

Математическое моделирование измерительных преобразователей

К.Т.Н. Головин В.В., д.т.н. проф. Латышенко К.П.

Университет машиностроения

8 (499) 267-0746, dealmark2009@yahoo.com

Аннотация. Приведены математические модели, выбрана оптимальная структура и параметры импульсного измерительного преобразователя.

Ключевые слова: импульсный измерительный преобразователь, оптимальная структура, математическое моделирование

Известно, что импульсный сигнал при прохождении через электрическую цепь подвергается искажению и меняет свою форму, амплитуду, длительность и т.п. Характер этих искажений и их величина связаны с параметрами исходного импульсного сигнала и электрической цепи. Тогда при фиксированной форме и величине импульсного сигнала его искажения будут связаны только с параметрами электрической цепи. Следовательно, можно создать такую цепь в виде первичного измерительного преобразователя (ПИП), включённого в измерительную цепь, чтобы величина и характер искажений исходного импульсного сигнала была бы связана с каким-либо информативным параметром.

Целью настоящей работы является построение математических моделей измерительных преобразователей (ИП), реализующих описанный выше способ, построенных по различным схемам и использующих различные импульсные сигналы.

Пусть дана последовательность импульсных сигналов различной формы (см. рисунок 1), которая, конечно же, не описывает всего многообразия импульсных сигналов. Для этих сигналов изображение по Лапласу $x(p)$ выглядит следующим образом [1]:

$$x(p) = \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau}) (1 + e^{-p\theta} + e^{-p2\theta} + \dots), \quad (1)$$

$$x(p) = \frac{A}{\tau} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p\tau} - \frac{\tau}{p} e^{-p\tau} \right) (1 + e^{-p\theta} + e^{-p2\theta} + \dots), \quad (2)$$

$$x(p) = \frac{2A}{\tau} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} e^{-p\tau/2} + \frac{1}{2} e^{-p\tau} \right) (1 + e^{-p\theta} + e^{-p2\theta} + \dots), \quad (3)$$

где A – амплитуда сигнала; τ – длительность импульса; θ – период сигнала.

В качестве базовых схем ИП предложено использовать типовые звенья, эффективно применяемые на практике.

Пусть импульсный сигнал прямоугольной формы (см. рисунок 1а) проходит через апериодическое звено первого порядка, передаточная функция $W(p)$ которого равна:

$$W(p) = \frac{K}{1 + Tp}, \quad (4)$$

где K – коэффициент усиления звена; T – постоянная времени.

В этом случае при $0 \leq t \leq \tau$:

$$x_{\text{вых}}(t) = AK(1 - e^{-t/T}), \quad (5)$$

а при $\tau \leq t \leq \theta$:

$$x_{\text{вых}}(t) = AK(e^{\tau/T} - 1)e^{-t/T}, \quad (6)$$

где t – текущее время.

Вообще, для $n\theta \leq t \leq \tau\theta + \tau$ имеем:

$$x_{\text{вых}}(t) = AK \left[1 - e^{-t/T} \left(1 + e^{\theta/\tau} - e^{\tau/T} \right) \left(1 + e^{\theta/T} + e^{2\theta/T} + \dots + e^{\frac{(n-1)\theta}{T}} \right) \right]. \quad (7)$$

Введём переменную

$$\tilde{t} = t - n\theta, \quad (8)$$

тогда

$$x_{\text{вых}}(\tilde{t}) = AK \left[1 - e^{-\tilde{t}/T} \left(e^{-\frac{n\theta}{T}} + \frac{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right) \left(1 - e^{-\frac{n\theta}{T}} \right) \right]. \quad (9)$$

При $n \rightarrow \infty$, т.е. при установившемся режиме, выражение (9) для случая $0 \leq \tilde{t} \leq \theta$ имеет вид:

$$x_{\text{вых}}(\tilde{t}) = AK \left(1 - e^{-\tau/T} \frac{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right), \quad (10)$$

а для случая $\tau \leq \tilde{t} \leq \theta$:

$$x_{\text{вых}}(\tilde{t}) = AK e^{-\tilde{t}/T} \frac{e^{\tau/T} - 1}{e^{\theta/T} - 1} e^{\theta/T}. \quad (11)$$

