Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор)

к.ф.-м.н. доц. Коган Е.А., к.ф.-м.н. Юрченко А.А.
Университет машиностроения, Дипломатическая академия МИД РФ
8(495)223-05-23, kogan_ea@mail.ru, 89055470035, AYrCh@yandex.ru

Аннотация. Дан анализ современного состояния исследований, посвященных свободным и вынужденным нелинейным колебаниям трехслойных и многослойных тонких упругих пластин и оболочек при периодических воздействиях. Обсуждены различные подходы к решению нелинейных динамических уравнений слоистых пластин и оболочек, применяемые к рассматриваемому классу задач. Проанализированы влияние физико-механических, геометрических параметров, структуры пакета слоев, формы пластин в плане, граничных условий на характер нелинейных колебаний и вид амплитудно-частотных характеристик слоистых пластин и оболочек, а также имеющиеся экспериментальные результаты.

Ключевые слова: нелинейные колебания, трехслойные и многослойные пластины и оболочки, амплитудно-частотные характеристики.

Теория нелинейных колебаний начала развиваться с конца 19-го века в классических работах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова.

Особую актуальность приобрели эти работы с конца 20-х годов XX века в связи с развитием радиотехники. Существенный вклад в развитие нелинейной механики был внесен отечественной школой физиков и связан, прежде всего, с работами Л.И. Мандельштама, А.А. Андронова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др.

В отличие от линейных колебательных систем нелинейные колебания сопровождаются многими специфическими особенностям, например, не изохронностью колебаний (зависимостью периода свободных колебаний от амплитуды), возникновением колебательных режимов с частотами, отличными от частоты возмущающей силы и появлением субгармонических, ультра гармонических, так называемых внутренних резонансов. Возникают также различные периодические режимы колебаний с большими и малыми амплитудами при изменении частоты в определенных пределах. Реализация этих режимов зависит от начальных условий движения: с возрастанием частоты возмущающей силы амплитуда вынужденных колебаний растет до некоторого предельного значения, при котором происходит “срыв” амплитуды, и при дальнейшем росте частоты система колеблется уже с малыми амплитудами. Так как частоты гармоник и их амплитуды зависят от размаха колебаний, возникает необходимость построения амплитудно-частотных характеристик нелинейного колебательного процесса.

Постепенно в нелинейной механике сформировались два основных направления развития: первое связано с применением строгих топологических методов качественного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений; второе базируется на применении аналитических методов, позволяющих получать количественные результаты [1 - 3] и др.

Эти методы оказались весьма эффективными, в частности, при исследовании колебаний систем с малой нелинейностью при относительно малом затухании. Соответствующие оценки понятия малой нелинейности и величины малого затухания приведены, например, в монографии В.В. Болотина [4].

Для случая колебаний систем с малой нелинейностью в классической нелинейной механике разработано достаточно много точных и приближенных методов исследования: метод малого параметра, метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля), метод гармонического баланса, метод Крылова-Боголюбова и др. Применение этих методов в первом приближении дает одинаковые результаты, причем вполне достаточные для большинства технических приложений [2, 3, 5]. Целесообразность подхода, связанного с исследованием малых нелинейных колебаний в первом приближении, состоит в возможности получить аналитические решения для резонансных частот и амплитуд, позволяющие проводить качественный и количественный анализ явления.

В данном обзоре рассмотрение ограничивается анализом работ, посвященных нелинейным колебаниям тонких упругих кусочно неоднородных по толщине трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях.

Однородные однослойные пластины. В механике деформируемого твердого тела исследование нелинейных колебаний тонкостенных упругих элементов конструкций началось со второй половины 20-го века. Первые работы по колебаниям упругих однослойных пластин и пологих оболочек с большими амплитудами были выполнены Э.И. Григолюком [6, 7] в 1955 году, H.N. Chu и G. Herrmann'ом [8] в 1956 году, N. Yamaki [9], W. Nash'ем и J.R. Modeer [10]. В [7] в двучленном приближении было построено решение задачи о нелинейных колебаниях пологой цилиндрической панели. Получено выражение для периода собственных колебаний в виде полного эллиптического интеграла первого рода и для плоской прямоугольной панели приведены численные значения периода собственных колебаний в первом и во втором приближениях в зависимости от соотношения сторон панели.

Систематическое изложение различных задач нелинейной динамики однослойных пластин, панелей и пологих оболочек было дано в монографии А.С. Вольмира 1972 года [5]. В ней были приведены решения задач динамической устойчивости, нелинейных колебаний (собственных, вынужденных, параметрических), описываемых уравнениями Фёппля-Кармана для пластин и Маргерра для пологих оболочек. Решения получены, в основном, с использованием одночленной или (в некоторых случаях) двучленной аппроксимации прогиба и функции усилий и применением метода Бубнова-Папковича или метода конечных разностей. Как отмечается в обзоре [11], многие результаты и особенности поведения пластин и оболочек, описанные в этой монографии, были подтверждены экспериментально. Вместе с тем, более поздние исследования показали, что использованные в работе [5] модели могут быть недостаточны для описания таких нелинейных процессов в оболочках, которые сопровождаются взаимодействием изгибных форм колебаний и появлением бегущих волн в окружном и продольном направлениях [13 - 15].

Различные более поздние обзоры полученных теоретических и экспериментальных результатов по нелинейным колебаниям однослойных пластин и оболочек приведены, например, в [16, 13, 17, 18, 11, 19, 14].

Трехслойные пластины и оболочки. Работы по исследованию динамического поведения кусочно-неоднородных по толщине слоистых пластин и оболочек в геометрически нелинейной постановке начали появляться с начала 60-х годов XX века.

Отличительной особенностью расчета трехслойных конструкций с маложестким промежуточным средним слоем (заполнителем) является необходимость учета поперечных сдвигов и поперечных нормальных напряжений и деформаций в заполнителе.

Из-за сложности динамических нелинейных уравнений трехслойных и особенно многослойных пластин и оболочек, выполненных из композиционных материалов (и следовательно, ортотропных или анизотропных) почти исключительно решение их строится для случая малых нелинейных колебаний в первом приближении.

К числу первых работ по трехслойным пластинам и оболочкам относятся работы С.А. Амбарцумяна и В.Ц. Гнуни [20, 21], H.N. Chu [22, 23], Y.Y. Yu [24 - 26], А.И. Холода [27 - 29], Э.Н. Кваши [30, 31].

В [20, 21] для ортотропных трехслойных пластин прямоугольного очертания в плане, подверженных действию нормально приложенной нагрузки, выведено нелинейное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и получена в первом приближении зависимость между амплитудой и частотой нелинейных колебаний.

В развитие работы Y.Y. Yu [25], в которой дано приближенное решение задачи о нелинейных осесимметричных колебаниях замкнутой круговой цилиндрической трехслойной оболочки симметричного строения по толщине с легким несжимаемым заполнителем и мембранными внешними слоями, А.И. Холодом [28], при тех же деформационных гипотезах относительно заполнителя, рассмотрена задача о нелинейных поперечных колебаниях трехслойной цилиндрической шарнирно опертой панели симметричного строения по толщине с жестким заполнителем и моментными несущими слоями. Применялся метод Бубнова [32] с использованием одночленной аппроксимации искомых перемещений. Задача сведена к уравнению Дуффинга, для которого получено приближенное решение и показано, что нелинейная частота колебаний ниже линейной и существенно зависит от параметров пологости и тонкостенности панели. Приведено также сравнение приближенных вычислений нелинейной частоты с точным решением в эллиптических интегралах, которое показывает их хорошее совпадение.

