартному* представлению уравнения квантовой механики.

Стандартное представление

Сначала напомним, как записывается уравнение Дирака в стандартном представлении. А затем применим тот же прием к полученному нами обобщенному уравнению квантовой механики. Воспользуемся уравнением Дирака в кватернионном представлении, приведенном в [0]:

$$\begin{aligned} i \cdot \partial_4 \Psi^{123} + i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \Psi^{123} &= \frac{m \cdot c}{\hbar} \psi^{0}, \\ i \cdot \partial_4 \Psi^{0} - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \Psi^{0} &= \frac{m \cdot c}{\hbar} \psi^{123}. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем эти уравнения следующим образом: сначала сложим первое уравнение со вторым, а затем вычтем из первого второе. Получим:

$$\begin{aligned} i \cdot \partial_4 \varphi_1 - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \varphi_2 &= \frac{m \cdot c}{\hbar} \varphi_1, \\ -i \cdot \partial_4 \varphi_2 + i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \varphi_1 &= \frac{m \cdot c}{\hbar} \varphi_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где: $\varphi_1 = \psi^0 + \psi^{123}$ и $\varphi_2 = \psi^0 - \psi^{123}$.

Такая запись уравнения Дирака называется стандартным представлением. Оно особенно удобно для перехода к второму сжатому представлению, то есть к теории Паули, когда $\psi^{123} \to \psi^0$ и второе уравнение становится тривиальным. Действительно, выполняя замену:

$$\Psi \to \Psi \cdot \exp\left(-i\frac{m \cdot c}{\hbar}t\right),\ \varphi \to \varphi \cdot \exp\left(-i\frac{m \cdot c}{\hbar}t\right),$$

получим:

$$i \cdot \partial_4 \varphi_1 - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \varphi_2 = 0,$$

$$i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \varphi_1 = \frac{2 \cdot m \cdot c}{\hbar}\varphi_2.$$

Откуда следует уравнение Паули:

$$i \cdot \partial_4 \varphi_1 + \frac{\hbar}{2 \cdot m \cdot c} \cdot g^{ab} \partial^2_{ab} \varphi_1 = 0.$$

Далее воспользуемся аналогичным приемом для обобщенного уравнения квантовой механики. Полученную форму записи обобщенного уравнения также будем называть стандартным представлением.

Стандартное представление обобщенного уравнения

Преобразуем уравнения (6) следующим образом: сначала сложим первое уравнение со вторым, а третье с четвертым. Получим:

$$\begin{gathered} i \cdot \partial_4 \varphi_2 + i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \varphi_2 = \frac{m \cdot c}{\hbar}\varphi_1, \\ i \cdot \partial_4 \varphi_1 - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \varphi_1 = \frac{m \cdot c}{\hbar}\varphi_2, \end{gathered} \tag{9}$$

где: $\varphi_1 = \psi^0 + \psi^{34}$ и $\varphi_2 = \psi^{123} + \psi^{124}$.

Затем, вычтем из четвертого третье, а из второго уравнения первое. Получим:

$$\begin{gathered} i \cdot \partial_4 \chi_2 + i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \chi_2 = 0, \\ i \cdot \partial_4 \chi_1 - i \cdot \sigma^a \cdot \partial_a \chi_1 = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где: $\chi_1 = \psi^{123} - \psi^{124}$ и $\chi_2 = \psi^0 - \psi^{34}$.

Таким образом, система из четырех уравнений преобразуется в две системы из двух уравнений. Одна из систем представляет уравнение Дирака для частицы с массой, отличной от нуля, а другая представляет уравнение Дирака для частицы с массой, равной нулю. Отсюда вытекает следующая интерпретация компонент волновой функции.

Компоненты волновой функции и лептоны

В этом разделе дадим интерпретацию компонентам $\varphi_1 = \psi^0 + \psi^{34}$, $\varphi_1 = \psi^0 + \psi^{34}$, $\chi_1 = \psi^{123} - \psi^{124}$, $\chi_2 = \psi^0 - \psi^{34}$ волновой функции как волновым функциям разных частиц.

Наша интерпретация опирается на следующие соображения. Полученные уравнения релятивистской квантовой механики можно представить в виде двух систем уравнений, каждая из которых относится к двухкомпонентной волновой функции. Независимость указанных двух систем уравнений друг от друга позволяет отнести эти системы уравнений к разным частицам. Причем одна из этих частиц имеет массу, отличную от нуля, а другая имеет массу, равную нулю. При переходе от обобщенных уравнений (5) к уравнениям Дирака, когда составляющие кватернионные компоненты ψ^{34} и ψ^{124} приравниваются ψ^0 и ψ^{123} соответственно, компонента ψ^0 переходит в *левую* компоненту волновой функции Дирака, а компонента ψ^{123} переходит в *правую* компоненту волновой функции Дирака.

Указанные обстоятельства позволяют представить ситуацию следующим образом.

Полученные уравнения релятивистской квантовой механики относятся к двум частицам, волновые функции которых имеют две компоненты. Этими частицами являются лептоны одного поколения. То есть, частицы одной из пар: электрон и его нейтрино, мюон и его нейтрино, τ-лептон и его нейтрино. В нашем случае нейтрино рассматривается как двухкомпонентная частица. Компоненты волновых функций лептонов второго и третьего поколений отличаются от вышеприведенных циклической перестановкой пространственных индексов.

Выводы

Квантовые явления могут быть объяснены алгебраической структурой пространства фундаментальной физической величины – действия, а задача на собственные значения дифференциального оператора физической величины является следствием алгебраического закона умножения векторов действия. Отсюда следует, что уравнения квантовой механики могут быть получены из уравнений структуры алгебры действия, но при этом необходимо конкретизировать эту алгебру. В настоящей работе алгебра действия отождествляется с алгеброй Клиффорда. Это объясняется тем, что алгебра матриц Дирака также является алгеброй Клиффорда. В результате в работе выводится обобщенное уравнение квантовой механики в форме уравнения Дирака. При этом выведенное уравнение содержит следующие отличия от уравнения Дирака:

1) число компонент волновой функции в два раза больше, чем у волновой функции Дирака;
2) массовое слагаемое в правой части уравнения содержит слагаемое, пропорциональное матрице алгебры Клиффорда $C^{N}{}_{K34}$.

Далее в статье установлено, что указанные отличия означают, что обобщенное уравнение относится к двум частицам, причем одна из них безмассовая. А это, в свою очередь, означает, что обобщенное уравнение относится к лептонам одного поколения. Уравнения для лептонов второго и третьего поколений отличаются от приведенных в статье циклической перестановкой пространственных индексов.

Литература

1. Кецарис А.А. Действие как векторная алгебраическая величина. Известия МГТУ «МАМИ», 2013. №2(16), Серия 3.
2. Кецарис А.А. Основания математической физики. Ассоциация независимых издателей, 1997г., 280с.
3. D. Hestenes, A. Weingartshofer, The electron, new theory and experiment, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
4. D. Hestenes, G.Sobczyk, Clifford algebra in geometric calculus, Riedel Publishing Company, Dordrecht, 1984.