Обобщенный метод определения скорости стесненного движения мономодальных газовых пузырей, капель жидкости и твердых частиц произвольной формы под действием силы тяжести

д.т.н. проф. Кондратьев А.С.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, ask41@mail.ru

Аннотация. Известный способ расчета скоростей стесненного движения твердых частиц произвольной формы под действием силы тяжести распространен на случаи движения мономодальных газовых пузырей и капель жидкости произвольной формы.

Ключевые слова: *скорость стесненного осаждения; газовые, жидкие и твердые мономодальная частицы; произвольная форма.*

В работе [1] изложен метод расчета скоростей стесненного осаждения мономодальных твердых частиц произвольной формы в ньютоновской жидкости. При осаждении частиц с полимодальным распределение по размеру, под движением частиц понималось их стесненное осаждение под действием силы тяжести и возможное всплытие наиболее мелких фракций при осаждении полимодальных двухфазных потоков [2-4]. В последнем случае учитывалось, что между частицами отдельных фракций происходит контактное взаимодействие в виде удара. Вопрос контактного взаимодействия между газовыми пузырями различного размера, всплывающими с разными скоростями стесненного всплытия, также как стесненного всплытия или стесненного осаждения капель жидкости, со свойствами отличными от свойств дисперсионной среды, является сложной самостоятельной задачей. Такое взаимодействие необходимо представить не только на качественном уровне типа, результат контактного взаимодействия зависит от следов поверхностно-активных веществ, но и от количественного описания результатов такого взаимодействия. В случае контактного взаимодействия газовых пузырей или капель жидкости возможны, по меньшей мере, пять параллельных процессов: произошел упругий или неупругий удар, такой же, как и в случае твердых частиц, причем пузыри и капли сохранили свои размеры; частицы слиплись и продолжают совместное движение в виде двух слипшихся, но не слившихся, частиц; частицы слились и образовали частицу большего размера; две слипшиеся частицы в результате следующего контактного взаимодействия, распались на исходные; слившиеся частицы в результате следующего контактного взаимодействия распались на исходные. В результате параллельного протекания этих процессов из исходной полимодальной смеси в процессе её движения возможно образование новой, по распределению частиц по размеру, полимодальной смеси. Если же доминирует один процесс, например слияние пузырей или капель, то в процессе движения из исходной полимодальной смеси образуется несколько крупных пузырей или капель, и дальнейший процесс их движения перейдет в режим движения одиночного пузыря или капли. Учитывая значительные трудности в формировании адекватной физико-математической модели этих процессов, как в качественном так и, особенно, их количественном представлении, ограничимся в данном исследовании рассмотрением движения мономодальной смеси пузырей и капель жидкости в жидкой дисперсной среде.

В соответствии с [1] примем, что при движении твердых частиц, пузырей или капель жидкости частицы расположены в узлах кубической решетки и разделены прослойками дисперсионной жидкости. Вследствие мономодальности частиц принимается, что контактного взаимодействия между частицами не происходит. Учитывая, что при всплытии газовых пузырей, особенно больших размеров, также как и при движении капель жидкости, форма перемещающихся частиц может отличаться от сферической, принимая форму эллипсоида вращения с отношением полуосей до 1,5 - 2, определим эффективные размеры частиц выражениями [1]:

$$d_s = \sqrt{S_s / \pi}\ ;\ d_m = \sqrt{(4 \cdot S_m) / \pi}\ ;\ d_v = \sqrt[3]{(6 \cdot V) / \pi}\ , \tag{1}$$

где: d_s – диаметр эквивалентного шара, определенный по площади боковой поверхности частицы S_s; d_m – диаметр эквивалентного шара, определенный по площади миделевого сечения частицы S_m; d_v – диаметра эквивалентного шара объему которого равен объему частицы V.

Коэффициент гидравлического сопротивления капли жидкости, перемещающейся в среде другой жидкости, является суперпозицией движений сферической твердой и газовой частиц того же размера и определяется по формуле, предложенной в [5], которую обобщим в следующем виде:

$$C_p = \left(k_g \cdot C_g + k_p C_s\right) / (1 + k_p), \tag{2}$$

где: C_g – коэффициент гидравлического сопротивления сферического газового пузыря;

C_s – коэффициент гидравлического сопротивления сферической твердой частицы;

$k_p = (\mu_p / \mu_0)$ – отношение динамической вязкости среды, находящейся внутри сферы μ_p к динамической вязкости жидкости в которой перемещается капля μ_0;

k_g – газовый коэффициент, принимающий значение 1 в случае газовых частиц и 0 в других случаях (твердые частицы или жидкие капли).

