УДК 539.3

Решение задачи бифуркации цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении

д.т.н. проф. Охлопков Н.Л., Нигоматулин Ф.В.
Тверской государственный технический университет
8 (920) 696-49-95, Fedor.nigomatulin@mail.ru
8 (4822) 52-63-63, kafsm@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача бифуркации тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с учетом сложного характера деформирования в момент потери устойчивости при пропорциональном докритическом нагружении осевой сжимающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина $Э^{(3)}$. Связь напряжений и деформаций принята в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности. Для определяющих функций пластичности использованы несколько вариантов аппроксимаций, предложенных В.Г. Зубчаниновым[1].

Ключевые слова: *пластичность, устойчивость, сложное нагружение, оболочка.*

Решение задачи строится на основе теории устойчивости неупругих систем В.Г. Зубчанинова [1]. Используется условие несжимаемости материала и условие однородности напряженного состояния в оболочке до момента потери устойчивости. Задача решается в геометрически линейной постановке.

Уравнения связи напряжений и деформаций в момент потери устойчивости оболочки принимаем в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности, которые в скоростях принимают вид [2]:

$$\dot{S}_{ij} = N\dot{Э}_{ij} + (\sigma' - N\tau)\dot{S}\frac{S_{ij}}{\sigma}, (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где: $\sigma' = d\sigma / dS = P\tau$; $\tau = \cos\vartheta_1$; $Э_{ij} = e_{ij}$; S_{ij} – компоненты тензора-девиатора напряжений;

$Э_{ij}$ – компоненты тензора-девиатора деформаций,

σ – модуль вектора напряжений;

$d\sigma / dS$, N – определяющие функции пластичности;

ϑ_1 – угол сближения ($\cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1$);

S – длина дуги траектории деформации.

Символ с точкой наверху означает дифференцирование по обобщенному параметру времени $d / dt = d / dS \cdot dS / dt$.

Зависимость $\sigma = \Phi(Э) = \Phi(S)$ полагаем универсальной для простого нагружения.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента цилиндрической оболочки, потерявшей устойчивость, и уравнения совместности деформаций имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{T}_{11}}{\partial X_1} + \dfrac{\partial \dot{T}_{12}}{\partial X_2} = 0, \quad \dfrac{\partial \dot{T}_{22}}{\partial X_2} + \dfrac{\partial \dot{T}_{12}}{\partial X_1} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \dot{M}_{11}}{\partial X_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 \dot{M}_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} + \dfrac{\partial^2 \dot{M}_{22}}{\partial X_2^2} + T_{11}\dot{\chi}_{11} + T_{22}\dot{\chi}_{22} + 2T_{12}\dot{\chi}_{12} + \dfrac{1}{R}\dot{T}_{22} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{11}}{\partial X_2^2} + \dfrac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{22}}{\partial X_1^2} - 2\dfrac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = -\dfrac{1}{R}\cdot\dfrac{\partial^2 \dot{W}}{\partial X_1^2}, \end{cases} \tag{2}$$

где: $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – скорости деформирования срединной поверхности, $\dot{\chi}_{ij}$ – скорости изменения кривизны и кручения срединной поверхности, W – функция прогибов оболочки.

Первые два уравнения системы (3) будут удовлетворены, если положить:

$$\dot{T}_{11} = Eh\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_2^2}, \quad \dot{T}_{22} = Eh\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2}, \quad \dot{T}_{12} = -Eh\frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1 \partial X_2}, \tag{3}$$

где: φ – функция скоростей усилий, E – модуль Юнга, h – толщина оболочки.

Решение основных уравнений задачи представляем в виде рядов Фурье

$$\begin{cases} \dot{W} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{1}{R}(\lambda_m X_1 - nX_2) \\ \varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{1}{R}(\lambda_m X_1 - nX_2), \lambda_m = \dfrac{m\pi R}{L} \end{cases}, \tag{4}$$

где: m, n – целые числа, определяющие число полуволн в направлениях X_1, X_2 соответственно (X_1 – в направлении образующей, X_2 – в окружном направлении), L – длина рабочей зоны оболочки, R – радиус срединной поверхности.

