

**Устойчивость трёхслойной цилиндрической оболочки из композитного материала с ортотропным промежуточным слоем**

к.т.н. доц. Мозгунов В.Н., к.т.н. доц. Серов М.В., к.т.н. проф. Александрова С.Г.,  
к.т.н. доц. Зубарев А.А.

*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Университет машиностроения, НИТУ «МИСиС»  
8(495)223-05-23, tm@mami.ru*

*Аннотация.* В статье рассматривается устойчивость трёхслойной цилиндрической оболочки под действием внешнего гидростатического давления. Промежуточный слой (заполнитель) рассматривается как трёхмерное ортотропное тело. Предложенный алгоритм расчёта верхнего критического давления апробирован на известных решениях задач устойчивости трёхслойных цилиндрических оболочек.

*Ключевые слова:* устойчивость, трёхслойная цилиндрическая оболочка, ортотропный промежуточный слой.

**Введение**

В современном машиностроении хорошо зарекомендовали себя, в качестве рациональных конструкций, трёхслойные цилиндрические оболочки из композитных материалов. Эти оболочки обладают высокой удельной прочностью, долговечностью, коррозионной стойкостью, радиопрозрачностью и так далее. Но, как показывает опыт эксплуатации, для большинства из них причиной исчерпания работоспособности является не прочность, а потеря устойчивости исходной формы равновесия, то есть недостаточная жесткость. Поэтому остаются актуальными попытки создания методик расчёта на устойчивость таких конструкций при действии осевых сжимающих нагрузок и внешнего гидростатического давления.

Наибольшая часть публикаций, посвящённых проблеме статической устойчивости рассматриваемых оболочек, связана с упрощёнными моделями для промежуточного слоя [1]. Некоторые модели для заполнителя, как упругого основания представлены в работе [2]. В работе [3] изложены инженерные методы расчёта трёхслойных цилиндрических оболочек из композитных материалов, подкреплённых рёбрами жесткости и упругим цилиндром. Особый интерес представляют точные решения, полученные без каких-либо допущений о напряжённо-деформированном состоянии в промежуточном слое, так как эти решения позволяют контролировать точность вводимых допущений и уточнить границы применения технических теорий. Если промежуточный слой – ортотропный цилиндр, то решение можно построить, представляя перемещения в виде обобщённых степенных рядов. Такая теория развита в работе [4] и используется в данной статье.

Целью настоящей работы являются исследования устойчивости трёхслойной цилиндрической оболочки из композитного материала под действием внешнего гидростатического давления с учётом рассмотрения промежуточного слоя как трёхмерного ортотропного тела.

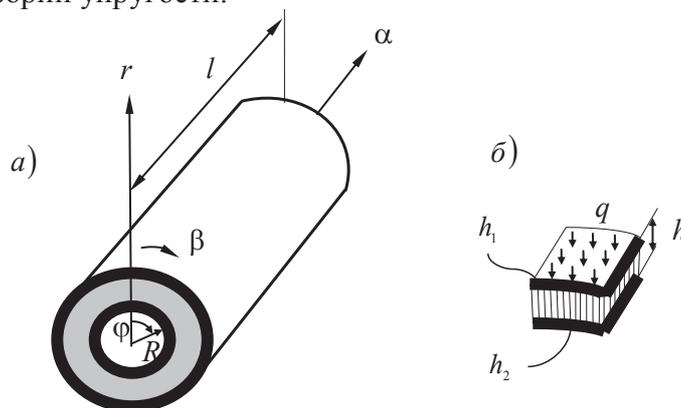
В настоящей работе получено в замкнутой форме аналитическое решение для определения верхнего критического давления трёхслойной оболочки с промежуточным слоем в виде ортотропного цилиндра. При этом предполагается, что наружный и внутренний слои (обшивка) представляют собой тонкостенные оболочки, изготовленные из ортотропного материала, причём главные направления упругости совпадают с направлениями главных кривизн оболочек. При учёте взаимодействия слоёв обшивки и промежуточного слоя, предполагается, что последний приклеен к обшивке.

**Постановка задачи**

Рассматривается устойчивость трёхслойной цилиндрической оболочки под действием внешнего гидростатического давления (рисунок 1а). Материал наружного и внутреннего тонкостенных слоёв считается ортотропным.

Промежуточный слой представляет собой ортотропный цилиндр. Для обшивки исполь-

зуются основные зависимости теории тонких пологих оболочек. Промежуточный слой рассматривается как трёхмерное ортотропное тело, для расчёта которого записывается полная система уравнений теории упругости.