Из выражения (2) следует, что при $k_{g=1}$ и $k_p = 0$ рассматривается движения только газовых пузырей и $C_p = C_g$; при $k_g = 1$ и k_p – произвольно, то рассматривается движение капель жидкости и $C_p = C_f$; при $k_g = 0$ и $k_p \to \infty$ рассматривается движение твердых частиц и $C_p = C_s$. Таким образом, величина C_p является обобщенным коэффициентом гидравлического сопротивления газовых пузырей, капель жидкости и твердых мономодальных частиц произвольной формы.

Коэффициент гидравлического сопротивления сферической твердой частицы определяется по формуле [1]:

$$C_s = 24 / \mathrm{Re} + 53 / (\mathrm{Re} + 32) + 0{,}4; \tag{3}$$

а сферического газового пузыря [6]:

$$C_g = 16 / \mathrm{Re} + 24 / (\mathrm{Re} + 32) + 0{,}4. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (2) получим:

$$C_p = [(16 \cdot \mathrm{k}_g + 24 \cdot k_p) / \mathrm{Re} + (24 \cdot k_g + 53 \cdot k_p) / (32 + \mathrm{Re}) + (k_g + k_p) C_{\min}] / (1 + k_p), \tag{5}$$

где: $C_{\min} = 0{,}4$ – минимальное значение коэффициента гидравлического сопротивления при обтекании шара при числе Рейнольдса порядка 10^4.

Величина эффективной динамической вязкости дисперсного потока, состоящего из сферических твердых, жидких или газообразных частиц, при малой концентрации частиц рассматриваемых видов, определяется выражением [7]:

$$\mu / \mu_0 = \bar{\mu} = 1 + 2{,}5 \cdot \varphi \cdot (k_p + 0{,}4) / (1 + k_p), \tag{6}$$

где: φ – объемная доля частиц. Для твердых частиц $\mu_p \to \infty$, а газообразных $\mu_p = 0.$

Поскольку концентрация дисперсной фазы φ мала, положим, что приблизительно выражение (6) можно представить в виде:

$$\mu - \mu_0 = d\mu = 2{,}5 \cdot \mu_0 \varphi (k_p + 0{,}4) / (1 + k_p) \approx 2{,}5 \cdot \mu [(k_p + 0{,}4) / (1 + \mathrm{k}_p)] d\varphi.$$

Интегрируя полученное выражение, получим:

$$\mu / \mu_0 = \bar{\mu} = \exp[2{,}5 \cdot \varphi \cdot (k_p + 0{,}4) / (1 + \mathrm{k}_p)], \tag{7}$$

где: $\bar{\mu}$ – относительная динамическая вязкость двухфазной смеси.

Уравнение движения частицы запишем в виде баланса сил тяжести, Архимеда и гидродинамического сопротивления:

$$\pi \cdot d_v^3 (\rho_p - \rho) \mathrm{g} / 6 = \pi \mathrm{d}_m^2 U^2 \rho C_p / 8, \tag{8}$$

где: ρ_p – плотность материала движущейся частицы; ρ – плотность дисперсионной среды.

В принятой записи за положительное направление принято направление ускорения силы тяжести g, которое соответствует случаю $\rho_p > \rho$, то есть частица осаждается. При $\rho_p < \rho$ направление движения меняется на противоположное, то есть частица всплывает.

При расчете чисел Рейнольдса Re в выражениях (3) - (5) для частиц произвольной формы величина скорости определяется по скорости обтекания частиц потоком жидкости U, вязкость определяется по формуле (7), а в качестве характерного размера используется эквивалентный диаметр движущихся частиц, определяемый по формуле, приведенной в [1], которую с учетом выражения (6), представим в виде:

$$d_e = [2 \cdot d_s \cdot k_p + (2 + k_p) d_m] / [3 \cdot (1 + k_p)]. \tag{9}$$

Подставляя (5) в (8) получим кубическое уравнение относительно числа Рейнольдса, которое, после приведения к каноническому виду, записывается в виде:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}^3 + [(A + B + 32 \cdot C_{\min}) / (C \cdot C_{\min})] \cdot \mathrm{Re}^2 + \\ &+ [32 \cdot A - 4 (d_e / d_m)^2 Ar / (3 \cdot \bar{\mu}^2) / (C \cdot C_{\min}) \mathrm{Re} - \\ &- [128 (d_e / d_m)^2 Ar / (3 \cdot \bar{\mu}^2)] / (C \cdot C_{\min}) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где: $A = (16 \cdot k_g + 24 \cdot k_f); B = (24 \cdot k_g + 53 \cdot k_f); C(k_g + k_f);$

$Ar = d_v{}^3 (\rho_p - \rho) \rho g / \mu^2$ – число Архимеда; $\mathrm{Re} = U d_e \rho / \mu$ – число Рейнольдса.