Оболочку принимаем «длинной», шарнирно подкрепленной по торцам. В уравнениях (4) сохраняем по одному члену ряда [1].

В результате, окончательно получаем систему алгебраических уравнений задачи о собственных числах [1]:

$$\begin{aligned} & i^2\frac{\sigma}{Eg_1}\left[-K_* - \frac{EN_1^*}{2\sigma v\lambda_m^2}\right] + i\frac{3N_1^*\varPhi^*}{2g_1 v}K_*S_* = \lambda_m^2\left[\left(1+r^2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{g_2}{g_1}\right)K_*^2 + \frac{9N_1^*\varPhi^{*2}}{8g_1 v}K_*^2S_*^2\right], \\ & cv = \frac{N_1^*}{2\lambda_m^2} - \frac{3}{4}\frac{N_1^*\varPhi^*}{i}K_*S_*, \\ & v = (1+r^2)^2 - \frac{3}{2}(1-\frac{N_1^*}{P_1^*})S_*^2, \end{aligned} \tag{5}$$

где: $i = 3R/h$ – гибкость оболочки.

$$S_* = S_{11}^*r^2 + S_{22} + 2\sigma_{12}^*r, \quad K_* = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*r^2 - 2\sigma_{12}^*r,$$

$$\varPhi^* = \frac{P_2^*}{P_1^*} - \frac{N_2^*}{N_1^*}, \quad \varPhi = \frac{h}{2}\varPhi^*, \quad g_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{2}(N_3^* - \frac{N_2^{*2}}{N_1^*}), \quad g_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}(P_3^* - \frac{P_2^{*2}}{P_1^*}), \quad D = \frac{Eh^3}{9}, \quad Z_p^* = \frac{2Z}{h}. \tag{6}$$

Интегралы принимают вид:

$$2GP_m^* = \int\limits_{-1}^{1} Pz^{*m-1}dz^*, 2GN_m^* = \int\limits_{-1}^{1} Nz^{*m-1}dz^*. \tag{7}$$

Полагаем, что в зоне пластической догрузки $\vartheta_1 = 0^0(\tau = 1)$, в зоне упругой разгрузки $\vartheta_1 = 180^0(\tau = -1)$ и зона разгрузки примыкает к границе $z_p^* = -1$, где $z_p^* = 2z/h$. Для определяющих функций пластичности N и $d\sigma/dS$ принимаем аппроксимации предложенные В.Г. Зубчаниновым [1].

$$N = 2G(1-\omega) \quad 0 \le \vartheta_1 \le \pi, \quad P = 2G(1-\lambda) \quad 0 \le \vartheta_1 \le \frac{\pi}{2}, \quad P = 2G \quad \frac{\pi}{2} \le \vartheta_1 \le \pi, \tag{8}$$

где: G – модуль сдвига, ω – параметр пластичности А.А. Ильющина, λ – параметр разупрочнения.

Разбивая в (7) интегрирование по зонам и полагая, что зона разгрузки примыкает к поверхности $z_p^* = -1$, получим:

$$N_m^* = \frac{1}{m}[1-(-1)^m - \omega(1-z_p^{*m})],$$
$$P_m^* = \frac{1}{m}[1-(-1)^m - \lambda(1-z_p^{*m})],\ (m=1,2,3). \tag{9}$$

Для вычисления координаты границы раздела зон z_p^* имеем уравнения [1]:

$$f_1 = 2CS_* iK_*^{-1};\ f_1 = P_1^* Z_p^* - P_2^*. \tag{10}$$

При использовании модифицированной теории устойчивости А.А. Ильюшина [1] интегралы P_m^* рассчитываются по формуле (9), а для N_m^* имеем выражение [1]:

$$N_m^* = \frac{1}{m}[1-(-1)^m](1-\omega). \tag{11}$$

При расчете по модифицированной теории устойчивости В.Г. Зубчанинова имеем систему алгебраических уравнений [1]:

$$\begin{aligned} & i^2 \frac{\sigma}{Eg_2}\left[-K_* - \frac{EP_1^*}{2\sigma v\lambda_m^2}\right] = \lambda_m^2\left(1+r^2\right)^2 \\ & cv = \frac{P_1^*}{2\lambda_m^2} \\ & v = (1+r^2)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Интегралы P_m^* рассчитываются по формуле (9).