Влияние деформаций поперечного сдвига на нелинейные колебания слоистых пластин и оболочек рассматривалось во многих работах [26, 31, 33, 34, 35, 36, 37] и др. Уже в ранней работе [26] отмечается, что влияние поперечного сдвига не является малым и должно учитываться при нелинейных колебаниях и исследовании динамической устойчивости свободно опёртых многослойных пластин и несомненно существенно для защемленных многослойных пластин.

Отметим здесь работу В.Г. Пискунова, Ю.М. Федоренко, А.Е. Степановой [33], в которой исследовались собственные и вынужденные колебания при внешней поперечной нагрузке вида $q = Q\cos\Omega t \sin\alpha x \sin\beta y$ (Ω – частота изменения внешней вынуждающей силы, Q – её амплитуда) без учета демпфирования шарнирно опертых прямоугольных пластин, составленных из произвольно расположенных по толщине слоев различной толщины и жесткости, на основе уточненной двумерной сдвиговой теории слоистых конструкций [38]. Численный анализ проведен для случая собственных нелинейных колебаний трехслойных пластин различной структуры по толщине: с двумя несущими слоями одинаковой толщины, с одним средним несущим слоем, двухслойных пластин. Варьировались также отношения модулей сдвига несущих слоев G_1 и заполнителя G_2 и относительная толщина заполнителя. Показано, что ориентация амплитудно-частотных характеристик трехслойных пластин относительно таковой для однослойной пластины существенно изменяется для пластин различной структуры по толщине. Для квадратных трехслойных пластин в зависимости от соотношения G_1 / G_2 получены оценки значений амплитуд, для которых необходимо учитывать влияние поперечного сдвига и нелинейности на частоты колебаний.

Учет влияния температуры на характер нелинейных колебаний трехслойных свободно опертых ортотропных пластин и прямоугольных в плане пологих оболочек с легким несжимаемым заполнителем выполнен H. Ohnabe [35]. Исходная система уравнений относительно прогибов, функции напряжений и перемещений, обусловленных поперечным сдвигом, получена с использованием вариационных принципов Гамильтона-Остроградского и Рейсснера-Хеллинджера и интегрировалась методом Бубнова в первом приближении. Приведены для ортотропных и изотропных квадратных в плане пластин и пологих оболочек (с одинаковыми радиусами кривизны) зависимости амплитуд от относительного периода нелинейных колебаний, которые оказываются существенно различными для нагретых и не нагретых пластин и оболочек.

Подробный анализ влияния геометрических и механических параметров (относительной толщины h/b, относительного удлинения пластин $\lambda = a/b$, жесткости заполнителя на сдвиг, собственной изгибной жесткости несущих слоев, параметра ε, характеризующего демпфирование при колебаниях, числа полуволн m и n), граничных условий на характер свободных и вынужденных нелинейных колебаний и вид амплитудно-частотных характеристик трехслойных прямоугольных пластин несимметричной структуры по толщине с жестким трансверсально изотропным заполнителем, податливым на поперечный сдвиг, и изотропными несущими слоями выполнен в работах [36, 37].

Вынужденные колебания таких пластин описываются уравнениями Григолюка-Чулкова [39], в которых учтены также начальные неправильности формы координатной поверхности, поперечные инерционные силы и внешнее демпфирование. Эта система уравнений 10 – го порядка в смешанной форме относительно разрешающих функций перемещений χ и усилий F, обобщающая уравнения однородных пластин Феппля-Кармана, имеет вид:

$$\nabla^2\nabla^2 F = Eh\left[\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]$$

$$D\left(1-\frac{\vartheta h^2}{\beta}\nabla^2\right)\nabla^2\nabla^2\chi - \left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} +$$

$$+2\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = q - \rho h\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(1-\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\right)\chi\,.$$

В уравнениях $\mathrm{w}(\mathrm{x}, y, t) = \overline{w}(x, y, t) + \mathrm{w}_0(x, y)$ – полный прогиб, $w_0(x, y)$ – начальный прогиб, характеризующий отклонение пластины от идеальной формы, $\overline{w}(x, y, t)$ – дополнительный прогиб, выражающийся через разрешающую функцию перемещений χ известным в теории трехслойных пластин соотношением: $\overline{w} = \left(1 - h^2\beta^{-1}\nabla^2\right)\chi$. Параметры, фигурирующие в уравнениях, указаны в работах [39, 37].

Уравнения для шарнирно опертых пластин интегрировались методом Бубнова-Папковича по пространственным координатам. Для защемленных пластин метод ортогонализации Бубнова применялся непосредственно к системе уравнений в смешанной форме.

В результате, для обоих вариантов граничных условий получено одно и то же по структуре нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания трехслойной пластины под действием внешней поперечной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону $q(x, y, t) = Q(x, y)\cos\Omega t$ и равномерно распределенной по поверхности пластины $(Q(x, y) = Q_0 = const)$:

$$\frac{d^2\overline{\chi}}{dt^2} + \varepsilon\frac{d\overline{\chi}}{dt} + \omega_{0,mn}^2\left(\alpha_1\overline{\chi}^3 + \alpha_2\overline{\chi}^2 + \alpha_3\overline{\chi}\right) = q_0(t)\,,$$

в котором $\omega_{0,mn}^2$ – квадрат частоты собственных малых колебаний трехслойной пластины.

Представление прогиба пластины в виде $\overline{\chi} = A\cos\Omega t$ и интегрирование уравнения по полному периоду колебаний позволяет получить уравнение, связывающее амплитуду колебаний A с относительной частотой нелинейных колебаний. Решение уравнения вынужденных нелинейных колебаний трехслойных гибких пластин с кубической упругой восстанавливающей силой и вязким трением при гармоническом возбуждении (при неучете начальных прогибов) получено также методом гармонического баланса, что дает удобный способ построения амплитудно-частотной характеристики.

Расчеты показывают, что во всей рассмотренной области изменения параметров трехслойные пластины имеют жесткую характеристику. Выявлены границы областей устойчивых периодических режимов колебаний в зависимости от параметров. Качественный характер влияния геометрических и жесткостных параметров на вид амплитудно-частотных характеристик защемленных по контуру трехслойных пластин остается таким же, как и при шарнирном опирании, но резонансные частоты при вынужденных колебаниях защемленных пластин достигаются при бóльших значениях амплитуд колебаний.

Круговые пластины. Колебания трехслойных круговых пластин исследовались в работах [40 – 44]. В [42] решение уравнений вынужденных колебаний круговых пластин под действием осесимметричной гармонической поперечной нагрузки строилось с использованием полиномиальной аппроксимации и итерационной процедуры. Оценено численно влияние структуры пластины на частоты колебаний.

Свободные и вынужденные нелинейные изгибные колебания трехслойных круговых пластин, защемленных по контуру, рассматривались в [40, 41]. В [41] численно проанализировано влияние структуры пластины и жесткости среднего слоя на частоты колебаний. В [40] рассматривались пластины с вязкоупругим заполнителем. Исследовано влияние геометрических и вязкоупругих характеристик слоев на частоты и формы поперечных колебаний.

Нелинейные колебания трехслойных вязкоупругих стержней и пластин изучались также в работах [45 - 48].