Уравнение (10) решается итерационным методом [1 – 4], в котором в качестве начального приближения используется упрощенное выражение для коэффициента гидравлического сопротивления (5), в котором опущен второй член в квадратных скобках правой части выражения. В рассматриваемом случае начальное значение числа Рейнольдса определяется выражением:

$$\mathrm{Re} = \{[\mathrm{A} / (\mathrm{C} \cdot \mathrm{C}_{\min})]^2 / 4 + 4 (d_e / d_m)^2 Ar / \{(3 \cdot \bar{\mu}^2) \cdot (C \cdot C_{\min})]\}^{0,5} - A / (C \cdot C_{\min}).$$

Как показано в [9], скорость обтекания частицы дисперсионной средой U связана со скоростью перемещения частицы относительно лабораторной (неподвижной) системы координат U_p соотношением:

$$U_p = U \cdot (1 - \varphi) / \mathrm{f}, \tag{11}$$

где: f – коэффициент, учитывающий стесненное движение потока жидкости, перемещающейся в межчастичном пространстве.

Величина коэффициента f может быть определена исходя из несколько различающихся представлений [1]. Если величину f определить из условия, что определяющей является среднеквадратичная скорость, определенная на площади поперечного сечения шара, то есть корень квадратный из квадрата скорости по поверхности, то:

$$f_1 = [1 - \pi(6 \cdot \varphi / \pi)^{2/3} / 4]^{-0,5}. \quad (12)$$

Если, исходя из средней по сечению локальной скорости, определить суммарную силу сопротивления Стокса, а затем определить соответствующую ей среднюю скорость, то

$$f_2 = [\Psi(1 - \Psi)]^{-0,5} \cdot arctg[\Psi / (1 - \Psi)]^{0,5}, \quad (13)$$

где $\Psi = \pi(6 \cdot \varphi / \pi)^{2/3} / 4.$

Используя выражения (10), (11) и (12) или (13) можно определить значение скорости осаждения или всплытия частицы. По тем же выражениям при $\varphi = 0$ можно рассчитать значения скоростей свободного осаждения или всплытия U_0 и определить величину отношения U_p / U_0, которое широко используется в инженерных расчетах [10].

Для того, чтобы получить представление об ожидаемом уровне соответствия с опытными данными, рассмотрим случай движения сферических частиц при ламинарном режиме обтекания. В этом случае выражение (10) сильно упрощается, поскольку второй и третий члены в выражениях (3) и (4), и те же члены в квадратных скобках правой части в выражении (5) опускаются. В результате, отношение U_p / U_0, принимает простой вид:

$$U_p / U_0 = (1 - \varphi) / (\bar{\mu} \cdot f). \quad (14)$$

При турбулентном режиме обтекания частиц, то есть при Re >> 1, вязкость среды перестает влиять на гидродинамическое сопротивление, и из (8) следует, что:

$$U_p / U_0 = (1 - \varphi) / f. \quad (15)$$

В качестве «опытной зависимости» используем, полученное на основе измерения эффективной вязкости двухфазной среды, выражение для величины отношения U_p / U_0 [11]:

$$U_p / U_0 = (1 - \varphi)^2 \exp[-2,5 \cdot \varphi / [1 - 39 \cdot \varphi / 64)], \quad (16)$$

которое согласуется с опытными данными по относительной скорости осаждения при псевдоожижении и осаждению твердых сфер при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \leq 1$ и $0 \leq \varphi \leq 0,55$ с максимальным отклонением до – 23 % при $\varphi \approx 0,24.$

Также на основе обработки опытных данных, в работе [10] приводится эмпирическая зависимость:

$$U_p / U_0 = (1 - \varphi)^n, \quad (17)$$

показатель степени в которой $n = 2,39 + 3 / (1,3 + 0,1 \cdot \mathrm{Re}_0)$ был уточнен в работе [12].

В таблице 1 представлены результаты расчета величины U_p / U_0 в функции от величины объемной концентрации дисперсной фазы, по зависимости (14) при значении f_1 по (12), зависимости (15) при значении f_2 по (13), зависимости (16) и зависимости (17) при различных значениях числа Рейнольдса Re_0.