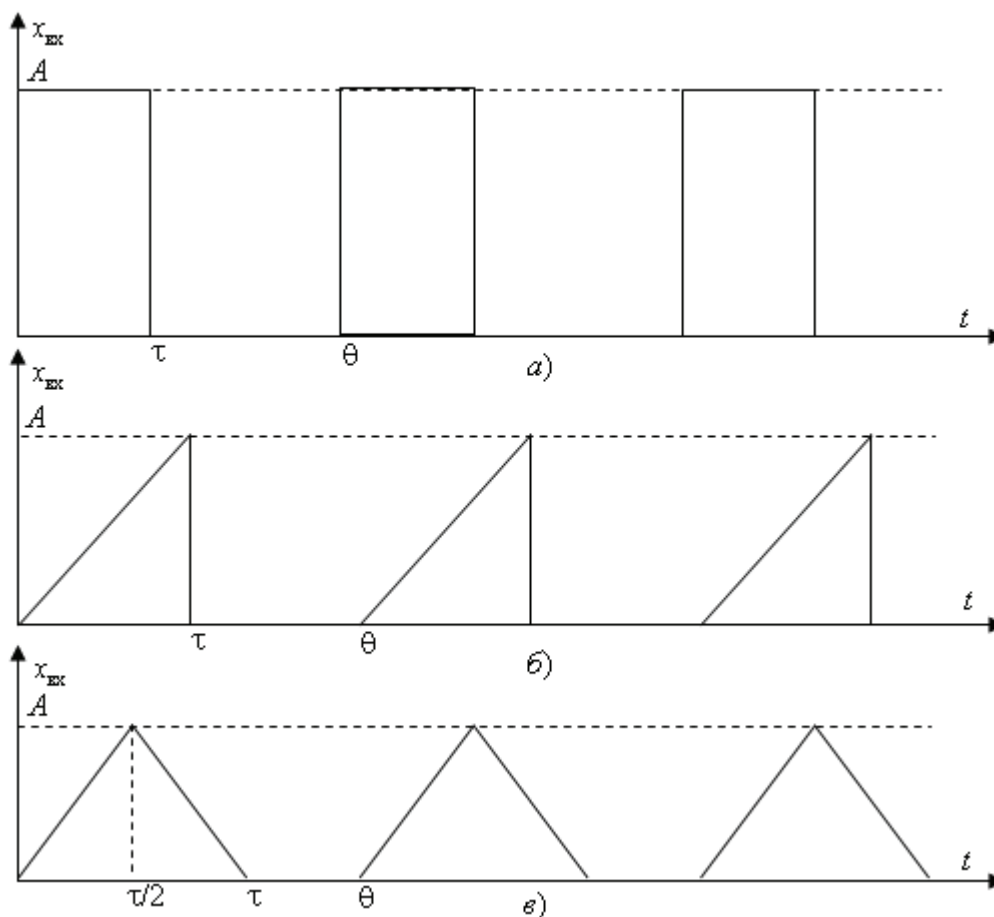


Рисунок 1. Виды импульсных сигналов:

***a* – прямоугольной формы; *б* – пилообразной формы; *в* – треугольной формы**

На рисунке 2 показан один период установившегося импульсного сигнала прямоугольной формы, прошедшего через апериодическое звено первого порядка. При этом нарастающая экспонента описывается уравнением (10), а убывающая – уравнением (11).

Для того чтобы определить длительность искажённого импульса, проведём на уровне m прямую, параллельную оси абсцисс. Тогда текущая ордината будет иметь вид $y = x_{\text{вых}}$, а интеграл от $x_{\text{вых}}$ по \tilde{t} относительно этой прямой будет равен:

$$\int_0^{\theta} y dt = 0, \quad (12)$$

Откуда:

$$m = AK \frac{\tau}{\theta}. \quad (13)$$

Тогда из выражения (10) с учётом (13) найдём время нарастания импульса \tilde{t}_1 (от уровня $\frac{e^{\tau/T} - 1}{e^{\theta/T} - 1} AK$ до уровня $m = AK \frac{\tau}{\theta}$):

$$\tilde{t}_1 = T \ln \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \frac{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right), \quad (14)$$

