Рассеяние энергии при взаимодействии машиностроительного объекта и основания

к.т.н. Рождественский Ю.В.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23 доб. 1318, 1285, kio_61@mail.ru

Аннотация. В статье исследован вопрос рассеяния энергии при передаче её к объекту или, наоборот, от работающего машиностроительного, или иного объекта. Рассмотрены имеющиеся гипотезы рассеяния энергии и оценены результаты их применения с точки зрения реально наблюдаемых процессов и явлений. Диссипативная функция удобно представлена в виде положительно определённой квадратичной формы обобщённых скоростей.

Ключевые слова: *рассеяние энергии, машиностроительный объект, многомассовая система.*

При изучении передачи энергии машиностроительному объекту или, наоборот, от работающего объекта другим невозможно обойтись без исследования вопроса рассеяния энергии. Не бывает реальных механических систем, а тем более в машиностроении или строительстве, где бы не было диссипации энергии. Разрабатываемая проблема передачи энергии машиностроительному или иному объекту также сталкивается с этим явлением, вне зависимости от направления передачи. Рассмотрим в данной статье имеющиеся гипотезы рассеяния энергии и оценим результаты их применения с точки зрения реально наблюдаемых процессов и явлений.

В предыдущих работах [7 - 8] автором дано подробное описание возможного моделирования машиностроительного или иного объекта в виде дискретной механической системы состоящей из твёрдых тел, соединённых между собой посредством упругих связей. В работе [9] приводится плоский рисунок произвольной модели и даётся её механическое и математическое описание. Рассеяние энергии возможно при передаче движения от одного твёрдого тела модели к другому или при взаимосвязи с внешним миром. Учтём это обстоятельство и будем считать, что в связях происходит рассеяние энергии, как обычно бывает в реальных конструкциях. Рассеяние энергии от движения самих твёрдых тел модели учтём через связи и взаимодействие между ними и между телами модели и внешним миром. Далее попытаемся описать диссипацию энергии не только при движении машиностроительного или иного объекта в целом, но и при движении отдельных его частей, когда другие покоятся.

Для учёта рассеяния энергии при движении (колебаниях) неконсервативных систем применяются различные гипотезы [3, 10]: вязкой внешней диссипации Рэлея, вязкого внутреннего трения Кельвина-Фойгта и комплексная гипотеза неупругого внутреннего сопротивления Е. С. Сорокина. Рассмотрим сначала подробно, применительно к проблеме о восприятии машиностроительным или иным объектом внешнего интенсивного воздействия, первые две гипотезы.

При учёте рассеяния энергии по гипотезе Рэлея, вектор сил сопротивления, окружающего машиностроительный или иной объект, записывается в виде массива [3, 10]:

$$\vec{D}_k^{(s)} = \begin{Vmatrix} D_{1k}^{(s)} \\ D_{2k}^{(s)} \end{Vmatrix} = -\left[\varepsilon_{kk}^{(ss)}\right] \cdot \varphi_k^{(s)}\left(\dot{\vec{q}}_k^{(s)}\right) \cdot \frac{\dot{\vec{q}}_k^{(s)}}{\left|\dot{\vec{q}}_k^{(s)}\right|}, \qquad (1)$$

где: $\vec{D}_k^{(s)}$ – вектор внешних сил сопротивления для k-го тела системы (k = I, II, ..., n+m; s = 1, 2), причём при s = 1 $\vec{D}_k^{(1)}$ – двумерный вектор, а при s = 2 $D_k^{(2)}$ – просто один момент сил сопротивления; $\varphi_k^{(s)}\left(\dot{\vec{q}}_k^{(s)}\right)$ – положительные функции, в случае Рэлея [3] $\varphi_k^{(s)}\left(\dot{\vec{q}}_k^{(s)}\right)=\dot{\vec{q}}_k^{(s)}$; $\left[\varepsilon_{kk}^{(ss)}\right]$ – элементарная диагональная матрица констант диссипации энергии, имеющая вид при s = 1 и s = 2:

$$\left[\varepsilon_{kk}^{(11)}\right]=\begin{Vmatrix}\varepsilon_{kk11}^{(11)} & 0\\ 0 & \varepsilon_{kk22}^{(11)}\end{Vmatrix},\varepsilon_{kk}^{(22)}, \tag{2}$$