**Рисунок 1. Расчётная схема трёхслойной цилиндрической оболочки с ортотропным промежуточным слоем: а) оболочка; б) фрагмент трёхслойного пакета**

Взаимодействие слоёв учитывается введением контактных поверхностных усилий в радиальном, окружном и осевом направлениях. Решение проводится для шарнирно-опёртой оболочки из условия существования безмоментного докритического напряжённого состояния трёхслойного пакета.

## Исследования и результаты

### 1. Уравнения устойчивости трёхслойного пакета

Для исследования устойчивости трёхслойного пакета используются уравнения теории тонких пологих ортотропных оболочек записанных в перемещениях:

$$\begin{cases} L_{11}^{(i)}U_i + L_{12}^{(i)}V_i + L_{13}^{(i)}W_i \pm q_{i\alpha} = 0; \\ L_{21}^{(i)}U_i + L_{22}^{(i)}V_i + L_{23}^{(i)}W_i \pm q_{i\beta} = 0; \\ L_{31}^{(i)}U_i + L_{32}^{(i)}V_i + \left( L_{33}^{(i)} + T_{i\alpha}^0 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + T_{i\beta}^0 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) W_i + h_i \left( \frac{\partial q_{i\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_{i\beta}}{\partial \beta} \right) \pm q_{ir} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где:  $i = 1, 2$  – номера слоёв обшивки соответственно наружного и внутреннего;

$U_i, V_i, W_i$  – проекции вектора полного перемещения точки срединной поверхности обшивки на оси  $\alpha, \beta$  и  $r$ ;  $L_{ij}$  – дифференциальные операторы, содержащие коэффициенты жёсткости срединной поверхности слоёв обшивки на растяжение, сдвиг, изгиб и кручение [5].

Для дальнейшего решения уравнений устойчивости (1) необходимо знать закон распределения контактных поверхностных усилий  $q_{i\alpha}, q_{i\beta}, q_{ir}$ , а также величины погонных докритических усилий  $T_{i\alpha}^0, T_{i\beta}^0$  безмоментного состояния трёхслойной оболочки.

### 2. Разрешающие уравнения для промежуточного слоя

При потере устойчивости трёхслойной оболочки наполнитель в зависимости от значения параметров волнообразования может иметь как осесимметричную, так и неосесимметричную форму деформации. Будем считать, что со стороны обшивки наполнитель нагружен контактной поверхностной нагрузкой интенсивности

$$\begin{aligned} q_{i\alpha} &= p_{i\alpha} \cos \lambda \alpha \cos n \varphi; \\ q_{i\beta} &= p_{i\beta} \sin \lambda \alpha \sin n \varphi; \\ q_{ir} &= p_{ir} \sin \lambda \alpha \cos n \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где:  $\lambda = \frac{\pi m}{l}$ ;  $m, n$  – параметры волнообразования в осевом и окружном направлениях;

$l$  – длина ортотропного цилиндра;

$P_{i\alpha}, P_{i\beta}, P_{ir}$  – амплитудные значения контактной поверхностной нагрузки.

Для ортотропного цилиндра уравнения в перемещениях имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W &= 0; \\ L_{21}U + L_{22}V + L_{23}W &= 0; \\ L_{31}U + L_{32}V + L_{33}W &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

где:  $L_{ij}$  – дифференциальные операторы;  $U, V, W$  – проекции вектора полного перемещения некоторой точки заполнителя на оси  $\alpha, \beta$  и  $r$ .

Представляя перемещения точек заполнителя при потере устойчивости в виде:

$$\begin{aligned} U &= U(r) \cos \lambda \alpha \cos n \varphi; \\ V &= V(r) \sin \lambda \alpha \sin n \varphi; \\ W &= W(r) \sin \lambda \alpha \cos n \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

и вводя новую безразмерную координату:

$$\rho = \frac{r-R}{R} \quad \left( -\frac{h}{2R} \leq \rho \leq \frac{h}{2R} \right),$$

где:  $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$  – средний радиус ортотропного цилиндра,  $h$  – толщина заполнителя полу-

