Линейная минимаксная фильтрация скалярного случайного процесса при наличии нечеткого возмущения с ограниченной дисперсией в полезной составляющей наблюдения

к.т.н. Ридоров И.Г.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, igor8i@nm.ru

Аннотация. В статье исследуется задача скалярной минимаксной фильтрации при наличии в стационарном процессе с известной спектральной плотностью неизвестного нечеткого возмущения, о спектральной плотности которого известны лишь моментные ограничения, которым оно удовлетворяет с возможно заданным подмножеством сосредоточения оси частот положительной меры (возможно и бесконечной). Помеха измерения предполагается заданной в виде белого шума известной интенсивности. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: *минимаксный, фильтр, спектральная плотность, помеха, белый шум, линейный, моментные неравенства, частота, случайный, нечеткий, нечеткий случайный процесс.*

Введение

Данная работа продолжает исследование моделей минимаксной линейной фильтрации в нечеткой случайной среде [1-5]. В [7] был разработан минимаксный фильтр в условиях четкой случайной среды, когда отсутствует достоверная априорная информация о статистических свойствах возмущений. В данной работе обобщается ранее полученный результат на случай присутствия нечеткой помехи, заданной на некотором r-уровневым случайном отрезке множеств нечетких случайных величин. Применяется новый подход (называемый возможностным) который использует аппарат теории нечетких случайных мер и интегралов [3, 8]. Поставленная задача сводится к некоторой эквивалентной задаче линейной минимаксной фильтрации в условиях четко заданной помехи с ограниченной дисперсией с дополнительным ограничением на область сосредоточения ее частот в форме решения проблемы моментов Маркова.

Базовые понятия

Следуя [1-5] введем необходимые понятия. Пусть $(\mathbf{\Omega},\mathbf{U},\mathbf{P})$ – вероятностное пространство. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{E}^1)$ – множество всех нечетких величин, чьи функции распределения удовлетворяют условиям квазивогнутости и полунепрерывности сверху. $\boldsymbol{E}^1$ – эвклидово пространство с размерностью **1**. Если $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{E}^1)$, то $\forall\alpha\in(0,1]$ $\boldsymbol{f}_\alpha=[\boldsymbol{f}_\alpha^-,\boldsymbol{f}_\alpha^+]$ – замкнутый случайный интервал.

Определение 1. Измеримое отображение $\tilde{\xi}_t(\omega)(\boldsymbol{x})$: $\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{F}(\boldsymbol{E}^1)$ называется случайной нечеткой скалярной (вещестенной или комплекснозначной) функцией определяемой на $(\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{T},\boldsymbol{U})$ пространства элементарных событий $\mathbf{\Omega}$ в $\boldsymbol{E}^1$, зависящее от параметра $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{T}$, который интерпретируем как время или частота, такое, что при любом фиксированном $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{T}$, если для $\alpha\in(0,1]$ $\tilde{\xi}_t(\omega)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{E}^1,\tilde{\xi}_t(\omega)(\boldsymbol{x})\ge\alpha\}=[\xi^-(\omega),\xi^+(\omega)]$ – случайный интервал, а именно $\xi^-(\omega),\xi^+(\omega)$ две случайные величины определенные на $(\mathbf{\Omega},\mathbf{U},\mathbf{P})$.

Обозначим через $\boldsymbol{FR}(\mathbf{\Omega})$ множество нечетких случайных величин.

Определение 2. Множеством α – уровня нечетких случайных величин $\tilde{\boldsymbol{Z}}_{t,\alpha}(\omega)$ называется множество

$$\tilde{Z}_{t,\alpha}(\omega) = [\tilde{Z}^{-}_{t,\alpha}, \tilde{Z}^{+}_{t,\alpha}] = \{z \in E^1, t \in T \mid (\tilde{Z}^{+}_{t,\alpha}(\omega) = \sup(x \in E^1 \mid \tilde{Z}_t(\omega)(x) \ge \alpha \wedge$$

$$\wedge(\tilde{Z}^{-}_{t,\alpha}(\omega) = \inf(x \in E^1 \mid \tilde{Z}_t(\omega)(x) \ge \alpha)\}$$

Определение 3. Совокупность нечетких случайных величин $X = \tilde{\xi}_t(\omega)(x)$ при $t \in T$, $x \in X$ нечетким случайным процессом с временным интервалом **T.**

Аналогичное определение можно дать нечеткому случайному процессу с дискретным временным интервалом Т.