Многослойные пластины и оболочки. Особенности различных направлений в развитии теории и построении математических моделей многослойных пластин и оболочек подробно освещены в литературе [49 - 53] и др.

При исследовании нелинейных колебаний применяются два подхода: первый, используемый в большинстве работ, базируется на гипотезе о прямой недеформируемой нормали для всего пакета слоев, что позволяет свести расчет многослойной пластины или оболочки к расчету квазиоднородной с приведенными упругими параметрами [54 - 63, 46]; при втором, приводящем к так называемым неклассическим уточненным двумерным теориям, используются те или иные интегральные гипотезы для всего пакета слоев, учитывающие деформации и напряжения поперечного сдвига в слоях [25, 26, 64 - 68, 33, 34, 69, 63, 70 - 78].

К числу первых публикаций по многослойным пластинам и оболочкам следует отнести работы [25, 26, 79 - 81, 55, 56, 54, 57, 82].

В работах J.Bennett'a 1971 – 1972 годов [55, 56] исследованы свободные и вынужденные колебания свободно опертых по контуру прямоугольных слоистых пластин, армированных ортотропными слоями. С использованием метода Бубнова и метода гармонического баланса построены решения в первом приближении нелинейных уравнений и уравнений, полученных после применения гипотезы Бергера, приведены зависимости частотного параметра нелинейности от угла намотки слоев для трех типов композитов: графит эпоксидного, бор эпоксидного и стекло эпоксидного. Построено также решение задачи в двучленном приближении и исследована устойчивость полученного решения сведением к анализу областей неустойчивости уравнений типа Матье-Хилла. Численно оценено влияние угла армирования и высших форм колебаний на границы областей неустойчивости двухслойных и ортотропных слоистых пластин из различных композитов.

В более поздних работах [60 - 62] также использовался метод Бубнова, что приводило к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с кубической нелинейностью, которые интегрировались численно. В [61] построены амплитудно-частотные характеристики для случая собственных нелинейных колебаний шестислойной пластины несимметричного строения по толщине, в [60] – для анизотропных слоистых пластин из волокнистых композитов, в [62] – для слоистых пластин, находящихся на упругих основаниях типа Винклера и Пастернака.

В [59] рассматривались слоистые прямоугольные пластины с ортотропными слоями, ориентированными у каждого слоя под углами 0° и 90° относительно осей симметрии пластины. Использовалась гипотеза Кирхгоффа для всего пакета слоев. Приведены примеры расчета частоты нелинейных колебаний для двухслойной пластины с различной комбинацией материала слоев и ориентацией осей ортотропии.

Г.М. Куликовым и Ю.В. Кулешовым в [75] развит метод исследования свободных и вынужденных нелинейных колебаний многослойных трансверсально изотропных пластин со свободно смещающимися и с не смещающимися шарнирно опертыми краями на основе уравнений в смешанной форме многослойных пластин и оболочек типа Тимошенко, приведенных ранее в монографии [83]. Представлен общий вид скелетных кривых в зависимости от коэффициента, характеризующего неоднородность структуры слоистого пакета, а также амплитудно-частотных кривых для вынужденных недемпфированных колебаний под действием поперечной нагрузки, распределенной по поверхности пластины по синусоидальному закону. Получены приближенные формулы для определения резонансных частот и амплитуд.

В развитие работы [75] свободные и вынужденные колебания прямоугольной многослойной трансверсально – изотропной пластины с сосредоточенными массами, соединенными призматическим стержнем, ось которого перпендикулярна поверхности пластины, рассмотрены Ю.В. Кулешовым [72]. Одна из масс M_1 жестко закреплена на поверхности пластины в точке (x_0, y_0), а другая – m_1 сосредоточена на стержне (моделирующем обладающий распределенными инерционными и упругими свойствами амортизатор). Нелинейные уравнения колебаний описываются системой дифференциальных уравнений, полученных на основе уточненной теории многослойных пластин [83].

Интенсивность распределения поперечной нагрузки на пластину задается в виде:

$$q(x,y,t) = q_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + P\delta(x-x_0)(y-y_0),$$

где: $q_0 = const$, δ – функция Дирака, $P = \sigma(t)E_cF_c - M_1\dfrac{\partial^2 W(x_0,y_0,t)}{\partial t^2}$ – сила, передающаяся

от массы M_1 и стержня на пластину. σ – продольное напряжение в стержне, E_cF_c – жесткость стержня на растяжение.

Получено обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, учитывающее влияние на колебания пластины присоединенных масс и стержня, интегрирование которого методом Ритца позволило получить амплитудно-частотное и фазочастотное уравнения. Проанализированы эффекты динамического гашения колебаний за счет влияния масс и стержня в различных предельных случаях.

Колебания гибких защемлённых по контуру прямоугольных слоистых пластин и стержней рассматривались в работах [26, 80, 81, 45, 82, 57, 58, 63, 70, 84]. В работе И.М. Дидыченко [63] с использованием метода Бубнова получены аналитические зависимости для построения амплитудно-частотных характеристик для случаев, когда для всего пакета слоев справедливы гипотезы Кирхгоффа и интегрально учитывается поперечный сдвиг по всей толщине пакета слоев. На примере двух-, трех- и четырехслойных пластин проанализировано влияние изменения порядка расположения слоев по толщине на амплитуды и частоты собственных и вынужденных колебаний. Отмечается, что вид структуры по толщине существенно изменяет амплитудно-частотные характеристики.

Аналогичный вывод сделан Ю.М. Федоренко [70], которым в развитие работы [33] изучались собственные нелинейные колебания слоистых кусочно-неоднородных пластин, а также пластин, имеющих непрерывную неоднородность по толщине, на основе уточненной сдвиговой теории [38]. Получены оценки размеров областей, в которых необходимо учитывать деформации поперечного сдвига и геометрической нелинейности для свободно опертых и защемленных пластин.

Колебания с большой амплитудой трехслойных и многослойных пластин с учетом начальных неправильностей рассматривались в работах [67 - 69, 46, 36, 37].

В [67, 68] принималось параболическое распределение деформаций поперечного сдвига по толщине всего пакета слоев. Система пяти исходных дифференциальных уравнений преобразована к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, учитывающему квадратичные и кубические нелинейности, и с использованием одномодового подхода получено его точное решение и решение методом возмущений. Показано [68], что и при жестком, и при мягком типе нелинейности динамическое поведение пластин существенно зависит от начальных несовершенств.

Пластины сложной формы [58, 85, 86, 78]. Впервые колебания с большими амплитудами пластин разной формы на упругом винклеровском основании исследовались с использованием гипотезы Бергера в работе R.Sircar'а [58]. Для пластин в виде правильного треугольника и равнобедренной трапеции, жестко защемленных по контуру, определены периоды колебаний в зависимости от амплитуды и величины коэффициента постели.

В [85] рассмотрены вынужденные колебания слоистых косоармированных прямоугольных пластин, частично опертых по контуру.

Л.В. Курпа и Г.Н. Тимченко [86] рассматривали нелинейные колебания многослойных ортотропных пластин сложной формы на основе методов теории R – функций [87] и вариационных методов Ритца и Бубнова. При численных расчетах для свободных колебаний шестислойных прямоугольных пластин с различным числом прямоугольных вырезов дано сопоставление частот нелинейных и линейных колебаний в зависимости от размеров пластины в плане, глубины вырезов для шарнирно опертых и жестко защемленных по контуру пластин, а также оценено влияние глубины одного из вырезов на характер амплитудно-частотной характеристики.