Из анализа данных, представленных в таблице 1, следует, что зависимость (14) с использованием функции f_1, зависимость (16) и зависимость (17) при $\mathrm{Re}=0$ и $\mathrm{Re}_0=1$, то есть при ламинарном режиме обтекания частиц, приводят к практически совпадающим значениям отношения величины U_p/U_0, что свидетельствует о большой степени достоверности полученных результатов. При том, что в области $\varphi\approx 0,24$ расхождение расчетов по (14) с опытными данными улучшается, снижаясь до - 10 %.

Таблица 1.

Сравнение величины отношения скоростей U_p/U_0 по формулам (14), (15), (16) и (17)

φ	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
(14)	0,78	0,62	0,49	0,38	0,29	0,21	0,15	0,11	0,069	0,042
(15)	0,84	0,74	0,65	0,56	0,49	0,42	0,36	0,30	0,25	0,20
(16)	0,79	0,62	0,48	0,36	0,27	0,20	0,14	0,096	0,064	0,041
(17) $\mathrm{Re}=0$	0,79	0,61	0,47	0,35	0,26	0,19	0,13	0,091	0,060	0,039
(17) $\mathrm{Re}=1$	0,79	0,62	0,48	0,36	0,27	0,20	0,14	0,099	0,067	0,043
(17) $\mathrm{Re}=10$	0,83	0,67	0,55	0,44	0,35	0,27	0,20	0,15	0,11	0,078
(17) $\mathrm{Re}=10^2$	0,87	0,76	0,65	0,55	0,47	0,39	0,32	0,26	0,20	0,16
(17) $\mathrm{Re}=10^3$	0,88	0,78	0,68	0,58	0,50	0,42	0,35	0,29	0,24	0,19

При турбулентном режиме обтекания частиц, расчет по эмпирической зависимости (17) однозначно указывает на возрастание величины отношения U_p/U_0 с ростом объемной доли дисперсной фазы. Хорошо совпадает с этими данными расчет по зависимости (15) с использованием функции f_2 .

В работах [1 – 4] проводилось сравнение опытных и расчетных данных по скоростям стесненного осаждения и всплытия твердых частиц и скоростям фронта раздела в бимодальных и тримодальных двухфазных смесях при ламинарном режиме обтекания с использованием зависимости (12), поскольку числа Рейнольдса, определенные по скорости обтекания, не превышали 10. Выше было показано, что использование полученных расчетных значений отношения U_p/U_0 приводит к значениям, достаточно удовлетворительно соответствующим опытным данным.

Изложенный метод расчета может использоваться для расчета скоростей стесненного движения мономодальных газовых пузырей, капель жидкости и твердых частиц произвольной формы под действием силы тяжести.

Литература

1. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. Расчет скорости стесненного осаждения монодисперсных твердых частиц в ньютоновской жидкости // Теор. осн. хим. техн. 2004. Т. 38. № 6. С. 624 – 629.
2. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. Скорость стесненного осаждения бимодальной смеси твердых частиц в ньютоновской жидкости // Теор. осн. хим. техн. 2006. Т. 40 № 4. С. 417 – 422.
3. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. Расчет скорости стесненного осаждения бимодальной смеси твердых частиц произвольной формы в ньютоновской жидкости // Теор. осн. хим. техн. 2007. Т. 41. № 2. С. 228 – 232.
4. Кондратьев А.С., Наумова Е.А. Расчет скорости стесненного осаждения полидисперсных смесей твердых частиц произвольной формы в ньютоновской жидкости // Теор. осн. хим. техн. 2008. Т. 42. № 1. С. 100 – 105.

5. Химическая гидродинамика: Справочное пособие /А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов и др. М.: Бюро Квантум. 1996. 336 с.
6. Кондратьев А.С. Эмпирический коэффициент сопротивления капли // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып. 25. М.: Спутник + . 2012. С. 168-176.
7. Хаппель Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976. 631 с.
8. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. М.: МЭИ. 2000. 374 с.
9. Кондратьев А.С. Об использовании уравнения неразрывности при анализе движения твердых частиц в жидкости // Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Вып. 16. М.: Спутник + . 2007. С. 6 - 12.
10. Кизельватер Б.В. Теоретические основы гравитационных процессов обогащения. М: Недра. 1979. 295 с.
11. Hanratty T.J., Bandukwala A. Fluidization and sedimentation of spherical particles // AIChEJ. 1957.v. 3. № 2. P. 293.
12. Кондратьев А.С. Эмпирическая формула для скорости стесненного осаждения сферических частиц в цилиндрических сосудах // Сб. статей. Гидравлика и гидравлические машины. Сб. ст. Вып. 3, М. МГОУ. 2011. С. 4-8.