Параметры подобия и моделирование флаттера цилиндрической оболочки

д.ф.-м.н. проф. Кийко И.А., к.ф.-м.н. доц. Показеев В.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, Университет машиностроения
8(495) 223-05-23, vm@mami.ru

Аннотация. Исследуются параметры подобия в задаче флаттера цилиндрической оболочки. В качестве математической теории оболочек принята техническая теория в смешанной форме. Для избыточного давления принимается либо формула поршневой теории, либо формула линеаризованной теории потенциального обтекания. Физические условия моделирования получены из равенства параметров подобия модельного и натурного процессов.

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, флаттер, параметры подобия, физическое моделирование.*

Исследование сверхзвукового флаттера упругой круговой цилиндрической оболочки ведутся давно и многими авторами; достижения на различных этапах развития прослеживаются по обзору [1], монографиям [2, 3], статье [4]. Все работы посвящены методам расчета критических параметров, среди которых основным является критическая скорость потока; ни в одной из работ не ставилась задача о параметрах подобия и правилах физического моделирования, другими словами – о теории эксперимента. В последние годы опубликованы работы [5-8] о моделировании флаттера упругих и вязкоупругих пластин. В них получен принципиально новый результат: в некоторых случаях оказалось возможным отказаться от полного геометрического подобия натурной и модельной пластин, т.е. установлено, что масштабы моделирования размеров в плане и по толщине могут быть различными.

В предлагаемой работе рассмотрена задача о флаттере упругой цилиндрической оболочки, обтекаемой внутренним или внешним сверхзвуковым потоком газа. В качестве математической теории оболочек принята техническая теория в смешанной форме [9]. Для избыточного давления использована либо линеаризованная теория потенциального обтекания (ЛПТ), либо поршневая теория (ПТ). Предложена упрощённая постановка. Определены безразмерные параметры подобия, их равенство в натурном и модельном процессах доставляет правила физического моделирования в рамках выбранной математической модели флаттера.

Уравнение колебаний оболочки

Оболочка в цилиндрической системе координат занимает область $S=\{(x,r,\theta)\,|\,r=R;$ $0\le\theta\le 2\pi; 0\le x\le \ell=\beta R\}$; она обтекается сверхзвуковым потоком газа (внутренним или внешним) с невозмущенными параметрами p_0, ρ_0, a_0, u_0 – соответственно давление, плотность, скорость звука, скорость потока. Уравнения технической теории в смешанной форме имеют вид:

$$D\Delta^2 w-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial\theta}=q,$$
$$\Delta^2 F+\frac{Eh}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{Eh}{R^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}\right)^2\right]=0. \quad (1)$$

Здесь w, F – функции прогибов и усилий, $D=Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость; E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, h – её толщина. Нормальное давление q представляет собой сумму трех слагаемых: статического давления p_0, силы инерции $-\rho h\partial^2 w/\partial t^2$ и избыточного давления p. По теории

ЛПТ для p имеем

$$p=-\rho_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=R}. \qquad (2)$$

Потенциал возмущенного потока подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-(M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{2M}{a_0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (3)$$

и граничному условию не проницания:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w}{\partial t}+u_0\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (4)$$

здесь $M=u_0/a_0>1$ – число Маха. По формуле ПТ для p полагаем:

$$p=-\frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u_0\frac{\partial w}{\partial x}\right). \qquad (5)$$

Здесь γ – показатель политропы газа. Приведем систему (1)-(5) к безразмерному виду. Координаты x, r отнесем к радиусу R, прогиб w – к толщине h, время – к $t_1=\beta R\sqrt{R}/(c_0\sqrt{h})$, $c_0^2=E/\rho$, функцию усилий – к $F_0=Eh^2R$, оставим за безразмерными величинами прежние обозначения; в результате из (1) получим систему:

$$\Delta^2 w-A_0\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}-A_1\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial\theta}=A_2-A_3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{12(1-\nu^2)R^4}{Eh^4}p,$$

$$\Delta^2 F+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_1'\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}\right)^2\right]=0. \qquad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$A_0=\frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2},\ A_1=\frac{12(1-\nu^2)R^2}{h},\ A_2=\frac{12(1-\nu^2)p_0R^4}{Eh^4},\ A_1'=\frac{h}{R},\ A_3=\frac{12(1-\nu^2)R}{\beta^2h}. \qquad (7)$$