В [78] методом конечных элементов исследованы нелинейные изгибные колебания скошенной слоистой композитной пластины симметричной структуры с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения.

Слоистые оболочки [25, 23, 27, 30, 31, 5, 91, 88, 89, 64 - 66, 11 - 15, 90, 69, 35, 18]. Свободные колебания пологих многослойных анизотропных цилиндрических панелей регулярной структуры с несущими слоями, для которых полагались справедливыми гипотезы Кирхгофа, и слоями связующего, податливыми на сдвиг, рассматривались в работе Б.А. Киладзе, И.Н. Преображенского, А.Ш. Цхведиани [66]. К уравнениям применялся принцип энергетической континуализации, в результате расчет многослойной оболочки приводится к расчету однослойной с приведенными упругими параметрами. Края панели считались свободно опертыми, причем по криволинейным кромкам приложены продольные усилия, а другие края смещаются свободно. Интегрирование уравнений колебаний сначала по пространственным координатам методом Бубнова-Папковича, а затем полученного обыкновенного дифференциального уравнения с кубической нелинейностью методом Бубнова по времени позволило получить нелинейные зависимости амплитуды колебаний от частоты.

Расчеты показывают, что амплитудно-частотная характеристика цилиндрических панелей при относительно малых амплитудах колебаний имеет характер «мягкой» нелинейности, а с ростом амплитуды-характеристика становится «жесткой». Оценено влияние продольных усилий p_x, приложенных по криволинейным кромкам, на поведение панели: с ростом амплитуды колебаний частоты сжатых панелей сначала уменьшаются до минимума и оказываются значительно меньше, чем при отсутствии сжимающих усилий, а затем возрастают так, что при достаточно больших амплитудах частоты колебаний сжатых панелей оказываются уже больше частот колебаний панелей, свободных от продольных усилий p_x.

Подробный параметрический анализ зависимости амплитудно-частотных характеристик многослойных шарнирно опертых оболочек регулярного строения, состоящих из чередующихся армирующих и связующих слоев, выполнен также в работах М.С. Герштейна и С.С. Халюка [64, 65]. Свободные колебания оболочек описывались функциями прогиба w и углов поворота нормали φ_x и φ_y, которые аппроксимировались выражениями:

$$w = f(t)\sin\alpha x\cos\beta y - \beta^2 (R/4) f^2(t)\sin^2\alpha x\,,\ \varphi_y = \psi(t)\sin\alpha x\sin\beta y\,,$$

$$\varphi_x = \Phi(t)\cos\alpha x\cos\beta y - \beta^2 (R^2/4)\Phi^2(t)\sin 2\alpha x\,,\ \alpha = (m\pi)/L\,,\ \beta = n/R\,,$$

где: m – число полуволн вдоль образующей оболочки, n – число волн по окружности.

Интегрирование исходных уравнений колебаний оболочки методом Бубнова-Папковича приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций времени, которые представлялись в виде $f(t) = A\cos\omega t$, $\Phi(t) = B\cos\omega t$, $\psi(t) = C\cos\omega t$. Проанализирована зависимость амплитудно-частотных характеристик пятислойных оболочек от отношения длины к радиусу L/R, от относительной толщины R/H, от жесткости материала связующего, коэффициента армирования, параметров волнообразования. Показано, что характер нелинейности оболочек меняется в зависимости от жесткости материала связующего. Нелинейные эффекты проявляются тем существенней, чем короче оболочки и чем меньше их относительная толщина. Полученные результаты хорошо согласуются с данными проведенного эксперимента.

В [69] приведены результаты расчета методом гармонического баланса частот свободных колебаний с большими амплитудами толстых слоистых композитных цилиндрических оболочек несимметричной структуры с учетом поперечных сдвигов и начальных несовершенств.

Приближенные решения на основе гипотезы Бергера [97,10, 80, 81, 55, 56, 58, 92 – 95, 89, 96, 74, 75]. Сложность интегрирования связанной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, какими являются уравнения Фёппля - Кармана для пластин или уравнения Маргерра для пологих оболочек, и тем более их обобщений на случай трехслойных и многослойных анизотропных пластин и оболочек, привела к появлению упрощенного подхода к решению нелинейных задач на основе гипотезы Бергера [97]. Согласно [97] в выражении для энергии деформации можно пренебречь вторым инвариантом тензора деформаций срединной поверхности $I = e_x e_y - \gamma_{xy}^2/4$ (здесь e_x, e_y – деформации срединной поверхности, γ_{xy} – её угол сдвига), не оказывающим существенного влияния на величину прогиба. Это позволяет получить систему двух несвязанных уравнений, одно из которых является линейным и просто интегрируется.

Приближенный анализ свободных колебаний при конечных амплитудах прямоугольных и круговых пластин на основе динамического аналога уравнений Бергера впервые выполнили W. Nash и J. Modeer в 1959 году [10].

На трехслойные пластины симметричного строения с мембранными внешними слоями уравнения Бергера были распространены N. Kamiya [91, 92], а уравнения трехслойных анизотропных пластин несимметричной структуры с жестким анизотропным заполнителем и моментными несущими слоями, а также уравнения трансверсально изотропных трехслойных пластин несимметричного строения на основе гипотезы ломаной линии и допущения Бергера были получены Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [94, 95]. Для последнего случая эти уравнения для случая свободных колебаний с учетом вязкого трения приводятся к линейному уравнению [74]:

$$\left(1-\frac{\vartheta h^2}{\beta}\nabla^2\right)\nabla^2\nabla^2\chi-\alpha^2\left(1-\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\right)\nabla^2\chi+\frac{\rho h}{D}\left(1-\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+2\varepsilon\frac{\rho h}{D}\frac{\partial}{\partial t}\left(1-\frac{h^2}{\beta}\nabla^2\right)\chi=0,$$

в котором постоянная α^2 определяется из соотношения:

$$\alpha^2=\frac{6}{abh^2\vartheta}\int_0^b\int_0^a\left\{\left(1-h^2\beta^{-1}\nabla^2\right)^2\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy;$$

$\vartheta, \beta, \rho h=\sum_{k=1}^{3}\rho_k h_k$ – параметры трехслойности, D – цилиндрическая жесткость трехслойного пакета.

В теории многослойных пластин гипотеза Бергера впервые была применена C.I. Wu и J.R. Vinson'ом [80]. В [80] для всего пакета слоев ортотропной пластины симметричного строения по толщине была использована гипотеза прямой линии и получены уравнения движения. На основе этих уравнений были рассмотрены нелинейные колебания слоистых ортотропных прямоугольных пластин для шести различных вариантов закрепления краев. Решение строилось методом Бубнова с использованием балочных функций. Для пластин с различным числом слоев при различных граничных условиях определены зависимости относительной амплитуды колебаний от отношения частот нелинейных и линейных колебаний. В работе B.M. Karmakar'a [93] сделан вывод о том, что использование гипотезы Бергера для оценки интегральных характеристик колебаний трехслойных пластин по сравнению с более точными уравнениями обеспечивает вполне приемлемую точность, особенно для квадратных пластин.