т. е. при s = 2 матрица вырождается в одно число. Общая блочная диагональная матрица [ε] констант диссипации энергии всей дискретной механической системы получится в виде:

$$[\varepsilon]=\begin{Vmatrix}\left[\varepsilon_{II}^{(11)}\right] & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \left[\varepsilon_{n+mn+m}^{(11)}\right] & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{II}^{(22)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_{n+mn+m}^{(22)}\end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Диссипативная функция многомассовой системы (рисунок приводится в работе [7]), соответствующая выражению сил и моментов сопротивления, (1) может быть представлена следующим образом:

$$\Phi=\int_0^{\dot{\vec{Q}}}\left\{[b]\cdot\vec{D}\left([\varepsilon]\cdot\dot{\vec{Q}}\right)\right\}' d\dot{\vec{Q}}=\frac{1}{2}\dot{\vec{Q}}'\cdot[\beta]\cdot\dot{\vec{Q}} \quad \text{или}$$

$$\Phi=\sum_{k,i=I}^{n+m}\sum_{s,t=1}^{2}\int_0^{\dot{\vec{q}}_k^{(s)}}\left\{\left[b_{ki}^{(st)}\right]\vec{D}_i^{(t)}\left(\left[\varepsilon_{ii}^{(tt)}\right]\dot{\vec{q}}_i^{(s)}\right)\right\}' d\dot{\vec{q}}_k^{(s)}=\frac{1}{2}\sum_{k,i=I}^{n+m}\sum_{s,t=1}^{2}\dot{\vec{q}}_k^{(s)\prime}\left[\beta_{ki}^{(st)}\right]\dot{\vec{q}}_i^{(t)}, \tag{4}$$

где: $\dot{\vec{Q}}'=\left\|\dot{\vec{q}}_I^{(1)\prime},\ \cdots,\ \dot{\vec{q}}_k^{(1)\prime},\ \cdots,\ \dot{\vec{q}}_{n+m}^{(1)\prime},\ q_I^{(2)},\ \cdots,\ q_k^{(2)},\ \cdots,\ q_{n+m}^{(2)}\right\|$ – блочный вектор обобщённых скоростей; [*b*] и [β] – блочные матрицы влияния диссипативных сил и коэффициентов диссипации энергии системы, имеющие вид:

$$[b]=\begin{Vmatrix}\left[b_{II}^{(11)}\right] & \cdots & \left[b_{In+m}^{(11)}\right] & \left[b_{II}^{(12)}\right] & \cdots & \left[b_{In+m}^{(12)}\right]\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left[b_{n+mI}^{(11)}\right] & \cdots & \left[b_{n+mn+m}^{(11)}\right] & \left[b_{n+mI}^{(12)}\right] & \cdots & \left[b_{n+mn+m}^{(12)}\right]\\ \left[b_{II}^{(21)}\right] & \cdots & \left[b_{In+m}^{(21)}\right] & b_{II}^{(22)} & \cdots & b_{In+m}^{(22)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left[b_{n+mI}^{(21)}\right] & \cdots & \left[b_{n+mn+m}^{(21)}\right] & b_{n+mI}^{(22)} & \cdots & b_{n+mn+m}^{(22)}\end{Vmatrix}; \tag{5}$$

$$[\beta]=\begin{Vmatrix}\left[\beta_{II}^{(11)}\right] & \cdots & \left[\beta_{In+m}^{(11)}\right] & \left[\beta_{II}^{(12)}\right] & \cdots & \left[\beta_{In+m}^{(12)}\right]\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left[\beta_{n+mI}^{(11)}\right] & \cdots & \left[\beta_{n+mn+m}^{(11)}\right] & \left[\beta_{n+mI}^{(12)}\right] & \cdots & \left[\beta_{n+mn+m}^{(12)}\right]\\ \left[\beta_{II}^{(21)}\right] & \cdots & \left[\beta_{In+m}^{(21)}\right] & \beta_{II}^{(22)} & \cdots & \beta_{In+m}^{(22)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left[\beta_{n+mI}^{(21)}\right] & \cdots & \left[\beta_{n+mn+m}^{(21)}\right] & \beta_{n+mI}^{(22)} & \cdots & \beta_{n+mn+m}^{(22)}\end{Vmatrix}, \tag{6}$$