а время спада импульса \tilde{t}_2 (от уровня $\frac{e^{\tau/T} - 1}{e^{\theta/T} - 1} e^{\frac{\theta - \tau}{T}} AK$ до уровня m) равно:

$$\tilde{t}_2 = T \ln \left(\frac{\theta}{\tau} \frac{e^{\theta/T} (e^{\tau/T} - 1)}{e^{\theta/T} - 1} \right). \quad (15)$$

Откуда легко найдём длительность выходного импульса:

$$\tau_{\text{вых}} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \theta + T \ln \left(\frac{\theta - \tau}{\tau} \frac{e^{\tau/T} - 1}{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}} \right). \quad (16)$$

Из выражения (16) следует, что [2]:

- длительность прямоугольного импульса, прошедшего через апериодическое звено первого порядка $\tau_{\text{вых}}$, отличается от исходной длительности импульса $\tau_{\text{вх}}$;
- при $\theta = 2\tau \rightarrow \tau_{\text{вых}} = \theta - \tau = \tau$ и не зависит от T ;
- при фиксированных θ и τ , а также $\theta \neq 2\tau$ длительность $\tau_{\text{вых}}$ является функцией только постоянной времени звена и, следовательно, определяется только элементами, составляющими это звено;
- длительность выходного импульса $\tau_{\text{вых}}$ не зависит от амплитуды входного импульса и коэффициента усиления апериодического звена, что свидетельствует о нечувствительности к этим параметрам и амплитудным помехам;
- возможно построить ИП, питаемый прямоугольным импульсным сигналом с $\theta \neq 2\tau$, входным параметром которого будет сопротивление R (кондуктометрический ИП) или ёмкость C (дизъюнктивный ИП) ПИП, включённая в апериодическое звено первого порядка, а выходным – длительность импульса, прошедшего через это звено.

Изменение длительности исходного прямоугольного импульса при его прохождении через апериодическое звено первого порядка связано с его искажением, т.е. процессам заряда-разряда ёмкости этого звена. В случае представления прямоугольного импульса как суммы гармоник ряда Фурье, это искажение будет связано с амплитудно-частотной характеристикой звена первого порядка, пропускающего по разному гармоники с различными частотами, в результате чего результирующая этих гармоник будет отличаться от исходного сигнала.

По аналогии с вышеизложенным для импульсного сигнала пилообразной формы (см. рисунок 1б) время нарастания и спада импульса запишем в виде:

$$\tilde{t}_1 = \frac{\tau T}{2\theta} - \left[T - (T - \tau)e^{\tau/T} \right] \frac{e^{-\tilde{t}_1/T}}{e^{\theta/T} - 1} - T(e^{-\tilde{t}_1/T} - 1), \quad (17)$$

$$\tilde{t}_2 = T \ln \left[\frac{2\theta T}{\tau^2} \left(1 - \frac{T - \tau}{T} e^{\tau/T} \right) \frac{e^{\theta/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right]. \quad (18)$$