чим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\left\{ a_{11} \left[ (1+\rho)^2 \cdot \frac{d^2}{d\rho^2} + (1+\rho) \frac{d}{d\rho} \right] - a_{22} - G_{12} n^2 - G_{13} \chi^2 (1+\rho)^2 \right\} W + \\ &\quad + n \left[ (a_{12} + G_{12})(1+\rho) \frac{d}{d\rho} - G_{12} - a_{22} \right] V - \\ &\quad - \chi \left[ (a_{13} + G_{13})(1+\rho) \frac{d}{d\rho} + (a_{13} - a_{23})(1+\rho) \right] U = 0; \\ &n \left[ (a_{21} + G_{12})(1+\rho) \frac{d}{d\rho} + G_{12} + a_{22} \right] W - \left\{ G_{12} \left[ (1+\rho)^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + (1+\rho) \frac{d}{d\rho} - 1 \right] - \right. \\ &\quad \left. - a_{22} n^2 - G_{23} \chi^2 (1+\rho)^2 \right\} V - (a_{23} + G_{23}) n \chi (1+\rho) U = 0; \\ &\chi \left[ (a_{31} + G_{13})(1+\rho)^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + (a_{32} + G_{13})(1+\rho) \right] W + \chi (a_{32} + G_{23}) n (1+\rho) V + \\ &\quad + \left\{ G_{13} \left[ (1+\rho)^2 \cdot \frac{d^2}{d\rho^2} + (1+\rho) \cdot \frac{d}{d\rho} \right] - G_{23} n^2 - a_{33} \chi^2 (1+\rho)^2 \right\} U = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь:  $a_{ij}, G_{ij}$  – компоненты симметричного тензора модулей упругости 1-го и 2-го рода;  $\beta = r \varphi$ ;  $\chi = \lambda R$ .

Введение переменной  $\rho$  позволяет выбрать решение системы дифференциальных уравнений (5) при отсутствии особых точек в области  $|\rho| \leq \frac{h}{2R}$ , в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned}
 W(\rho) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \rho^k; \\
 V(\rho) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \rho^k; \\
 U(\rho) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k \rho^k.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя зависимости (6) в уравнения (5) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\rho$ , получим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов  $A_k, B_k, C_k$ :

$$\begin{aligned}
 A_k &= -[k(k-1)]^{-1} (\alpha_{11}A_{k-1} + \alpha_{12}A_{k-2} - \alpha_{13}A_{k-3} - \alpha_{14}A_{k-4} + \alpha_{15}B_{k-1} + \\
 &\quad + \alpha_{16}B_{k-2} - \alpha_{17}C_{k-1} - \alpha_{18}C_{k-2} - \alpha_{19}C_{k-3}); \\
 B_k &= [k(k-1)]^{-1} [\alpha_{21}A_{k-1} + \alpha_{22}A_{k-2} - \alpha_{23}B_{k-1} - \alpha_{24}B_{k-2} + \alpha_{25}B_{k-3} - \alpha_{26}B_{k-4} - \alpha_{27}(C_{k-2} + C_{k-3})]; \\
 C_k &= -[k(k-1)]^{-1} [(\alpha_{31}A_{k-1} + \alpha_{32}A_{k-2} + \alpha_{33}A_{k-3} + \alpha_{34}(B_{k-2} + B_{k-3}) + \\
 &\quad + \alpha_{35}C_{k-1} + \alpha_{36}C_{k-2} - \alpha_{37}C_{k-3} - \alpha_{38}C_{k-4})],
 \end{aligned} \tag{7}$$

где:  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты, состоящие из модулей упругости, параметров волнообразования и индекса суммирования.

В соотношениях (7) коэффициенты  $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1$  остаются неизвестными и играют роль произвольных постоянных.

Задаваясь для первого случая:

$$A_0^{(1)} = 1, \quad A_1^{(1)} = B_0^{(1)} = B_1^{(1)} = C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = 0;$$

.....

для шестого случая:

$$C_1^{(6)} = 1, \quad A_0^{(6)} = A_1^{(6)} = B_0^{(6)} = B_1^{(6)} = C_0^{(6)} = 0,$$

с помощью рекуррентных соотношений (7) находим шесть частных решений  $W^{(j)}, V^{(j)}, U^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ).

Тогда общее решение уравнений (5) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{j=1}^6 D_j W^{(j)}(\rho) \sin \lambda \alpha \cos n \varphi; \\
 V &= \sum_{j=1}^6 D_j V^{(j)}(\rho) \sin \lambda \alpha \sin n \varphi; \\
 U &= \sum_{j=1}^6 D_j U^{(j)}(\rho) \cos \lambda \alpha \cos n \varphi,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где:  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) – произвольные постоянные.

Используя зависимости для перемещений (6) и основные соотношения теории упругости для ортотропного материала (геометрические и физические уравнения) можно выразить напряжения в ортотропном цилиндре через коэффициенты  $A_k, B_k$  и  $C_k$ .

Затем определяются шесть частных решений  $\sigma_r^{(j)}, \sigma_\beta^{(j)}, \sigma_\alpha^{(j)}, \tau_{r\beta}^{(j)}, \tau_{r\alpha}^{(j)}, \tau_{\alpha\beta}^{(j)}$  так, как это делалось выше для определения  $W^{(j)}, V^{(j)}, U^{(j)}$ .