где: $\left[b_{ki}^{(st)}\right]$ и $\left[\beta_{ki}^{(st)}\right]$ – элементарные матрицы влияния диссипативных сил и коэффициентов диссипации энергии системы:

$$\left[b_{ki}^{(11)}\right]=\begin{Vmatrix} b_{ki11}^{(11)} & b_{ki12}^{(11)} \\ b_{ki21}^{(11)} & b_{ki22}^{(11)} \end{Vmatrix} \text{ – элементарная матрица размерностью } 2\times 2,$$

$$\left[b_{ki}^{(12)}\right]=\begin{Vmatrix} b_{ki11}^{(12)} \\ b_{ki21}^{(12)} \end{Vmatrix} \text{ – элементарная матрица размерностью } 2\times 1 \qquad (7)$$

$$\left[b_{ki}^{(21)}\right]=\begin{Vmatrix} b_{ki11}^{(21)} & b_{ki12}^{(21)} \end{Vmatrix} \text{ – элементарная матрица размерностью } 1\times 2,$$

$b_{ki}^{(22)}$ – единичный элемент блочной матрицы, где (k,i = I, II, ..., $n+m$)

Элементарные матрицы $\left[\beta_{ki}^{(st)}\right]$ записываются аналогично (7). В приведённых матрицах (5), (6) и (7) $b_{kipq}^{(st)}$ – коэффициент влияния диссипативных сил k-го тела на i-ое тело системы в pq-ом главном направлении пространства; p, q =1, 2; $\beta_{kipq}^{(st)}$ – коэффициент рассеяния энергии k-ым телом системы в pq-ом главном направлении пространства.

Векторы диссипативных сил и значения моментов определяются дифференцированием функции (4) по соответствующим обобщённым скоростям.

Для асимметричных систем $\left[b_{ki}^{(st)}\right],\left[\beta_{ki}^{(st)}\right]\neq 0$ (s, t = 1, 2; $s \neq t$; k, i = I, II, ..., $n+m$) и при конечных амплитудах колебаний, в плоском случае движения $\dot{\vec{q}}_k^{(1)}=\dot{\vec{x}}_k$, $\dot{q}_k^{(2)}=\dot{\alpha}_k$, и векторы диссипативных сил получатся в виде:

$$\vec{D}=[b]\cdot[\varepsilon]\cdot\dot{\vec{Q}}=[\beta]\cdot\dot{\vec{Q}} \qquad \text{или}$$

$$\vec{D}_k^{(s)}=\sum_{i=I}^{n+m}\sum_{t=1}^{2}\left[b_{ki}^{(st)}\right]\left[\varepsilon_{ii}^{(tt)}\right]\dot{\vec{q}}_i^{(t)}=\sum_{i=I}^{n+m}\sum_{t=1}^{2}\left[\beta_{ki}^{(st)}\right]\dot{\vec{q}}_i^{(t)}. \qquad (8)$$

Окончательно вектор диссипативных сил и значение момента сил сопротивления получатся из (8) в следующем виде:

$$\vec{D}_k^{(1)}=\sum_{i=I}^{n+m}\left(\left[\beta_{ki}^{(11)}\right]\cdot\dot{\vec{x}}_i+\left[\beta_{ki}^{(12)}\right]\cdot\dot{\alpha}_i\right),$$
$$D_k^{(2)}=\sum_{i=I}^{n+m}\left(\left[\beta_{ki}^{(21)}\right]\cdot\dot{\vec{x}}_i+\left[\beta_{ki}^{(21)}\right]\cdot\dot{\alpha}_i\right). \qquad (9)$$