Определение 4. Носителем нечеткого случайного процесса $\tilde{\xi}_t(\omega)(x)$ называется множество $\mathrm{supp}(\tilde{\xi}_t(\omega)(x) = \{x \in E^1 \mid \tilde{\xi}_t(\omega) \neq 0\}$

Определение 5. Ковариация случайных нечетких величин $\tilde{X}_t$, $\tilde{Y}_t$ определяется как

$$Cov(\tilde{X}_t, \tilde{Y}_t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (Cov(\tilde{X}_t^-(\alpha), \tilde{Y}_t^-(\alpha))d\alpha + Cov(\tilde{X}_t^+(\alpha), \tilde{Y}_t^+ d\alpha))$$

здесь: $\tilde{X}_t^{-}(\alpha), \tilde{X}^{+}{}_t(\alpha)$ – левые и правые границы r-уровневых множеств соответствующих нечетких случайных величин в данный фиксированный момент времени $t \in T$.

Определение 6. Математическим ожиданием случайных нечетких величин $\tilde{X}_t(\omega)(r)$ будет определяться как нечеткая величина такая, что $E\tilde{X}_t(\omega)(r) = [E\tilde{X}_t^-(\omega)(r), E\tilde{X}_t^+(\omega)(r)]$.

Определенная таким образом ковариация является четкой величиной. Альтернативный подход к определению моментов предлагается в [4, 5], если ввести меру возможности для нечеткого случайного процесса, однозначно определяемую через распределение возможности.

В дальнейшем ограничимся случаем рассмотрения предлагаемого подхода, когда задан случайный интервал области изменения нечеткого случайного процесса с заданным временным интервалом T, который, вообще говоря, может быть также нечетким. Ограничимся рассмотрением нечетких случайных процессов вида [6, 11]:

$$\tilde{\xi}(t,\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) \cdot \varphi(t),$$

где: $t \in T = [a,b]$, $\tilde{\alpha}(\omega)$ – нечеткая случайная функция от $\omega \in \Omega$, $\varphi(t)$ – четкая случайная функция от времени $t \in T$.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу фильтрации непосредственно полезной составляющей $s(t)$, если имеются измерения $y(t)$ полезного сигнала $s(t)$ в смеси с белым шумом известной интенсивности τ^2, $t \le t_0$.

Предполагается, что процесс $s(t)$ имеет вид:

$$s(t) = s^I(t) + \tilde{s}_{II}(t), \tag{1}$$

где: $s^I(t)$ – известный случайный процесс с заданной спектральной плотностью $T(\lambda)$, а о спектральной плотности процесса $\tilde{s}_{II}(t)$ известна лишь система моментных неравенств которой она должна удовлетворять, иными словами спектральную плотность из (1) можно представить в виде:

$$B(\lambda) = T(\lambda) + \tilde{h}(\lambda),$$

где:

$$\tilde{h}(\lambda) \in \tilde{\Psi} = \{\tilde{h}(\lambda) \in L_1(\lambda) \mid \int_\Lambda \psi_j(\lambda)\tilde{h}(\lambda)d\lambda \le a_j, j = 1,...n\} \tag{2}$$

$a_j \in R^n_+$ – заданный вектор ограничений;

$R^n{}_+$ – положительный ортант пространства $R^n{}_+$;

$\psi_j(\lambda) \in R_+{}^n$ – заданные неотрицательные четные по λ вектор-функции частоты;

Λ – заданное подмножество оси частот положительной меры (возможно и бесконечной) $mes\Lambda > 0$.

Ниже рассматривается нечеткий аналог минимаксного подхода отыскания седловой точки при ограничениях, наложенных на физическую реализуемость искомого фильтра $G^0(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty)$ в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ у игры фильтрации, $L_2(\lambda)$ – множество интегрируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля функций, заданных на измеримом подмножестве действительной прямой.

Пространством стратегий первого игрока, стремящегося максимизировать функциональный выигрыш $D(G^0(\lambda),\widetilde{h}(\lambda))$, является множество допустимых спектральных нечетких плотностей $\tilde{\Psi}$, а пространством стратегий второго игрока, стремящегося минимизировать $D(G^0(\lambda),\widetilde{h}(\lambda))$, является множество допустимых ЧХ (частотных характеристик) линейных фильтров – Φ.