Г.М. Куликовым и Ю.В. Кулешовым в [74] рассмотрены нелинейные вынужденные колебания по цилиндрической поверхности длинной многослойной прямоугольной пластины несимметричного строения, составленной из трансверсально изотропных слоев, на основе гипотезы Бергера. При этом учтено демпфирование колебаний по линейной гипотезе и на основе концепции комплексного внутреннего трения. Использование одномодовой аппроксимации функции перемещений $\chi(x,t)=\chi_0 f(x)T(t)$ (здесь $f(x)$ – фундаментальная мода линейной задачи о свободных колебаниях длинной пластины) и метода Бубнова приводит к уравнению Дуффинга относительно временной составляющей $T(t)$, первое приближение решения которого позволяет получить уравнения амплитудно-частотной и амплитудно-фазово-частотной характеристик. Построены номограммы зависимостей резонансных амплитуд и частот от безразмерного параметра демпфирования ε_*, от жесткостного параметра η_3, характеризующего структуру пакета слоев, от параметра сдвига δ, от параметра нагрузки. Показано также, что при учете демпфирования на основе гипотезы комплексного внутреннего трения (при этом модули поперечного сдвига слоев предполагались комплексными: $G_k\left(1+i\left(\delta_k/\pi\right)\right)$) увеличение коэффициента затухания δ_k/π приводит к многократному снижению резонансных амплитуд и частот.

В [75] для многослойных пластин с шарнирно опертыми не смещающимися краями показано, что относительная разность амплитуд свободных колебаний, найденных по "точной" (по уравнению Дуффинга) и по приближенной теории, базирующейся на гипотезе Бергера, при принятых значениях параметров составляет около 8%.

Всесторонний анализ применения гипотезы Бергера к нелинейным задачам пластин и пологих оболочек, выполненный в работе Э.И. Григолюка и Г.М. Куликова [89], позволяет сделать вывод о том, что использование уравнений Бергера приводит к удовлетворительным результатам для интегральных характеристик колебаний. Но так как решение и в приближенной постановке Бергера и при использовании уравнений Фёппля-Кармана в подавляющем большинстве работ сводится к применению метода Бубнова в одночленной аппроксимации и приводит в обоих случаях к интегрированию нелинейного уравнения типа уравнения Дуффинга, то предпочтительно использовать решения на основе более точных уравнений.

Решения в высших приближениях [102, 55, 5, 99, 34, 69, 98, 100 - 101, 84, 71, 19, 77, 78, 48]. Исследование свободных нелинейных колебаний в высших приближениях неоднородных пластин и оболочек с переменными жесткостными характеристиками выполнено В.А. Крысько и А.Н. Куцемако в [19]. Исходные уравнения в смешанной форме после интегрирования методом Бубнова по пространственным координатам с использованием многочленной аппроксимации прогиба и функции усилий сводятся к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая интегрируется методом Рунге-Кутта с решением на каждом шаге системы алгебраических уравнений методом Гаусса. На основе предложенной методики спектрального анализа свободных колебаний построены амплитудно-частотные характеристики квадратных однородных пластин и оболочек и отмечается, что амплитуда первой гармоники во всех случаях, по крайней мере, на порядок больше амплитуд других гармоник, которые с ростом номера гармоники резко убывают.

С использованием двучленной тригонометрической аппроксимации прогиба методом

Бубнова исследовались нелинейные колебания ортотропных слоистых пластин с кратными частотами свободных колебаний (внутренний резонанс) в [96]. Получены амплитудно-частотные зависимости для пластин с различной структурой пакета и для различных граничных условий.

С учетом демпфирования нелинейные свободные колебания трехслойных прямоугольных свободно опертых пластин, для которых использовалась гипотеза ломаной линии, исследовались с помощью двойных тригонометрических рядов Фурье и интегрированием по времени полученной системы уравнений методом Рунге-Кутта в [99].

Вынужденные колебания с большой амплитудой слоистых прямоугольных композитных пластин симметричной структуры по толщине с учетом нелинейных деформаций сдвига в срединной плоскости пластин рассматривались методом конечных элементов в [71]. Получены амплитудно-частотные характеристики для различных коэффициентов, характеризующих нелинейный сдвиг, и углов армирования волокнами композитных пластин.

Конечно-элементная модель для исследования свободных нелинейных колебаний слоистых композитных пластин разработана в [34]. Принималось, что деформации поперечного сдвига распределены по толщине пластины по параболическому закону. Построены матрицы жесткости и масс для сформированного девяти узлового изопараметрического элемента с семью степенями свободы в каждом узле. Численное решение нелинейных уравнений строится итерационным методом. Исследовано влияние степени ортотропии, числа слоев, ориентации волокон, поперечного сдвига, соотношения геометрических размеров на собственные частоты.

В [100] методом конечных элементов (с использованием четырёхузловых прямоугольных конечных элементов с 14 степенями свободы) исследовано влияние граничных условий на частоты нелинейных изгибных колебаний «умеренно» толстых слоистых композитных пластин несимметричной структуры.

Многомодовая динамическая реакция слоистых композитных прямоугольных пластин в геометрически нелинейной постановке при гармоническом воздействии рассматривалась на основе совместного использования метода возмущений и метода Бубнова в работе [101].

На основе метода конечных элементов проведен многомодовый анализ свободных нелинейных колебаний композитных стержней и прямоугольных пластин в работе [84]. Исходная система нелинейных динамических уравнений преобразована к обобщенному уравнению типа Дуффинга, записанному в матричной форме, которое решалось численно методом Рунге-Кутта. Для основной и нескольких высших мод колебаний проведено сопоставление с точным решением, и оценено влияние конечно-элементной сетки на сходимость к точному решению. Построены фазовые портреты для изотропных и ортотропных шарнирно опертых и жестко защемленных стержней и квадратных восьмислойных пластин симметричной структуры из графито-эпоксидных материалов.

Экспериментальные исследования колебаний пластин и оболочек с большими амплитудами, сопоставление опытных данных с применяемыми расчетными моделями, а также анализ точности и областей применимости различных приближенных методов решения уравнений нелинейных колебаний выполнены в ряде работ [79, 45, 5, 103, 64, 65, 90, 11-15, 104] и др.

Результаты многолетних экспериментальных комплексных исследований колебаний и динамической устойчивости как с малыми, так и с конечными прогибами оболочек вращения из ориентированных стеклопластиков, выполнявшиеся в Институте механики НАН Украины, отражены в ряде монографий и обзоров, содержащих и обширную библиографию [11 - 15]. В них систематизированы экспериментальные исследования по изучению особенностей динамического деформирования стеклопластиковых оболочек при действии поперечных и осевых периодических нагрузок и нагрузок параметрического типа. Проанализированы амплитудно-частотные характеристики установившихся колебаний оболочек в зонах гармонических и параметрических резонансов, влияние начальных несовершенств оболочек, диссипативных свойств на их динамические характеристики. В частности, выявлено, что используемые обычно в расчетах для учета демпфирования гипотезы линейного трения, неадекватно отражают реальные процессы рассеяния энергии при колебаниях стеклопластиковых оболочек. Проанализировано влияние на вид амплитудно-частотных характеристик уровней виброперегрузок.

Проведенные экспериментальные исследования показывают, что во многих случаях исследование особенностей колебаний композитных оболочек при их периодическом возбуждении целесообразно проводить на основе анализа амплитудно-фазово-частотных характеристик перемещения или скоростей. Эти характеристики дают существенно больше информации о поведении данных оболочек в исследуемых частотных диапазонах по сравнению, например, с амплитудно-частотной или с фазово-частотной характеристиками и могут быть эффективно использованы для идентификации параметров натурных колебательных систем.