В случае, когда p определяется по формуле ПТ (5), последнее слагаемое справа в первом уравнении (6) примет вид:

$$\frac{12(1-\nu^2)R^4}{Eh^4}p=-A_4\frac{\partial w}{\partial t}-A_5M\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (8)$$

в котором обозначено:

$$A_4=\frac{12(1-\nu^2)R^4}{Eh^4}p=-A_4\frac{\partial w}{\partial t}-A_5M\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (9)$$

Отнесем потенциал возмущения к $\varphi_1=Ra_0$, оставив для φ прежние обозначение, уравнение (3) запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-(M^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2MB_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}-B_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0, \qquad (10)$$

здесь обозначено:

$$B_0=c_0\sqrt{h}/(\beta a_0\sqrt{R}). \qquad (11)$$

Граничное условие (4) примет вид:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=1}=B_0\frac{h}{R}\frac{\partial w}{\partial t}+M\frac{h}{R}\frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (12)$$

Для слагаемого с избыточным давлением p в (6) получим в рамках ЛПТ:

$$\frac{12(1-\nu^2)R^4}{Eh^4}p=\left(-B_1\frac{\partial\varphi}{\partial t}-B_2M\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{r=1}. \tag{13}$$

Здесь введены дополнительные параметры:

$$B_1=\frac{12(1-\nu^2)a_0}{\beta c_0}\left(\frac{R}{h}\right)^{7/2},\quad B_2=\frac{12(1-\nu^2)a_0^2R^4}{h^4c_0^2}. \tag{14}$$

Параметры подобия

Представим себе два процесса – натурный и модельный; под модельным процессом будем подразумевать как правило, лабораторный или промышленный эксперимент. Запишем математическую модель флаттера (ПТ или ЛПТ) для натурного и модельного процессов; решение каждой задач зависит только от безразмерных коэффициентов, следовательно, если соответствующие коэффициенты равны, то решения тождественны (предполагается, что решения существуют и единственны, граничные условия принимаются однородными и не содержащими новых параметров). Это означает, что в соответствующие моменты времени во всех соответствующих точках натуры и модели все безразмерные величины, характеризующие процесс колебаний, равны между собой. Равенства коэффициентов называются условиями подобия, а следствия из них, при определенных дополнительных предположениях, – правилами моделирования или теорией эксперимента. Подчеркнем, что эти правила зависят от принятой математической модели явления. В дальнейшем всем параметрам модельного процесса присвоим индекс m, а параметрам натурного процесса – индекс n.

1. *Модель ПТ.* Уравнения (6)-(9) содержат следующие независимые параметры:

$$\chi_1=\frac{\alpha R^2}{h^2},\ \chi_2=\frac{\alpha R}{h},\ \chi_3=\frac{\alpha p_0\ell^4}{Eh^4},\ \chi_4=\frac{h}{R},\ \chi_5=\frac{\alpha R}{\beta^2 h},$$

$$\chi_6=\frac{\alpha\gamma p_0c_0}{\beta Eb_0}\left(\frac{R}{5}\right)^{5/2},\quad \chi_7=\frac{\alpha\gamma p_0R^3}{Eh^3}M,\quad \alpha=1-\nu^2.$$

Из равенств $\chi_s^m=\chi_s^n$ при $s=1,2,4$ с необходимостью следует $\alpha^m=\alpha^n$, т.е. равенство $\nu^m=\nu^n$, а также $h^m/h^n=R^m/R^n$. Из условия $\chi_5^m=\chi_5^n$ получаем $\beta^m=\beta^n$, а из равенства $\chi_3^m=\chi_3^n$ – соотношение:

$$\left(\frac{p_0}{E}\right)^m=\left(\frac{p_0}{E}\right)^n. \tag{15}$$

Оставшиеся условия $\chi_0^m=\chi_0^n$, $\chi_7^m=\chi_7^n$ приводят соответственно к равенствам (по умолчанию принимаем $\gamma^m=\gamma^n$):

$$\left(\frac{c_0}{a_0}\right)^m=\left(\frac{c_0}{a_0}\right)^n,\quad M^m=M^n. \tag{16}$$