Решение бифуркационной задачи позволяет для заданной комбинации полуволн m, n вычислить критическую гибкость оболочки i в зависимости от значения модуля вектора напряжений σ в момент потери устойчивости.

Рассматриваются траектории пропорционального докритического деформирования оболочки осевой сжимающей силой, крутящим моментом и внутренним давлением в девиаторном пространстве деформаций А.А. Ильюшина $Э^{(3)}$ (рисунок 1).

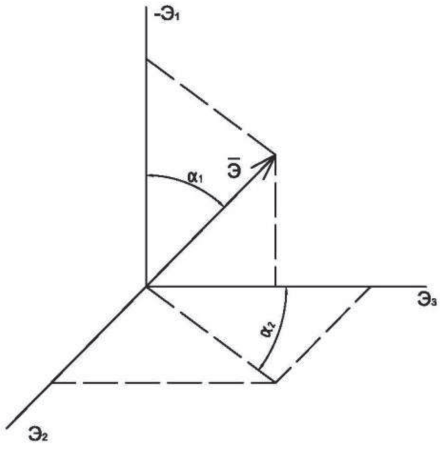

Рисунок 1. Траектории деформирования

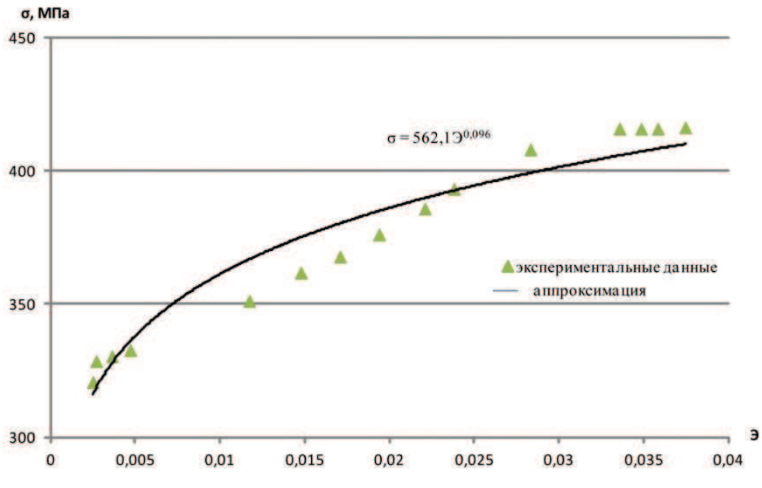

Рисунок 2. Аппроксимация диаграммы деформирования стали 9Х2

В качестве материала оболочек принимаем сталь 9Х2 [3]. Диаграмма деформирования материала при осевом сжатии и ее аппроксимация в зоне упруго пластических деформаций представлены на рисунке 2.

В работах [4, 5] показано, что для процессов пропорционального нагружения, реализуемых в плоскости $Э_1 - Э_3$ (при сжатии и закручивании оболочки) расчеты по теории устойчивости А.А. Ильюшина, с учетом разгрузки материала, [1] позволяют, для ряда конструкционых сталей, получить физически достоверные результаты. Предположительно, для данных процессов можно использовать и более простые аппроксимации определяющих функций пластичности, что сделано в настоящей работе.

Расчеты выполнены для нескольких траекторий пропорционального нагружения оболочки в плоскости $Э_1$ - $Э_3$. На рисунках 3, 4, 5 представлены кривые наименьших гибкостей, построенные как огибающие кривых устойчивости, построенные при различных комбинациях полуволн m,n.