Выводы

Оценивая в целом современное состояние исследований в области нелинейных колебаний трехслойных и многослойных пластин и оболочек, следует отметить, что в большинстве работ рассматриваются малые нелинейные колебания на основе сведения исходных задач к дискретным моделям с одной, реже с двумя степенями свободы. Слабо или совсем не исследованы задачи о нелинейных колебаниях круговых и кольцевых пластин и пластин сложной формы, оболочек нецилиндрической формы, задачи о субгармоническом резонансе. Недостаточно изучены обнаруженные экспериментально сложные формы динамического деформирования слоистых цилиндрических оболочек, сопровождающиеся нежелательными волновыми процессами. В целом, рассматриваемая область механики нуждается в дальнейшем развитии.

Литература

1. Минорский Н. Современные направления в нелинейной механике. Проблемы механики. Сборник статей под редакцией Р. Мизеса, Т. Кармана. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955, С. 5 – 53.
2. Беллин А.И. Неавтономные системы. Проблемы механики. Сборник статей под редакцией Р. Мизеса, Т. Кармана. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955, С. 54 – 74.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. третье, испр. и доп. М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры . 1963.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1956.
5. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972, 432 с.
6. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней // Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 3, С. 33 – 68.
7. Григолюк Э.И. О колебаниях круговой цилиндрической панели, испытывающей конечные прогибы // Прикл. матем. и механика, 1955, т. 19, № 3, С. 376-382.
8. Chu H.N., Herrmann G. Influence of large amplitude on free flexural vibrations of rectangular elastic plates // Journ. Appl. Mechanics, 1956, v. 23, № 4, p. 532-540.
9. Yamaki N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates // Zeitschrift für angewandte Math. und Mech., 1961, Bd. 41, s. 501-510.
10. Nash W.A., Modeer J.R. Certain approximate analyses of the nonlinear behavior of plates and shallow shells // IUTAM, Proc. of the Symposium on the theory of thin elastic shells. Delft, 1959, Interscience, New York, 1960, p. 331-354.
11. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикл. механика, 1998, т.34, № 8, С. 3 – 31.
12. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Экспериментальное исследование колебаний и динамиче-

ской устойчивости оболочек из слоистых композитных материалов // Прикл. механика, 2009. т. 45(55), № 6, С. 53 – 79.
13. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев.: Наук. думка, 1984, 220 с.
14. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Лакиза В.Д. // Экспериментальный анализ нелинейных колебаний стеклопластиковых оболочек вращения. Динамика элементов конструкций / Под ред. В.Д.Кубенко. Киев.: «АСК», 1999, С. 298 – 313 (Механика композитов. В 12 т., т.9).
15. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек: Учеб пособие. Киев.: Выща школа, головное изд-во, 1989, 208 с.
16. Chia C.Y. Nonlinear analysis of plates. New York, McGraw – Hill, 1980.
17. Sathyamoorthy M. Nonlinear vibrations analysis of plates: a review and survey of current developments // Applied Mechanics Review, 1987, v.40, № 11, p. 1553 – 1561.
18. Yasuda Kimihiko. Review of research in Japan on nonlinear oscillations of elastic structures // ISME Int. Journ. C., 1996, v. 39, № 3, p. 439 – 449.
19. Крысько В.А., Куцемако А.Н. Устойчивость и колебания неоднородных оболочек. Саратов: Саратовск. гос. техн. ун – т, 1999. 202 с..
20. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок // Изв. АН СССР, ОТН. Механ. и машиностроение, 1961, № 3, С. 117-123.
21. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, Главная ред. физ.-матем. лит-ры, 1967, 268 с.
22. Chu H.N. Influence of transverse shear on nonlinear vibrations of sandwich beams with honeycomb cores // J. Aeronaut. Sci., 1961, v.28, p. 405-410; comment: ibid., 1962, v. 29, № 7, p. 886-888.
23. Chu H.N. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of a thin cylindrical sandwich shell // J. Aerospace Sci., 1962, v. 29, № 3, p. 376.
24. Yu Y.Y. Nonlinear flexural vibrations of sandwich plates // J. Acoust. Soc. America, 1962, v.34, № 9, part 1, p. 1176 – 1183.
25. Yu Y.Y. Application of variational equation of motion to the nonlinear vibration analysis of homogeneous and layered plates and shells // ASME – Paper, 62-WA-149, for meeting Nov. 25-30, 1962, 8 p.; J. Appl. Mech. 1963, v.30, № 1, p. 79-86. Русск. перевод: Ю.И.-юань. Применение вариационного уравнения движения к анализу нелинейных колебаний однородных и слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика, сер. Е, 1963, т. 30, № 1, С. 25.
26. Yu Yi-Yuan, Lai Jai-Liec. Influence of transverse shear and edge condition on nonlinear vibration and dynamic buckling of homogeneous and sandwich plates // Trans. ASME, 1966, v. E33, № 4, p. 934-936. Русск. перевод: Ю. И-юань, Лай Чже-лю. Влияние поперечного сдвига и граничных условий на нелинейные колебания и динамическую устойчивость однородных и многослойных пластин // Прикл. механика, сер. Е, 1966, т. 33, № 4, С. 242-244.
27. Холод А.И. Нелинейные поперечные колебания трехслойной цилиндрической панели // Прикл. механика, 1965, т. 1, № 6, С. 123-126.
28. Холод А.И. Нелинейные поперечные колебания трехслойных пластин // Изв. высш. учебн. заведений. Стр - во и архитект., 1965, № 6, С. 34 – 38.
29. Холод А.И. Свободные колебания трехслойных пластин несимметричного строения // Строительные конструкции (научные семинары по железобетонным конструкциям и сопротивлению материалов). Днепропетровское областное НТО строительной индустрии. ДИСИ. Днепропетровск, 1969, С. 185 – 191.
30. Кваша Э.Н. Нелинейные колебания трехслойных пластин и оболочек // Строительные конструкции (научные семинары по железобетонным конструкциям и сопротивлению материалов). Днепропетровское областное НТО строительной индустрии. Днепропет-

