Задача оптимизации распределения толщины пластины в исследовании проблемы панельного флаттера

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, vm@mami.ru

Аннотация. С использованием линейной поршневой теории исследован флаттер прямоугольной пластины переменной толщины, находящейся в сверхзвуковом потоке газа. Предложен вариант решения задачи оптимизации распределения толщины при некоторых дополнительных ограничениях. С помощью метода Галеркина в четырехчленном приближении найдена критическая скорость потока при различных значениях параметров, проведено сравнение результатов.

Ключевые слова: *флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.*

Задача о флаттере пластины постоянной толщины изучена достаточно подробно как с использованием линейной поршневой теории, так и в случае некоторых других новых постановок [1-7]. При этом работ, где исследовалась бы устойчивость в потоке газа пластины переменной толщины или жесткости, относительно немного, и исследована в них, как правило, только бесконечная полоса [8]. Исключение составляют статьи [9-11], в которых рассмотрена конечная пластина. В данной работе представлено исследование задачи линейного флаттера прямоугольной пластины переменной толщины в рамках линейной поршневой теории. Предложен вариант решения задачи оптимизации распределения толщины пластины для повышения устойчивости.

Рассмотрим прямоугольную пластину длины l_1 и ширины l_2 с шарнирно опертыми краями. В прямоугольной системе координат пластина занимает область $\{0 \le x \le 1/s, 0 \le y \le 1\}$, ось OX направлена по стороне длины l_1. Пластина обтекается сверхзвуковым потоком газа. Вектор скорости потока лежит в плоскости пластины, угол между ним и осью OX обозначим через θ. Толщина пластины будет переменной величиной $h = h_0(1+\delta \cdot f(x,y))$, где: $f(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, а δ – малый параметр. Тогда цилиндрическую жёсткость с точностью до малых высшего порядка можно записать так:

$$D \approx D_0(1+\varepsilon f(x,y)),$$

где: $D_0 = \dfrac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}$, $\varepsilon = 3\delta$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала пластины. Согласно [8] линейное уравнение колебаний будет иметь вид:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2(1-\nu)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+2\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)+2(1-\nu)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)\right)+$$

$$+(1+\varepsilon f)\Delta^2 w+\frac{\kappa p}{D_0}\left(\frac{1}{c_0}\frac{\partial w}{\partial t}+M\cos\theta\frac{\partial w}{\partial x}+M\sin\theta\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\rho h_0}{D_0}\left(1+\frac{\varepsilon}{3}f\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

с соответствующими граничными условиями, где: p и c_0 – давление и скорость звука в покоящемся газе, w – прогибы пластины, ρ – плотность материала, κ – показатель политропы, ν

– скорость потока, число Маха $M=\dfrac{v}{c_0}$.

Пусть функция f может быть представлена в виде:

$$f(x,y)=f_1(x)+f_2(y),$$

где: $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – симметричные относительно соответствующих середин сторон пластины функции, удовлетворяющие условиям:

$$\int_0^{1/s} f_1(x)dx=0,\ \int_0^1 f_2(y)dy=0.$$

Решения будем искать в классе функций:

$$w=\exp(\omega t)(c_1\sin\pi sx\sin\pi y+c_2\sin 2\pi sx\sin\pi y+c_3\sin\pi sx\sin 2\pi y+c_4\sin 2\pi sx\sin 2\pi y),$$

где: $c_1,c_2,c_3,c_4\in R$.

Критическую скорость потока $v_{\text{кр}}$ будем находить как наименьшую скорость v, при которой комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость. Проведя процедуру Бубнова-Галеркина, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными. Условие существования нетривиального решения составляет характеристическое уравнение, содержащее ω и M. Переходу от устойчивого состояния к неустойчивому будет соответствовать чисто мнимое значение ω. Приравняв к нулю действительные и мнимые части уравнения, получим с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно δ выражение для $M_{\text{кр}}=v_{\text{кр}}/c_0$:

$$M_{\text{кр}}^2=M_0^2+\varepsilon M_1\int_0^{1/s} f_1(x)\sin^2 s\pi x dx+\varepsilon M_2\int_0^{1/s} f_1(x)\sin^2 2s\pi x dx+$$

$$+\varepsilon M_3\int_0^1 f_2(y)\sin^2\pi y dy+\varepsilon M_4\int_0^1 f_2(y)\sin^2 2\pi y dy.$$