Если в игре существует седловая точка $(G^0(\lambda),\widetilde{h}(\lambda))$, то

$$\min_{G^o\in\Phi}\max_{\tilde{h}\in\Psi} D(G^0(\lambda),\tilde{h}^0(\lambda)) = \max_{\tilde{h}\in\Psi}\min_{G^o\in\Phi} D(G^0(\lambda),\tilde{h}^0(\lambda)), \quad (3)$$

а $G^0(\lambda)$ – минимаксным фильтром.

Отметим, что в большинстве минимаксных задач оценивания (по крайней мере во всех интересных с технической точки зрения задачах) седловые точки существуют.

Ниже рассматривается задача фильтрации процесса $x(\tau)$, являющегося линейным преобразованием процесса **s(t)** с известной ЧХ $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} q_k (i\lambda)^k . \quad (4)$$

Таким образом $x(\tau)$ может представлять собой различные производные процесса $s(\tau)$ $(\mathbf{Q}(\lambda) = (\mathbf{i}\lambda)^k)$, сам процесс $Q(\lambda) = 1$, всевозможные конечные линейные комбинации этих процессов.

В предположении, что у игры существует седловая точка $(G^0(\lambda),\widetilde{h}(\lambda))$ имеем с одной стороны $G^0(\lambda)$ – фильтр Винера [7]:

$$G^0(\lambda) = \frac{1}{X_u^+}\{Q(\lambda)[X_u{}^+(\lambda) - \frac{1}{X^-{}_u(\lambda)}]\}_+, \quad (5)$$

$$X_u(\lambda) = |X^+{}_u(\lambda)|^2 = 1 + \widetilde{h}^0(\lambda) + T(\lambda),$$

где: $\{F_+(\lambda)\}$ – аналитическая в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ аддитивная составляющая.

Через $F^+(\lambda)$ – обозначена факторизация функции $F(\lambda) = F^+(\lambda)\cdot F^-(\lambda)$, где $F^+(\lambda)$ и $[F^+(\lambda)]^{-1}$ аналитические в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ а $F^-(\lambda)$ и $[F^+(\lambda)]^{-1}$ аналитические в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ и, кроме того, $F^-(\lambda) = F^+(\lambda)^*$, где * – означает операцию комплексного сопряжения.

С другой стороны, $\widetilde{h}^0(\lambda)$ является решением проблемы моментов $\widetilde{h}^0(\lambda) \geq 0$ почти всюду по $\lambda \in \Lambda$ – нечеткая случайная плотность соответсвующая нечеткой спектральной мере $\widetilde{H}(\lambda) = h(\lambda)d\lambda$

$$\int_{\Lambda} |G^0(\lambda) - Q(\lambda)|^2 \, \tilde{h}(\lambda) d\lambda \to \max , \quad (6)$$

$$\int_{\Lambda} \psi_j(\lambda)\tilde{h}(\lambda)d\lambda \le a_j,\ j=1,...,n;\ \tilde{\boldsymbol{h}}\ (\lambda) \ge 0 \text{ почти всюду по } \lambda \in \Lambda \text{ -}$$

Априори не всегда известны параметры ограничений $\boldsymbol{a}_j$. Ниже будет попутно рассмотрен алгоритм практического выбора оценки неизвестного параметра $\boldsymbol{a}_j$.

Алгоритм отыскания наихудшей спектральной плотности $G(\lambda)$ в условиях присутствия нечеткого возмущения в полезной составляющей

Пусть $\tilde{\xi}_t(\omega)$ $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T} = [0, \ell]$ – стационарный скалярный нечеткий случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $\boldsymbol{K}_{\xi}(\tau)$, которая является непрерывной на отрезке $[-\ell, +\ell]$, удовлетворяет условиям Дирихле, то есть может быть представима в виде ряда Фурье:

$$K_{\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\sigma}_k^2 \cos\frac{2\pi k\tau}{l}, \tag{7}$$

где: $\tilde{\sigma}_k{}^2$ – коэффициенты ряда Фурье для ковариационной функции $\boldsymbol{K}_{\xi}(\tau)$ (вообще говоря нечеткие).