ровск: ДИСИ, 1969, С. 127-133.
31. Кваша Э.Н. Колебания нелинейно упругих трехслойных пластин и оболочек // В сб. 1-ая Респ. конференция молодых ученых по механике твердого деформируемого тела, 1969. Тезисы докладов. Киев, 1969, С. 45 – 46.
32. Григолюк Э.И. Метод Бубнова. Истоки. Формулировки. Развитие. М.: НИИ Механики МГУ, 1996, 58 с.
33. Пискунов В.Г., Федоренко Ю.М., Степанова А.Е. Решение задачи колебаний слоистых пластин в геометрически нелинейной постановке // Проблемы прочности, 1993, № 8, С. 47-52.
34. Tenneti R., Chandrashekhara K. Large amplitude flexural vibration of laminated plates using a higher order shear deformation theory // Journ. of Sound and Vibr., 1994, v. 176, № 2, p. 279-285.
35. Ohnabe H. Non –linear vibration of heated orthotropic sandwich plates and shallow shells // Int. J. Nonlinear Mech., 1995, v. 10, № 4, p. 501-508.
36. Коган Е.А., Юрченко А.А. Построение амплитудно – частотных характеристик трехслойных пластин конечного прогиба // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова. Ярополец, Москва, 16-20 февраля 2009 года. Тезисы докладов. М.: МАИ, 2009, С. 89-90.
37. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания защемленных по контуру трехслойных пластин // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: 2010, № 5, С. 25-34.
38. Пискунов В.Г. Об одном варианте неклассической теории неоднородных пологих оболочек и пластин // Прикл. механика, 1979, т. 2, № 11, С. 76-81.
39. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973, 172 с.
40. Sherif H.A. Free flexural vibrations of clamped circular sandwich plates // Journ. of Sound and Vibr., 1992, v. 157, № 3, p. 531 – 537.
41. Sherif H.A. Non-linear forced flexural vibration of a clamped circular unsymmetrical sandwich plate // Journ. of Sound and Vibr., 1995, v. 182, № 3, p. 495-503.
42. Du Guo-jun. Large amplitude vibration of circular sandwich plates // Yingyong shuxue he lixue = Appl. Math. and Mech. 1994, v. 15, № 5, p. 435-442.
43. Du Guo-jun., Chen Yingjie. Further study on large amplitude vibration of circular sandwich plates // Appl. Math. And Mech. Engl. Ed. 1996, v. 17, № 11, p. 1087-1094.
44. Du Guo-jun., Ma Jian-ging. Nonlinear vibration of circular sandwich plates // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed., 2006, v. 27, № 10, p. 1417-1424.
45. Kovac E.J., Anderson W.J., Scott R.A. Forced non-linear vibrations of a damped sandwich beam // Journ. of Sound and Vibr., 1971, v. 17, № 1, p. 25-39.
46. Hu Hao, Fu Yi-ming. Нелинейные динамические реакции вязкоупругих ортотропных симметричных слоистых пластин // Hunan daxue xuebao. Zaran kexue ban = J. Hunan Univ. Natur. Sci., 2003, v. 30, № 5, p. 79-83.
47. Bilasse M., Daya E.M., Azrar L. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich bems. Journ. of Sound and Vibr., 2010, v.329, № 23, p. 4950-4969.
48. Jacques N., Daya E.M.,Potier F.M. Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich beams by the harmonic balance and finite element methods //Journ. of Sound and Vibr., 2010, v.329, № 20, p.4251- 4265.
49. Новичков Ю.Н. Динамика слоистых конструкций // Математические методы и физико – механические поля. Вып. 24. Ин-т прикл. проблем механики и математики. Киев.: Наук. думка, 1986, С. 41 – 46.
50. Немировский Ю.В., Самсонов В.И. Анализ исследований по динамическому поведению КМ-конструкций // Моделирование в механике. Новосибирск. Ин-т теорет. и прикладной механики, 1993, т. 7(24), № 4, С. 110 – 116.

51. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механика композитных материалов, 1988, № 2, С. 287 – 298.
52. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек // М.: НИИМеханики МГУ, 1999, 215 с.
53. Григолюк Э.И., Коган Е.А. Анализ основных направлений развития и расчетных моделей анизотропных слоистых оболочек // Межвузовский научный сборник «Механика оболочек и пластин в XXI веке». Саратов, Саратовск. гос. техн. ун-т, 1999, С. 3-30.
54. Bert C.W. Nonlinear vibration of an arbitrarily laminated anisotropic rectangular plates // Proc. 3-rd Can. Congr. Appl. Mech. Calgary, 1971, Calgary, 1971. p. 307-308.
55. Bennett J.A. Nonlinear vibration of simply supported angle ply laminated plates // AJAA Journal, 1971. v. 9, № 10, p. 1997 – 2003.
56. Bennett J.A. Some approximations in the nonlinear vibrations of unsymmetricaly laminated plates // AJAA Journal, 1972, v. 10, № 9, p. 1145 – 1146.
57. Bert C.W. Nonlinear vibration of a rectangular plate arbitrarily laminated of anisotropic material // Trans. ASME, 1973, v. E40, № 2, p. 452-458.
58. Sircar R. Vibration of rectilinear plates on elastic foundation at large amplitude // Bull. Acad. pol. sci. techn, 1974, v. 22, № 4. p. 293-299.
59. Sarma V.S., Venkateshwar R.A., Pillai S.R.R., Nageswara R. B. Large amplitude vibrations of laminated hybrid composite plates // Journ. of Sound and Vibr., 1992, v. 159, № 3, p. 540 – 545.
60. Ohta Yoshiki, Narita Yoshihiro, Sasajima Manabu. Nonlinear vibration of laminated FRP plates // Hokkaido kogyo daigaku kenkyu kiyo=Mem. Hokkaido Inst. Technol. 1993, № 21, p. 39-46.
61. Pillai S.R.R., Nageswara R.B. Reinvestigation of non-linear vibrations of simply supported rectangular cross-ply plates // Journ. of Sound and Vibr., 1993, v. 160, № 1, p. 1-8.
62. Shih Y.S., Blotter P.T. Non-linear vibration analysis of arbitrarily laminated thin rectangular plates on elastic foundations // Journ. of Sound and Vibr., 1993, v. 167, № 3, p. 433-459.
63. Дидыченко И.М. К решению задачи колебаний с большими прогибами защемленных по контуру слоистых пластин // Стр-во и реконструкция в соврем. условиях: Тез. докл. междунар. науч.- техн. конф -ии. Рубцовск, 26-30 мая 1997, Рубцовск, 1997, С. 14-15.
64. Герштейн М.С., Халюк С.С. Нелинейные колебания многослойной оболочки // Вопросы прочности трубопроводов. М.: 1982, С. 121-133.
65. Герштейн М.С., Халюк С.С. Теоретическое и экспериментальное исследование нелинейных колебаний многослойной оболочки регулярного строения // 13 Всес. конф. по теории пластин и оболочек, Таллин, 1983, ч. 2, Таллин: 1983, С. 7-12.
66. Киладзе Б.А., Преображенский И.Н., Цхведиани А.Ш. Колебания многослойной цилиндрической панели с анизотропными слоями при больших прогибах // Мех. композ. материалов, 1982, № 6, С. 1014-1020.
67. Bhimaraddi A. Nonlinear dynamics of in-plane loaded imperfect rectangular plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1992, v. 59, № 4, p. 893-901.
68. Bhimaraddi A. Large amplitude vibrations of imperfect antisymmetric angle-ply laminated plates // Journ. of Sound and Vibr., 1993, v. 162, № 3, p. 457-470.
69. Fu Yuning, Chen Wei. Large amplitude vibration of antisymmetrically laminated imperfect cylindrical thick shell // Hunan daxue xuebao. Zuran kexue ban = J. Hunan Univ. Natur. Sci., 1995, v. 22, № 1, p. 120 – 128.
70. Федоренко Ю.М. Собственные геометрически нелинейные колебания неоднородных пластин // Стр-во и реконструкция в соврем. условиях: Тез. докл. междунар. науч.- техн. конф-ии. Рубцовск, 26-30 мая 1997, Рубцовск, 1997, С. 45-46.
71. Huang Zaixing, Zhu Jin-fu. The forced vibration analysis of symmetrically laminated composite rectangular plates with in-plane shear nonlinearites // Proc. 3rd Int. Conf. Nonlinear Mech. Shanghai, Aug. 17-20, 1998; ICNM-3, Shanghai, 1998, С. 243-247.
72. Кулешов Ю.В. Нелинейные колебания многослойных пластин с сосредоточенными мас-