Тогда общее решение для определения напряжений в ортотропном цилиндре запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{R(1+\rho)} \sum_{j=1}^6 D_j \sigma_r^{(j)}(\rho) \sin \lambda \alpha \cos n \varphi; \\
\sigma_\beta &= \frac{1}{R(1+\rho)} \sum_{j=1}^6 D_j \sigma_\beta^{(j)}(\rho) \sin \lambda \alpha \cos n \varphi; \\
\sigma_\alpha &= \frac{1}{R(1+\rho)} \sum_{j=1}^6 D_j \sigma_\alpha^{(j)}(\rho) \sin \lambda \alpha \cos n \varphi; \\
\tau_{r\beta} &= \frac{G_{12}}{R(1+\rho)} \sum_{j=1}^6 D_j \tau_{r\beta}^{(j)}(\rho) \sin \lambda \alpha \sin n \varphi; \\
\tau_{r\alpha} &= \frac{G_{13}}{R} \sum_{j=1}^6 D_j \tau_{r\alpha}^{(j)}(\rho) \cos \lambda \alpha \cos n \varphi; \\
\tau_{\alpha\beta} &= \frac{G_{23}}{R(1+\rho)} \sum_{j=1}^6 D_j \tau_{\alpha\beta}^{(j)}(\rho) \cos \lambda \alpha \sin n \varphi.
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, перемещения (8) и напряжения (9) получились выраженными через шесть произвольных постоянных  $D_j$ , которые в дальнейшем определяются из условия непрерывности перемещений и напряжений по поверхности контакта обшивки и заполнителя.

Рассмотрим алгоритм определения внешнего критического давления для трёхслойной цилиндрической оболочки.

### 3. Определение верхней критической нагрузки

На торцах трёхслойной оболочки будем удовлетворять в интегральном смысле условиям шарнирного опирания, тогда перемещения несущих слоёв оболочки можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
U_i &= U_{0i} \cos \lambda \alpha \cos n \varphi; \\
V_i &= V_{0i} \sin \lambda \alpha \sin n \varphi; \\
W_i &= W_{0i} \sin \lambda \alpha \cos n \varphi,
\end{aligned} \tag{10}$$

где:  $U_{0i}, V_{0i}, W_{0i}$  – амплитудные значения перемещений несущих слоёв оболочки.

В силу тонкостенности несущих слоёв оболочки граничным условиям по перемещениям будем удовлетворять на срединных поверхностях:

$$\begin{aligned}
U_i &= U(\rho_i); \\
V_i &= V(\rho_i); \\
W_i &= W(\rho_i),
\end{aligned} \tag{11}$$

где:  $U(\rho_i), V(\rho_i), W(\rho_i)$  – перемещения точек наружной и внутренней поверхностей заполнителя.

Подставляя в граничные условия (11) зависимости (10) и (8) при  $\rho = \rho_i$  получим значения произвольных постоянных  $D_j$ :

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ \dots \\ D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{(1)}(\rho_1) & \dots & U^{(6)}(\rho_1) \\ V^{(1)}(\rho_1) & \dots & V^{(6)}(\rho_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ W^{(1)}(\rho_2) & \dots & W^{(6)}(\rho_2) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} U_{01} \\ V_{01} \\ \dots \\ \dots \\ W_{02} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Для определения контактных усилий входящих в уравнение (1) будем исходить из соотношений:

$$\begin{aligned} q_{i\alpha} &= -\tau_{r\alpha}(\rho_i); \\ q_{i\beta} &= -\tau_{r\beta}(\rho_i); \\ q_{ir} &= -\sigma_r(\rho_i). \end{aligned} \quad (13)$$

где:  $\tau_{r\alpha}(\rho_i), \tau_{r\beta}(\rho_i), \sigma_r(\rho_i)$  – нормальные и касательные напряжения на наружной и внутренней поверхностях заполнителя.

Подставляя в уравнение (13) зависимости (2) для контактной нагрузки, а также зависимости (9) для напряжений заполнителя при  $\rho = \rho_i$ , получим выражения для амплитудных значений контактной нагрузки:

$$\begin{pmatrix} P_{1\alpha} \\ P_{1\beta} \\ \dots \\ \dots \\ P_{2r} \end{pmatrix} = \| Q_{ij} \| \cdot \begin{pmatrix} U_{01} \\ V_{01} \\ \dots \\ \dots \\ W_{02} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

где:  $Q_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) – элементы матрицы 6-го порядка, получаемой от перемножения матрицы, составленной из частных решений для напряжений, на обратную матрицу, составленную из частных решений для перемещений.