Задача оптимизации состоит в том, чтобы определить такую функцию f, при которой $M_{\text{кр}}$ принимает наибольшее значение при некоторых дополнительных ограничениях. В качестве ограничений, следуя [12], возьмем вышеуказанные условия и

$$\int_0^{1/s}(f_1'(x))^2dx\le C,\ \int_0^1 (f_2'(y))^2dy\le C.$$

Первые условия означают постоянство перпендикулярного сечения пластины при фиксированной другой координате, вторые – что решение задачи ищется в классе гладких функций.

Функция Лагранжа рассматриваемой задачи имеет вид:

$$L(f)=f_1(x)\sin^2\pi sx+\lambda_1 f_1(x)\sin^2 2\pi sx+\lambda_2(f_1'(x))^2+\lambda_3 f_1(x)+\lambda_4 f_2(y)\sin^2\pi y+$$

$$+\lambda_5 f_2(y)\sin^2 2\pi y+\lambda_6(f_2'(y))^2+\lambda_7 f_2(y),$$

где: λ_i – неопределенные множители.

Из условий стационарности получаем систему уравнений:

$$\sin^2\pi sx+\lambda_1\sin^2 2\pi sx-2\lambda_2 f_1''(x)+\lambda_3=0,$$

$$\lambda_4\sin^2\pi y+\lambda_5\sin^2 2\pi y-2\lambda_6 f_2''(y)+\lambda_7=0,$$

из которой находим:

$$f_1(x)=\eta_1+\eta_2 x+\frac{\lambda_1+2\lambda_3+1}{8\lambda_2}x^2+\frac{\cos 2\pi sx}{16\pi^2 s^2\lambda_2}+\frac{\lambda_1\cos 4\pi sx}{64\pi^2 s^2\lambda_2},$$

$$f_2(y)=\mu_1+\mu_2 y+\frac{2\lambda_7+\lambda_4}{8\lambda_6}y^2+\frac{\lambda_4\cos 2\pi y}{16\pi^2\lambda_6}+\frac{\lambda_5\cos 4\pi y}{64\pi^2\lambda_6}\ .$$

Обозначим $\eta_3=\dfrac{\lambda_1+2\lambda_3+1}{8\lambda_2}$, $\mu_3=\dfrac{2\lambda_7+\lambda_4}{8\lambda_6}$ и примем условия нормировки $\lambda_4=1{,}16\pi^2 s^2\lambda_2=1$, $16\pi^2\lambda_6=1$.

Тогда:

$$f_1(x)=\eta_1+\eta_2 x+\eta_3 x^2+\cos 2\pi sx+\frac{\lambda_1\cos 4\pi sx}{4},$$

$$f_2(y)=\mu_1+\mu_2 y+\mu_3 y^2+\cos 2\pi y+\frac{\lambda_5\cos 4\pi y}{4}.$$

Параметры η_i и μ_i находятся из граничных условий и вышеуказанных ограничений. Учитывая симметричность функций f_1 и f_2, положим:

$$f_1'(0)=\psi,\quad f_1'(1/s)=-\psi\ ,\quad f_2'(0)=\gamma,\quad f_2'(1)=-\gamma\ .$$

Из равенства нулю интегралов получаем:

$$\eta_1=-\frac{\psi}{6s^2},\ \eta_2=\psi,\ \eta_3=-\psi,\ \mu_1=-\frac{\gamma}{6},\ \mu_2=\gamma,\ \mu_3=-\gamma\ .$$

Окончательно будем иметь:

$$f_1(x)=-\frac{\psi}{6s^2}+\psi x-\psi sx^2+\cos 2\pi sx+\frac{\lambda_1}{4}\cos 4\pi sx\ ,$$

$$f_2(y)=-\frac{\gamma}{6}+\gamma y(1-y)+\cos 2\pi y+\frac{\lambda_5}{4}\cos 4\pi y\ .$$

При этом для достижения эффекта оптимизации знак δ нужно выбирать в зависимости от коэффициентов M_i.