сами // Вестник ТГТУ, 2006, № 4А, С. 1084 – 1090.
73. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Нелинейные колебания многослойных трансверсально изотропных пластин // Вестник Тамбовского гос. техн. ун-та, 2000, т. 6, № 2, С. 258-263.
74. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Вынужденные нелинейные колебания многослойных пластин // Вестник Тамбовского гос. техн. ун-та, 2002, т. 8, № 3, С. 483-489.
75. Куликов Г.М., Кулешов Ю.В. Нелинейные колебания многослойных пластин // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. естеств. и техн. н., 2004, т. 9, № 2, С. 264-267.
76. Chen Chun-Sheng, Cheng Weiseng, Chien Rean-Der, Doong Ji – Liang. Large amplitude vibration of an initially stressed cross ply laminated plates // Appl. Acoust., 2002, v. 63, № 9, p. 939 – 956.
77. Maloy K., Singha, Ganapathi M. Large amplitude free flexural vibration of laminated composite skew plates // Int. J. Nonlinear Mech., 2004, v. 39, № 10, p. 1709 – 1720.
78. Singha M.K., Rupesh Daripa. Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method // Int. J. Nonlinear Mech., 2007, v. 42, № 9, p. 1144 – 1152.
79. Mayrberry B. L., Bert G. W. Experimental investigation of nonlinear vibrations of laminated anisitropic panels// Shock and Vibration Bulletin, 1969, part 3, № 39, p. 277 -284.
80. Wu C. I., Vinson J. P. On the nonlinear oscillations of plates composed of composite materials // Journ. of composite materials, 1969, v. 3, p. 548 – 561.
81. Wu Chtng-ih, Vinson J. P. Nonlinear oscillations of laminated specially orthotropic plates with clamped and simply supported edges // J. Acoust. Soc. Amer. 1971, v. 49, № 5, part 2, p. 1561 – 1567.
82. Laura Patricio A., Maurizi Mario J. Comments on «Nonlinear oscillations of laminated specially orthotropic plates with clamped and simply supported edges» by C.Wu and J.R.Vinson // J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 52, № 3, part 2, p. 1053.
83. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988, 288 с.
84. Shi Yucheng., Lee Raymond.Y.Y., Mei Chuh. Finite element method for nonlinear free vibrations of composite plates // AIAA Journal, 1997, v. 35, № 1, p. 159-166.
85. Janevski G. Two-frequency nonlinear vibrations of antisymmetric laminated angle-ply plate // Facta Univ. Ser. Mech. Autom. Contr. And Rob. Univ. Nis., 2005, v.4, № 17, p. 345-358.
86. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н. Исследование нелинейных колебаний композитных пластин с помощью теории *R* – функций // Проблемы прочности, 2007, № 5, С. 101-113, 153.
87. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R - функции в задачах теории пластин. Киев: Наук. думка, 1987, 176 с.
88. Ertepinar A. Large amplitude radial oscillations of layered thick walled cylindrical shells // Journ. of Solids and Struct., 1977, v. 13, № 8, p. 717 – 723.
89. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек / Под ред. Э.И.Григолюка. М.: Изд-во Моск ун-та, 1981, С. 94-121.
90. Ковальчук П.С. Лакиза В.Д. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний с большими прогибами стеклопластиковых оболочек вращения // Прикл. механика, 1995, т. 31(41), № 11, С. 63 – 69.
91. Kamiya N. Governing equations for large deflections of sandwich plates. AJAA Journal, 1976, v. 14, № 2, p. 250-253.
92. Kamiya N. Analysis of the large thermal bending of sandwich plates by a modified Berger method. Journ. of strain analysis, 1978, v. 13, № 1, p. 17-22.
93. Karmakar B.M. Amplitude – frequency characteristics of large amplitude vibrations of sandwich plates // Trans. ASME, 1979, v. E46, № 1, p. 230-231.
94. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Приближенный анализ анизотропных трехслойных пластин конечного прогиба // Механика композитных материалов, 1980, № 1, С. 42- - 48.

95. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Приближенный анализ нелинейных трансверсально изотропных трехслойных пластин // Механика композитных материалов, 1980, № 2, С. 272 – 276.
96. Abe Akira, Kobayashi Yukinori., Yamada Gen. Internal resonance of rectangular laminated plates with degenerate modes // ASME. Int. J. C., 1998, v. 41, № 4, p. 718-726.
97. Berger H.M. A new approach to the analysis of large deflections of plates // Journ. of applied mechanics, 1955, v.22, № 4, p. 465-472.
98. Chiang C.K., Mei C., Gray C.E. Finite element large amplitude free and forced vibrations of rectangular thin composite plates // Journ. of Vibrations and Acoustics. 1991, v.113, p. 309 – 315.
99. Xia Z.Q., Lucaxiewicz S. Non-linear free, damped vibrations of sandwich plates // Journ. of Sound and Vibr., 1994, v.175, № 2, p. 210-232.
100. Singh Gajbir., Rao G.Vienkateswara., Iyengar N.G.R. Finite element analysis of the non-linear vibrations of moderately thick unsymmetrically laminated composite plates // Journ. of Sound and Vibr., 1995, v. 181, № 2, p. 315-329.
101. Yamada Gen., Kobayashi Yukinori., Abe Akira. Multimode response of rectangular laminated plates // Nihon kikai gakkai ronbunshu = Trans. Japan Soc. Mech. Eng. C., 1996, v. 62, № 600, p. 2976-2982.
102. Reif Z.F. Approximate methods for the solution of non-linear vibration equation // Bull. Mech. Eng. Educ., 1970, v.9, № 3, p. 231-234.
103. Sandman B.E., Walker H.S. An experimental observation in large amplitude plate vibration // Trans. ASME, 1973, v. E40, № 2, p. 633-634.
104. Adam C. Moderately large flexural vibrations of composite plates with thick layers // Int. J. Solids and Struct., 2003, v. 40, № 16, p. 4153-4166.
105. Chandra R., Raju B.B. Large amplitude flexural vibration of cross – ply laminated composite plates // Fibre Sci. Techn., 1975, v. 8, p. 243 – 264.
106. Nageswara R. B. Application of hybrid Galerkin method to nonlinear free vibrations of laminated thin plates // Journ. of Sound and Vibr., 1991, v. 154, № 3, p. 573 – 576.
107. Nageswara R. B., Pilla S.R.R. Large amplitude free vibrations of laminated anisotropic thin plates based on harmonic balance method // Journ. of Sound and Vibr., 1991, v. 154, p. 173 – 177.
108. Xu Jiachu, Liu Renhuai. Shear effects on large amplitude forced vibration of symmetrically laminated rectilinearly orthotropic circular plates // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed., 1998, v. 19, № 2, p. 111-119.
109. Upadnyay A.K., Pandey Ramesh., Shukla K.K. Nonlinear flexural response of laminated composite plates under hydro-thermo-mechanical loading // Commun. Nonlinear Sci. and Nummer. Simmul., 2010, v.15, № 9, p. 2634 – 2650.
110. Lakis A.A., Selmane A., Toledano A. Non-linear free vibration analysis of laminated orthotropic cylindrical shells // Int. J. Mech. Sci., 1998, v. 40, № 1, p. 27-49.