Для симметричной системы блочные матрицы [b] и [β] (5), (6) имеют квазидиагональный вид, все элементы имеющие $s \neq t$ равны нулю. Тогда вектор диссипативных сил и значение момента сил сопротивления (8) можно записать следующим образом:

$$\vec{D}_k^{(1)}=\sum_{i=I}^{n+m}\left[\beta_{ki}^{(11)}\right]\cdot\dot{\vec{x}}_i \text{ и } D_k^{(2)}=\sum_{i=I}^{n+m}\beta_{ki}^{(22)}\cdot\dot{\alpha}_i \qquad (10)$$

Отметим, что при плоском движении обобщённые скорости вводятся по формулам $\dot{\vec{q}}_k^{(1)}=\dot{\vec{x}}_k$ и $\dot{q}_k^{(2)}=\dot{\alpha}_k$ и следовательно, полученные выражения (9), (10) справедливы также при конечных амплитудах колебаний.

Зависимость между напряжениями и деформациями в упругих связях механических систем при рассеянии энергии по гипотезе вязкого внутреннего трения Кельвина-Фойгта представляется следующим образом [10]:

$$\sigma = E \cdot \Delta + \varepsilon \cdot E \cdot \frac{d\Delta}{dt}, \tag{11}$$

где: σ, Δ, E и ε – напряжение, деформация, модуль упругости и коэффициент внутренней вязкости, соответствующие упругим связям дискретной механической системы (см. рисунок модели системы в работе [7]).

Диссипативные силы внутренней вязкости, соответствующие зависимости (11) между напряжениями и деформациями, определяются в виде:

$$\vec{D}_k^{(s)} = \left\| \begin{matrix} D_{1k}^{(s)} \\ D_{2k}^{(s)} \end{matrix} \right\| = \left[\varepsilon_{kk}^{(ss)} \right] \cdot \phi_k^{(s)} \left(\dot{\vec{q}}_k^{(s)} \right), \tag{12}$$

где: $\vec{D}_k^{(s)}$ – вектор диссипативных сил; $\left[\varepsilon_{kk}^{(ss)} \right]$ – диагональные матрицы констант внутренней вязкости упругих связей k-го тела системы в s-ом главном направлении пространства (k = I, II, ...$n+m$; s = 1,2); $\varphi_k^{(s)} \left(\dot{\vec{q}}_k^{(s)} \right)$ – нелинейные функции.

Отметим, что для плоского случая движения обобщённые координаты представляют собой непосредственно координаты относительного движения тел механической системы и имеет место соотношение $\varphi_k^{(s)} \left(\dot{\vec{q}}_k^{(s)} \right) = \dot{\vec{q}}_k^{(s)}$, выражение (12) становится аналогичным выражению (1).

Блочная матрица [β] удовлетворяет критериям Сильвестра [1 - 6] и поэтому положительно определённая однородная квадратичная форма (4) может быть сведена к каноническому виду.

Таким образом, диссипативная функция для плоского случая движения с учётом использованных гипотез (1) и (11), как и потенциальная энергия [8], может быть представлена в виде положительно определённой квадратичной формы обобщённых скоростей (4). Это обстоятельство указывает на удобства представления кинетической и потенциальной энергии [7, 8], а также диссипативной функции. Все перечисленные выше понятия описываются одинаковыми, с точки зрения математики, квадратичными формами обобщённых координат и скоростей. Такое универсальное представление понятий, описывающих механическое состояние и движение произвольной дискретной механической модели позволяет, широко использовать их при исследовании передачи энергии изучаемому машиностроительному или иному объекту.

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. М., Наука, 1968.
2. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. М., Наука, 1967.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М., Наука, 1972.
5. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М., Наука, 1980.
6. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М., Наука, 1971.
7. Преображенский И.Н., Рождественский Ю.В., Лесников С.В. Обобщающая математическая модель дискретных механических систем машиностроительных объектов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 1998. – № 2 - 3. – с. 112 - 114.
8. Рождественский Ю.В. Потенциальная энергия дискретной механической модели машиностроительного объекта // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 1998. – № 4. с. 74 - 76.
9. Рождественский Ю.В. Учёт инерционности связей при передаче энергии исследуемому объекту // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 1998. – № 2 - 3. – с. 66 - 69.
10. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М., Стройиздат, 1960.