В качестве примера рассмотрим стальную пластину, находящуюся в потоке воздуха, при следующих значениях параметров:

$$p=10^5\,Па,\ \kappa=1{,}4,\ c_0=330\ м/с\ ,\ E=2\cdot 10^{11}\,Па,\ \rho=8\cdot 10^3\,кг/м^3,\ \nu=0{,}3\ ,$$

$$h_0=0{,}001\ м,\ l_2/h_0=250\ .$$

Функцию f возьмем в виде:

$$f(x,y)=-\frac{\psi}{6s^2}+\psi x-\psi sx^2+m\cos 2\pi sx+\frac{\lambda_1}{4}\cos 4\pi sx-\frac{\gamma}{6}+\gamma y(1-y)+n\cos 2\pi y+\frac{\lambda_5}{4}\cos 4\pi y\ .$$

Результаты вычислений $M_{кр}$ содержатся в таблицах.

Из таблиц видно, что критическая скорость достигает экстремальных значений для функций f полученного выше вида (значения коэффициентов ψ,γ, λ_1 и λ_5 могут варьироваться и выбираются с учетом требования достаточно малого изменения толщины). Наибольшую и наименьшую величину критическая скорость во всех случаях достигает при одинаковых минимальных и максимальных значениях параметров. Как и отмечалось ранее [11] , утолщение к центру увеличивает критическую скорость, а к краям – понижает устойчивость. Концентрация материала пластины вдоль стороны, параллельной потоку, играет большую роль, чем вдоль перпендикулярной к нему. Наличие ненулевых коэффициентов λ_1 и λ_5, добавляющих волнообразность изменения толщины вдоль одной из кромок, проявляется противоположным образом. Удлинение пластины поперек потока усиливает эффект изменения толщины, а вдоль – смягчает. Неравномерное распределение материала вдоль одной стороны не оказывает заметного влияния на зависимость критической скорости от изменения толщины вдоль другой стороны.

Таблица 1.

Значения критической скорости для квадратной пластины при $\theta = 0$

	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = -0{,}01$
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = 0, \gamma = 0$	3,23	3,23
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = 0, \gamma = 0$	3,19	3,26
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = 12, \gamma = 12$	3,20	3,25
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = -12, \gamma = -12$	3,18	3,28
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_5 = 0, \psi = 0, \gamma = 0$	3,17	3,29
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_5 = 0, \psi = -12, \gamma = -12$	3,16	3,30
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = -12, \gamma = -12$	3,19	3,26
$m = n = 1, \lambda_1 = -4, \lambda_5 = 0, \psi = -12, \gamma = -12$	3,20	3,26
$m = n = 1, \lambda_1 = -4, \lambda_5 = 0, \psi = 12, \gamma = 12$	3,22	3,24
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_5 = 0, \psi = 0, \gamma = -12$	3,16	3,30
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_5 = 0, \psi = -12, \gamma = 0$	3,17	3,29
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = 0, \gamma = -12$	3,18	3,27
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \psi = -12, \gamma = 0$	3,19	3,27
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 4, \psi = -12, \gamma = -12$	3,18	3,28
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_5 = 4, \psi = -12, \gamma = -12$	3,16	3,30
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \lambda_5 = 4, \psi = 0, \gamma = 0$	3,17	3,29
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 4, \psi = 0, \gamma = 0$	3,19	3,26

Таблица 2.

Значения критической скорости при $s = 2/3, \theta = 0$

	$\varepsilon = 0{,}05$	$\varepsilon = -0{,}05$
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 0$	1,32	1,32
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	1,26	1,43
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	1,27	1,40
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 0, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	1,27	1,42
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = 0, \lambda_5 = 4$	1,27	1,41
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	1,26	1,43

Таблица 3.