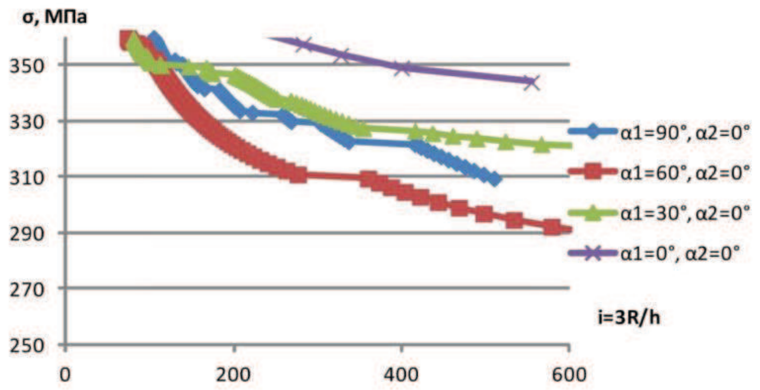

Рисунок 3. Огибающие кривых устойчивости полученные по модифицированной теории устойчивости А.А.Ильюшина

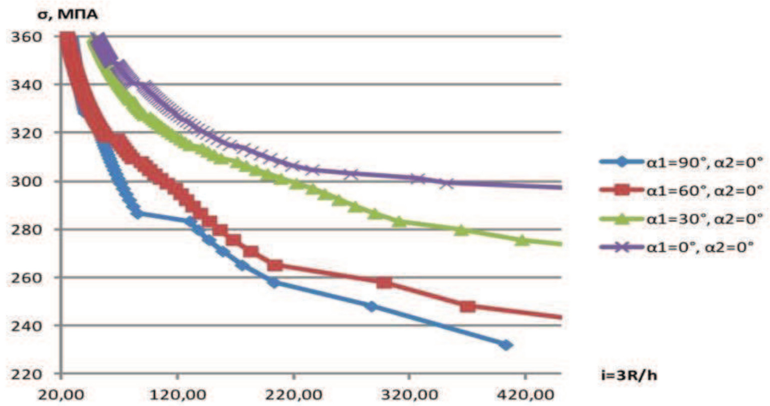

Рисунок 4. Огибающие кривых устойчивости полученные по модифицированной теории устойчивости В.Г.Зубчанинова

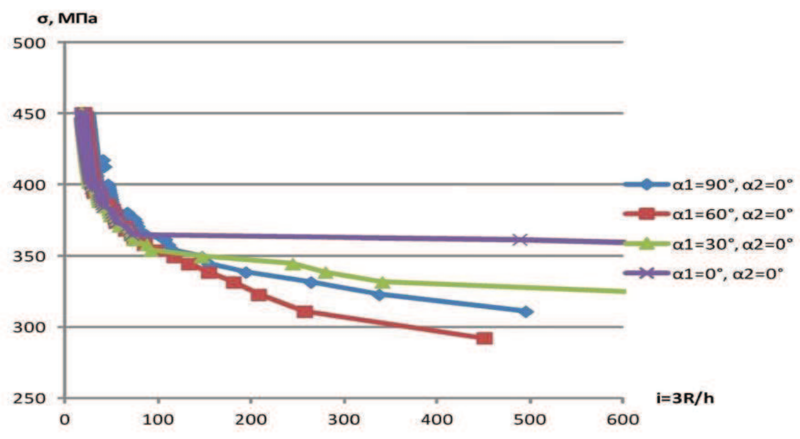

Рисунок 5. Огибающие кривых устойчивости полученные по теории устойчивости А.А.Ильюшина

На рисунках 6, 7, 8, 9 кривая 1 соответствует модифицированной теории устойчивости А.А. Ильюшина, кривая 2 – модифицированной теории устойчивости В.Г. Зубчанинова, кривая 3 – теории устойчивости А.А. Ильюшина.

Анализ полученных результатов показал, что из рассмотренных вариантов решения наименьшие значения критических напряжений для оболочек реализуется в случае использования модифицированной теории устойчивости В.Г. Зубчанинова, что вполне ожидаемо. Расчеты по теории устойчивости А.А. Ильюшина и ее модифицированного варианта практически совпадают. Наименьшие значения критических напряжений реализуются в случае чистого кручения оболочки.