Отношение скоростей звука a_0^n/a_0^m по теории одномерного потока выражается через отношение давлений $a_0^n/a_0^m=(p_0^m/p_0^n)^k$, $k=(\gamma-1)/(2\gamma)$, поэтому исключение a_0 из уравнений (15), (16) приводит к нетривиальному условию моделирования:

$$\frac{c_0^n}{c_0^m}=\left(\frac{E^m}{E^n}\right)^k. \tag{17}$$

Значения коэффициентов Пуассона конструкционных материалов и сплавов различаются незначительно, поэтому разность $|\alpha^m-\alpha^n|=|(\nu^2)^m-(\nu^2)^n|=|\nu^m-\nu^n|(\nu^m+\nu^n)$ не превышает нескольких процентов, поскольку $\nu^m+\nu^n<1$. Правила моделирования, основанные на равенствах (15)-(17) следует признать приближенными; строгое выполнение всех условий $\chi_s^m = \chi_s^n$ приводит к тривиальному случаю: оболочки геометрически подобны, сделаны из одного и того же материала, параметры потоков тождественны. Эксперимент в этом случае, по существу, сводится к проверке математической модели. Более интересен случай, когда натурные условия трудно воспроизвести в модельном процессе. Тогда формулы типа (15)-(17) дадут возможность предсказать (хотя и приближенно) поведение оболочки в натуре по измеренным величинам в эксперименте.

2. *Модель ЛПТ.* Из системы (6) и соотношений (10)-(14) выделяются безразмерные параметры, среди которых первые пять $\chi_s^m = \chi_s^n$ ($s = 1,2,...,5$) те же, что и в предыдущем пункте, остальные – новые:

$$\chi_6 = M,\ \chi_7 = \frac{c_0\sqrt{h}}{\beta a_0\sqrt{R}},\ \chi_8 = \frac{\alpha a_0}{\beta c_0}\left(\frac{R}{h}\right)^{7/2},\ \chi_9 = \frac{\alpha a_0^2 R^4}{c_0^2 h^4} M.$$

Анализ системы $\chi_s^m = \chi_s^n$ ($s = 1, 2, ..., 9$), аналогичный проделанному выше, приводит к выводу о том, что условия подобия и правила моделирования остаются теми же, что и в предыдущем пункте. Нам представляется, что основная роль в этом выводе принадлежит сложной нелинейной системе (6) уравнений колебаний оболочки.

Замечание. В граничные условия на торцах оболочки может входить коэффициент Пуассона; это, как отмечено выше, не скажется на результате.

Простейший вариант моделирования

В системе (1) сделаем максимальные упрощения. Во втором уравнении опустим квадратную скобку; в первом уравнении действие давления p_0 представим в форме осесимметричного безмоментного состояния [10], так что нелинейные слагаемые примут вид:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cong p_0 R\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \cong \frac{1}{2R^2} p_0 R\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}.$$

Вместо системы (1) получим:

$$\Delta^2 F + \frac{Eh}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,\ D\Delta^2 w - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - p_0 R\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2R^2} p_0 R\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = q. \tag{18}$$

Для избыточного давления примем формулу ПТ, поэтому q будет иметь вид:

$$q = -\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u_0\frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{19}$$

Приведем уравнения (18), с учетом выражения (19), к безразмерному виду по правилам, изложенным выше; примем дополнительно $w = W\exp(\omega t)$, $F = \Phi\exp(\omega t)$, где ω, t – введенные безразмерные параметры. Система (18) преобразуется к виду:

$$\Delta^2\Phi + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Delta^2 W - A_0\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - A_5'\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{2}A_5'\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2} + A_3\omega^2 W + A_5 MW + A_4\omega W = 0,$$

здесь введены обозначения:

$$A_0 = \frac{12(1-\nu^2)R^2}{h^2},\ A_3 = \frac{12(1-\nu^2)R}{\beta^2 h},\ A_5 = \gamma A_5'. \tag{20}$$

Коэффициенты A_4, A_5 определены в (9). Будем, как и ранее, полагать $\gamma^m = \gamma^n$, $\nu^m = \nu^n$; после этого из набора коэффициентов (20) выделим четыре безразмерных параметра подобия:

$$\chi_1 = \frac{R^2}{h^2},\ \chi_2 = \frac{R}{\beta^2 h}\omega^2\ ,\ \chi_3 = \frac{p_0 R^3}{E h^3} M,\ \chi_4 = \frac{p_0 c_0}{\beta E a_0}\left(\frac{R}{h}\right)^{5/2}\omega.$$

Запишем равенства $\chi_s^m = \chi_s^n$ и последовательно их проанализируем.