Согласно теореме [6], рассматриваемый случайный процесс представим суммой ряда Фурье :

$$\tilde{\xi}_t(\omega) = \frac{\tilde{\alpha}_0(\omega)}{2} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(\omega)\cos\frac{2\pi \boldsymbol{kt}}{\ell} + \tilde{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\omega)\sin\frac{2\pi \boldsymbol{kt}}{\ell}\ ,\ \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T},$$

где:

$$\tilde{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(\omega) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \tilde{\xi}(\boldsymbol{t},\omega)\cos\frac{2\pi \boldsymbol{kt}}{\ell}\boldsymbol{dt},\ \boldsymbol{k} \ge 0, \tag{8}$$

$$\tilde{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\omega) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \tilde{\xi}(\boldsymbol{t},\omega)\sin\frac{2\pi \boldsymbol{kt}}{\ell}\boldsymbol{dt},\ \boldsymbol{k} \ge 1$$

При этом амплитуды гармоник $\tilde{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(\omega)$ и $\tilde{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\omega)$ $(\kappa \ge 1)$ являются некоррелированными нечеткими случайными величинами, имеют нулевое математическое ожидание и дисперсии::

$$\boldsymbol{D}[\tilde{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(\omega)] = \sigma_{\boldsymbol{k}}{}^2,\ \boldsymbol{D}[\tilde{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\omega)] = \sigma_{\boldsymbol{k}}{}^2, \boldsymbol{k} \ge 1$$

$$\tilde{\Phi}_k(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\tilde{\alpha}_k(\omega) - i\tilde{\beta}_k(\omega)] & \text{k} \ge 1; \\ \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_k(\omega) & \text{k=0}; \\ \frac{1}{2}[\tilde{\alpha}_{|k|}(\omega) + i\tilde{\beta}_{|k|}(\omega)] & k \le \text{-1}, \end{cases} \tag{9}$$

Если воспользоваться формулами Эйлера и ввести нечеткие случайные величины, то нетрудно показать [6], что интенсивность $|\tilde{\Phi}_{\boldsymbol{k}}(\omega)|^2$, определенная как нечеткая полу сумма квадратов амплитуд гармоник $\tilde{\alpha}_{\boldsymbol{k}}(\omega)$ и $\tilde{\beta}_{\boldsymbol{k}}(\omega)$ в пределе, равна нечеткой спектральной плотности $\tilde{\boldsymbol{h}}^0(\lambda)$, $\ell \to \infty$, $\nu_{\boldsymbol{k}} = \frac{2\pi \boldsymbol{k}}{\ell}$, $\Delta\nu_{\boldsymbol{k}} = \nu_{\boldsymbol{k}} - \nu_{\boldsymbol{k}-1} = \frac{2\pi}{\ell} \to 0$, то есть реализуется переход от дискретного спектра к непрерывному. Следует заметить, что так определенная нечеткая случайная мера – $|\tilde{\Phi}_{\boldsymbol{k}}(\omega)|^2$ обладает свойством супер аддитивной [8] нечеткой меры.

Полученный результат является нечетким аналогом “средней энергии” для обычного стационарного скалярного случайного процесса. При этом если исходный процесс является вещественным, то:

$$2\int_0^{\infty}\tilde{\boldsymbol{h}}_{\xi}(\lambda)=\boldsymbol{D}[\tilde{\xi}_{\boldsymbol{t}}(\omega)]=\boldsymbol{K}_{\xi}(0)=\tilde{\sigma}^2 \qquad (10)$$

и мы можем в качестве первого приближения взять эту величину как приближенную верхнюю оценку параметров $\boldsymbol{a}_j$ в моментных ограничениях (3.2).

В итоге имеем экстремальную задачу в форме моментов Маркова [10, 11] при линейных ограничениях на нечеткую спектральную плотность $\tilde{\boldsymbol{h}}\ (\lambda)$. В предположении, что выполнены условия 1-4 теоремы П.42 [7] , в этом случае множество решений есть непустой выпуклый компакт и можно показать аналогично [7] , что необходимыми и достаточными условиями оптимальности нечеткой меры $\boldsymbol{h}(\lambda)\boldsymbol{d}\lambda$ в задаче (3.6) является существование такого вектора $\alpha^0\in\boldsymbol{R}_+^{\boldsymbol{m}}$, что $\alpha^0\in R_+^m$,

$$\nu=a-\int_{\Lambda(\alpha^0)} f(\lambda)\tilde{h}^0(\lambda)d\lambda\in R_{+,}{}^{m} \qquad (11)$$

$<\alpha^0,\nu>=\arg\max[g(\lambda)-<\alpha^0,f(\lambda)>]$ $\tilde{\boldsymbol{h}}^0(\lambda)$ сосредоточена на множестве $\Lambda(\alpha^0)$; $\tilde{\boldsymbol{h}}^0(\lambda)=0$ при $\lambda\notin\Lambda(\alpha^0)$.

Здесь $<\ ,\ >$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}_+{}^{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{f}(\lambda)\in\overline{\boldsymbol{R}}_+^{\boldsymbol{m}}$ и $\boldsymbol{g}(\lambda)$ – измеримые относительно меры Лебега функции.