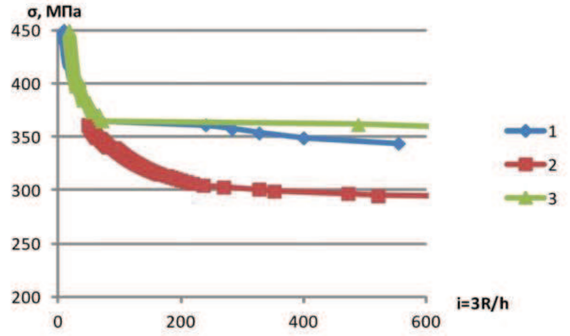

Рисунок 6. Огибающие кривых устойчивости при α_1=0 и α_2=0

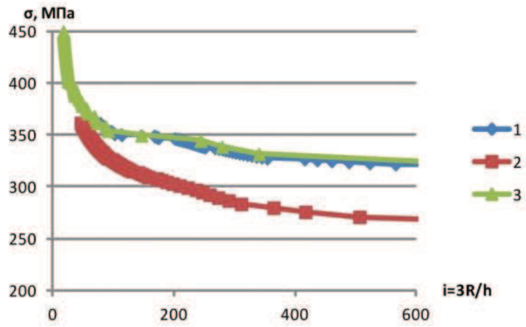

Рисунок 7. Огибающие кривых устойчивости при α_1=30 и α_2=0

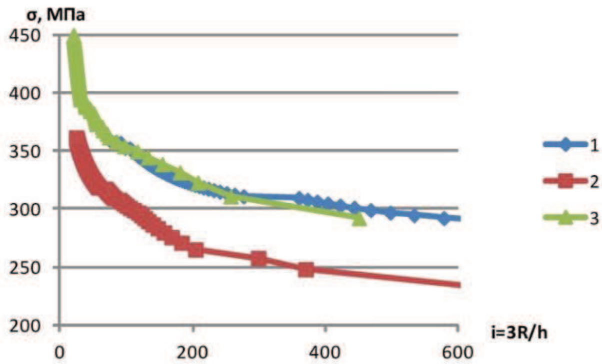

Рисунок 8. Огибающие кривых устойчивости при α_1=60 и α_2=0

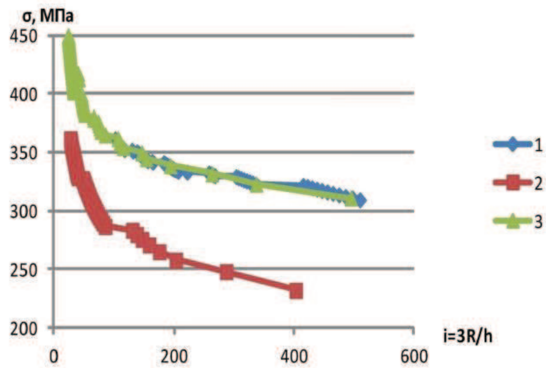

Рисунок 9. Огибающие кривых устойчивости при α_1=90 и α_2=0

Выполненные тестовые расчеты в дальнейшем будут распространены на спектр конструкционных сталей [3] и сопоставлены с результатами расчетов, полученных при использовании более сложных аппроксимаций определяющих функций пластичности [4, 5].

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 448 с.
2. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности: Монография / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
3. Зубчанинов В.Г. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гараников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
4. Охлопков Н.Л. О влиянии сложного характера деформирования в момент потери устойчивости на критические параметры напряжений круговой цилиндрической оболочки / С.А. Соколов, Н.Л. Охлопков // Вестник Тверского государственного технического университета: Научный журнал. – Тверь: ТГТУ, 2008. – Вып. 13. – С. 229-234.
5. Охлопков Н.Л. О предельных поверхностях критических напряжений и деформаций материала в решении задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки при простых процессах / Н.Л. Охлопков, С.В. Черемных // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. - Орел: ОрГТУ, 2012. – Вып. 5 (295). – С. 30-36.