1. $\chi_1^m = \chi_1^n$, следовательно $(R/h)^m = (R/h)^n$, радиусы и толщины подобны.

2. $\chi_2^m = \chi_2^n$, с учетом предыдущего имеем $(\omega/\beta)^m = (\omega/\beta)^n$.

3. $\chi_3^m = \chi_3^n$, получим равенство $(p_0 M / E)^m = (p_0 M / E)^n$.

4. $\chi_4^m = \chi_4^n$, получим равенство $(p_0 c_0 / (E a_0))^m = (p_0 c_0 / (E a_0))^n$.

Анализ этих соотношений приводит к следующим правилам моделирования. Как видно, параметр β, определяющий длину оболочки $\ell = \beta R$, остается свободным, поэтому определим отношение $\beta^m / \beta^n = \beta_0$. Тогда из второго соотношения получим:

$$\omega^n = \beta_0 \omega^n. \tag{21}$$

Размерная (физическая) частота ω_1 связана с безразмерной ω соотношением $\omega = t_1 \omega_1$. С учетом (21) отсюда следует:

$$\omega_1^n = (k_0 c_0^n / c_0^m)\omega_1^m,\quad k_0 = R^m / R^n. \tag{22}$$

Из третьего равенства получаем:

$$M^m = \frac{p_0^n}{p_0^m}\cdot\frac{E^m}{E^n} M^n. \tag{23}$$

Четвертое равенство, с учетом соотношения $a_0^n / a_0^m = (p_0^m / p_0^n)^k$, приводит к правилу моделирования:

$$\left(\frac{p_0^m}{p_0^n}\right)^{k_1} = \frac{c_0^n}{c_0^m}\cdot\frac{E^m}{E^n},\qquad k_1 = k + 1 = \frac{3\gamma - 1}{2\gamma}. \tag{24}$$

При организации эксперимента предполагается, что в натурном процессе известны параметры материала и потока. В эксперименте (на модели) находятся значения критических параметров – ω^m и M^m, а затем эти значения пересчитываются для натурного объекта по предлагаемым соотношениям.

Один из вариантов моделирования (организации эксперимента) может быть таким. Задаются k_0, материал модели, предполагается также известными E^n, p_0^n, c_0^n; из (24) определяются параметры потока p_0^m, a_0^m, а из (23) – число M^m и скорость потока $u_0^m = M^m a_0^m$. Из формулы (22) находится частота колебаний натурной оболочки по измеренной в эксперименте частоте ω_1^m.

Заметим, что упрощенный (и приближенный!) вариант математической модели естественно доставляет более широкие возможности моделирования.

Выводы

Установлены критерии подобия натурного и модельного процессов в задаче о флаттере цилиндрической оболочки, предложены некоторые возможные параметры моделирования. Физические условия моделирования получены из равенства параметров подобия модельного и натурного процессов. Результаты работы могут оказаться полезными при организации экспериментальных исследований.

Литература

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела.

Итоги науки и техники. ВИНИТИ. 1978. Т. 11. С. 67-122.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз. 1961. 399 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М. Наука. 2006. 247 с.
4. Квачев К.В. Метод Ляпунова-Мовчана в одной задаче устойчивости колебаний цилиндрической оболочки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 2 (12). С. 57-66.
5. Кийко И.А., Показеев В.В., Кийко С.И. Подобие и моделирование процесса колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 3. С. 87-92.
6. Кийко И.А., Показеев В.В., Кийко С.И. Подобие и моделирование пластины в сверхзвуковом потоке газа // Вопросы машиностроения и автоматизации. 2011. № 4. С. 109-111.
7. Кийко И.А., Показеев В.В., Кийко С.И. Критерии подобия натурного и модельного процессов колебания пластины в сверхзвуковом потоке газа // В сб. Материалы конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула. 2011. Изд. ТулГУ. С. 127-128.
8. Показеев В.В., Кийко С.И. Параметры подобия и моделирования процессов колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа // Вестник Моск. ун-та. Сер. I. Матем. Механ. 2012. № 3. С. 39-45.
9. Григолюк.Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М. Наука. 1976. 359 с. 10. Александров В.М. Гришин С.А. Динамика конической оболочки при внутреннем сверхзвуковом потоке // ПММ. 1994. Т. 58. № 4. С. 123-132.