Подставляя в уравнение (1) зависимости (10) и (2) с учётом амплитудных значений контактных усилий (14) получаем уравнение устойчивости трёхслойной оболочки в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{kl}^{(1)} - Q_{kl} & | & -Q_{k,l+3} \\ \hline -Q_{k+3,l} & | & \Phi_{kl}^{(2)} - Q_{k+3,l+3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{01} \\ \dots \\ W_{02} \end{pmatrix} = |\Phi| \cdot |U| = 0 \quad (15)$$

где:  $\Phi_{kl}^{(i)}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) – элементы блочной матрицы, определяющиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{(i)} &= -A_{i\alpha} \lambda^2 - F_{i\alpha} \frac{n^2}{R_i^2}; & \Phi_{12}^{(i)} &= \Phi_{21}^{(i)} = (A_{i\alpha\beta} + F_{i\alpha}) \frac{n\lambda}{R_i}; & \Phi_{13}^{(i)} &= \Phi_{31}^{(i)} = \frac{A_{i\alpha\beta}}{R_i} \lambda; \\ \Phi_{22}^{(i)} &= -A_{i\beta} \frac{n^2}{R_i^2} - F_{i\alpha} \lambda^2; & \Phi_{23}^{(i)} &= \Phi_{32}^{(i)} = (A_{i\alpha\beta} + F_{i\alpha}) \frac{n\lambda}{R_i}; \\ \Phi_{33}^{(i)} &= \left[ D_{i\alpha} \lambda^4 + 2(D_{i\alpha\beta} + 2F_{i\beta}) \lambda^2 \frac{n^2}{R_i^2} + D_{i\beta} \frac{n^4}{R_i^4} + \frac{1}{R_i^2} \left( A_{i\beta} - D_{i\alpha\beta} \lambda^2 + D_{i\beta} \frac{n^2}{R_i^2} \right) \right] - \\ & - T_{i\alpha}^0 \lambda^2 - T_{i\beta}^0 \frac{n^2}{R_i^2}. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение уравнения (15) возможно, если определитель

$$\det \|\Phi\| = 0. \quad (16)$$

Это условие, при известном законе распределения погонных докритических усилий  $T_{i\alpha}^0, T_{i\beta}^0$ , позволяет получить квадратное уравнение относительно внешней нагрузки  $q$ :

$$a(m, n)q^2 + b(m, n)q + c(m, n) = 0. \quad (17)$$

Здесь  $a(m, n), b(m, n), c(m, n)$  – матричные комплексы шестого порядка, зависящие от параметров волнообразования  $m$  и  $n$ . Таким образом, задача по определению верхней критической нагрузки  $q_{cr}$  сводится к минимизации корней квадратного уравнения (17) по параметрам  $m$  и  $n$ .

---

### Заключение

В результате проведённых исследований получено уравнение устойчивости трёхслойной оболочки в матричном виде и решена задача по определению верхней критической нагрузки.

Предложенный алгоритм расчёта был апробирован на известных решениях задач устойчивости трёхслойных цилиндрических оболочек с лёгким наполнителем из пенопласта и с радиально-армированным наполнителем из стеклопластика, для которых ранее использовался модельный подход. Так верхнее критическое давление для оболочек с радиально-армированным наполнителем  $q_{кр}^T = 17,9$  МПа достаточно хорошо согласуется с результатами эксперимента  $q_{кр}^Э = 14,6$  МПа [6].

### Литература

1. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композиционных оболочек. М.: Физматлит, 2010, 248 с.
2. Соломонов Ю.С. Георгиевский и др. Методы расчёта цилиндрических оболочек из композиционных материалов. М.: Физматлит, 2009, 262 с.
3. Иванов О.Н., Александрова С.Г., Мозгунов В.Н. Некоторые модели упругого анизотропного основания. – Машины и технологии переработки каучуков, полимеров и резиновых смесей. Ярославль, 1982, с. 106–111.
4. Гусь А.И. Устойчивость трёхмерных деформируемых тел. Киев: Наукова думка, 1971, 276 с.
5. Иванов О.Н., Мозгунов В.Н., Рогинский С.Л., Устойчивость трёхслойной радиально-армированной цилиндрической стеклопластиковой оболочки. В кн.: Совершенствование конструкций машин и аппаратов химических производств. М.: МИХМ, 1982. с. 23-27.
6. Иванов О.Н., Рогинский С.Л., Плешков Л.В., Мозгунов В.Н. Экспериментальное исследование устойчивости радиально-армированных цилиндрических оболочек из стеклопластика. В кн.: Стеклопластики и стекловолокно. М., 1982, вып.5, с. 6–9.