Значения критической скорости при $s = 2/3, \theta = \pi/2$

	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = -0{,}01$
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 0$	2,72	2,72
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	2,64	2,80
$m = n = 1, \lambda_1 = -4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	2,69	2,75
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 12, \gamma = 12, \lambda_5 = 0$	2,67	2,76
$m = n = 1, \lambda_1 = -4, \psi = 12, \gamma = 12, \lambda_5 = 0$	2,72	2,71
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	2,64	2,79
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = 12, \lambda_5 = 0$	2,66	2,77
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	2,66	2,77
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 0, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	2,64	2,80
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = 0, \lambda_5 = 4$	2,65	2,79
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	2,64	2,80

Таблица 4.

Значения критической скорости при $s = 1, \theta = \pi / 6$

	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = -0{,}01$
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 0$	3,52	3,52
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	3,44	3,60
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = 0, \lambda_5 = 4$	3,45	3,59
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	3,46	3,58
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 0, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	3,44	3,60
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	3,44	3,60

Таблица 5.

Значения критической скорости при $s = 1, \theta = \pi / 4$

	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = -0{,}01$
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 0$	3,69	3,69
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 0$	3,63	3,75
$m = n = 1, \lambda_1 = -4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	3,63	3,75
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	3,61	3,77
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	3,62	3,76
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	3,61	3,77
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 4$	3,63	3,75
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	3,60	3,78

Таблица 6.

Значения критической скорости при $s = 2/3, \theta = \pi / 4$

	$\varepsilon = 0{,}03$	$\varepsilon = -0{,}03$
$m = n = 0, \lambda_1 = 0, \psi = 0, \gamma = 0, \lambda_5 = 0$	1,75	1,75
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 0$	1,69	1,84
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = 0, \lambda_5 = 4$	1,69	1,84
$m = n = 1, \lambda_1 = 0, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	1,68	1,84
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = 0, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	1,69	1,84
$m = n = 1, \lambda_1 = 4, \psi = -12, \gamma = -12, \lambda_5 = 4$	1,68	1,85

Выводы

В работе исследован флаттер конечной пластины переменной толщины. Найдена критическая скорость потока при различных значениях параметров, выявлены общие закономерности. Решена задача оптимизации распределения материала пластины при некоторых дополнительных ограничениях. Результаты могут быть использованы при расчетах надежности летательных аппаратов.

Литература

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. - М.: Наука, 2006. 248 с.
2. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины. // Депонир. в ВИНИТИ . 1998, № 1027-В98.
3. Кудрявцев Б.Ю. Нелинейные аэроупругие колебания пластины. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2004 . № 4 . С. 16-19.
4. Кийко И.А., Показеев В.В. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа // Докл. РАН . 2005 . Т. 401. № 3. С. 342-344.
5. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой пластины, находящейся в потоке газа, при умеренных

сверхзвуковых скоростях.// Известия ТулГУ,сер. матем.,мех., информатика. 2005. Т.11. В.3. С. 99-102.
6. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной панели, составляющей часть поверхности тонкого клина. // Вестн. МГУ. Сер. 1: Мат. Мех. 2011. № 2. С. 59-62.
7. Показеев В.В., Кийко С.И., Кудрявцев Б.Ю. О моделировании процесса колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа. // Известия МГТУ МАМИ. 2013. № 1. Т. 3. с. 101-104.
8. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой полосы переменной жесткости. / /Депонир. в ВИНИТИ. 1997. № 1103-В97.
9. Кудрявцев Б.Ю. Задача о флаттере пластины переменной толщины в уточненной и дополненной постановке. // Известия МГТУ МАМИ. 2011. № 1. С. 231-234.
10. Кадыров А.К. Флаттер пластины переменной жесткости. // Изв. ТулГУ. Сер. мат. мех. инф. 2007. Т. 13. Вып. 2. С. 76-81.
11. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер пластины переменной толщины. Известия МГТУ МАМИ. 2012. № 1(13). С. 249-255.
12. Брадусь А.С., Картвелишвили В.М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций. // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 6. С. 110-139.