Пример

Пусть полезная составляющая подчиняется уравнению:

$$\dot{\boldsymbol{s}}=\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t}),$$

где: $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$ – нечеткое возмущение с нулевым средним и ограниченной дисперсией $\boldsymbol{E}\tilde{\boldsymbol{u}}^2(\boldsymbol{t})\le\boldsymbol{a}$

Очевидно, что условия 1-4 выполнены. Требуется оценить $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ с учетом области сосредоточения возмущения – $[-\lambda_{\boldsymbol{u}},\lambda_{\boldsymbol{u}}]$. В этом случае $\boldsymbol{Q}(\lambda)=1$, **n**=1, $\Psi(\lambda)=\lambda^2, \boldsymbol{T}(\lambda)=0$ и система соотношений необходимых и достаточных условий оптимальности наименее благоприятной нечеткой спектральной плотности процесса - $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$ на области сосредоточения – $[-\lambda_{\boldsymbol{u}},\lambda_{\boldsymbol{u}}]$ сводится к нелинейному уравнению:

$$\int_0^{\lambda_u}(\lambda_u{}^2-\lambda^2)d\lambda=a/\tau^2,$$

где: $\lambda_{\boldsymbol{u}}=\alpha^{-1/2}$.

То есть $\lambda_{\boldsymbol{u}}=\sqrt[3]{\dfrac{3\boldsymbol{a}}{4\tau^2}}$; $\alpha_0=(\dfrac{4}{3}\dfrac{\tau^2}{\boldsymbol{a}})^{2/3}$. Из выражения для $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G}^0(\lambda),\tilde{\boldsymbol{h}}(\lambda))$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G}^0(\lambda),\tilde{\boldsymbol{h}}(\lambda))=\tau^2\int_{-\infty}^{\infty}\ln\tilde{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{u}}(\lambda)\boldsymbol{d}\lambda,$$

где: $\tilde{X}_u(\lambda)=1+[T(\lambda)+\tilde{h}(\lambda)]/\tau^2$, следует, что $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G}^0(\lambda),\tilde{\boldsymbol{h}}(\lambda))=4\tau^2\lambda_{\boldsymbol{u}}$, а спектр наихудшего нечеткого удовлетворяет уравнению $\tilde{\boldsymbol{h}}^0(\lambda)=\tau^2\max[0;\lambda_{\boldsymbol{u}}^2-\lambda^2]$, а ЧХ фильтра, как это следует из выражения для оптимального фильтра (3.5) имеет вид:

$$G^0(\lambda) = 1 - \exp(-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\lambda_u}^{\lambda_u} \ln\frac{\lambda_u^{\,2}}{\mu}\frac{d\mu}{\lambda-\mu})$$

Заключение

В работе специфицирован линейный минимаксный метод для решения эквивалентного аналога задачи минимаксной линейной фильтрации в условиях присутствия нечетких случайных данных, когда отсутствует достоверная априорная информация о статистических свойствах возмущений в данных скалярного измеряемого сигнала. В плане дальнейших исследований предполагается его специфицировать и применить для решения нечеткой задачи интерполяции, фильтрации и экстраполяции произвольно измеряемого сигнала.

Литература

1. Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy sets and systems. 1978.V.1.
2. Nahmias S. Fuzzy variables in random environment // Advanced in fuzzy sets theory. NHCP. 1979.
3. Sugeno M., Terano T. Analytic representation of fuzzy systems// Fuzzy Automata and Decision Processes, Amsterdam : North- Holland , 1977. P. 177- 189.
4. Хохлов М.Ю. Нечеткие случайные величины и их числовые характеристики // Методы и алгоритмы исследования задач оптимального управления. Тверь, 2000.
5. Новикова В.Н., Турлаков А.П. Задача максимизации возможности достижения нечеткой случайной цели // Модели и методы оптимизации. Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, № 13 , Тверь, 2009. – С. 79-96.
6. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. М.: Издательство МГТУ им. Баумана 1999. 447 с.
7. Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А. Минимаксная обработка информации. М.: Энергоатомиздат, 1990. 216 с.
8. Бочарников В.П. Fuzzy - технология : Математические основы. Практика моделирования в экономике.- Санкт - Петербург: “Наука” РАН, 2001. - 328 с.
9. Кардин С., Стадден В. Дж. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
10. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и эктремальные задачи. М.: Наука, 1973.
11. Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1976.