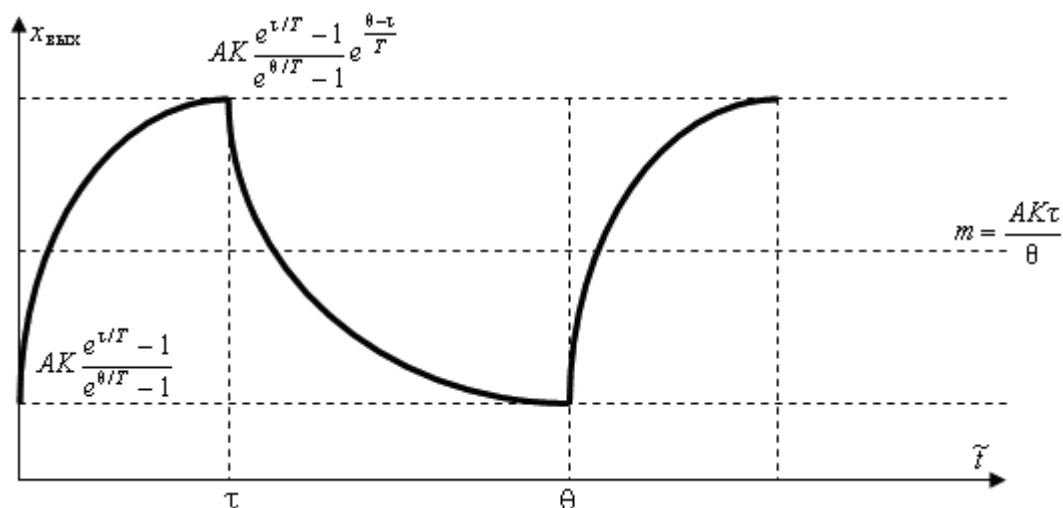


Рисунок 2. Выходной сигнал апериодического звена первого порядка при прямоугольном входном сигнале

Из уравнения (17) следует, что оно неразрешимо относительно параметра \tilde{t} , поэтому выразить в явном виде $\tau_{\text{вых}}$ невозможно. Величина $\tau_{\text{вых}}$ может быть найдена только численным методом.

Для сигнала с треугольной формой время нарастания и спада импульса:

$$\tilde{t}_1 = \frac{T(1 - e^{-\tau/2T})^2}{e^{\theta/T} - 1} e^{-\tilde{t}_1/T} + T(e^{-\tilde{t}_1} + 1) - \frac{\tau}{2\theta}, \quad (19)$$

$$\tilde{t}_2 = T \left\{ \frac{(1 - e^{-\tau/2T})^2}{e^{\theta/T} - 1} e^{-\tilde{t}_2/T} + (1 - 2e^{\tau/2T}) e^{-\tilde{t}_2/T} \right\} + T + \tau \left(1 - \frac{1}{2\theta} \right), \quad (20)$$

$$\tilde{t}_3 = T \ln \left[\frac{2\theta T}{\tau} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{2T}} \right)^2}{e^{\theta/T} - 1} e^{\theta/T} \right]. \quad (21)$$

Из уравнений (19 – 21) видно, что они также неразрешимы относительно параметра \tilde{t} , поэтому система этих уравнений может быть решена только численным методом.

Для дифференцирующего звена без статизма, передаточная функция которого описывается уравнением:

$$W(p) = \frac{KT_0 p}{1 + T_0 p}, \quad (22)$$

при импульсном входном сигнале прямоугольной формы (рисунок 1а) выходной сигнал имеет вид:

– для $0 \leq \tilde{t} \leq \tau$:

$$x_{\text{вых}}(\tilde{t}) = \frac{AKT_0}{T} \frac{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}}{e^{\theta/T} - 1} e^{-\frac{\tilde{t}}{T}}, \quad (23)$$

– для $\tau \leq \tilde{t} \leq \theta$:

$$x_{\text{вых}}(\tilde{t}) = \frac{AKT_0}{T} \frac{e^{\theta/T} (1 - e^{\tau/T})}{e^{\theta/T} - 1} e^{-\frac{\tilde{t}}{T}}. \quad (24)$$

После дифференцирующего звена без статизма импульсный сигнал прямоугольной формы не имеет постоянной составляющей, в точках $\tilde{t} = 0, \tau, \theta$ и т.д. мы имеем разрывы первого рода, а длительность положительного и отрицательного импульсов, соответственно, равна τ и $\theta - \tau$, что исключает возможность использования дифференцирующего звена без статизма в ИП, основанном на измерении длительности выходного импульса по отношению к входному.

Использование дифференцирующего звена с астатизмом с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{KTp}{1 + Tp} \quad (25)$$

является частным случаем выражения (22), при $T = T_0$.

Выходной сигнал для этого звена будет иметь вид

$$\tau_{\text{вых}} = \tau - T \ln \left[\frac{T(e^{\tau/T} - 1)}{\tau} \right]. \quad (26)$$

Интегрирующее звено имеет следующую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{1}{Tp}. \quad (27)$$

При использовании интегрирующего звена можно применять только двуполярный импульсный сигнал, для которого выполняется условие $U_1 \tau = U_2 (\theta - \tau)$, а не однополярный, как на рисунке 1.

Тогда длительность выходного сигнала равна:

$$\tau_{\text{вых}} = \theta / \sqrt{2}. \quad (28)$$

Из выражения (40) следует, что $\tau_{\text{вых}}$ не зависит от параметра T , следовательно, интегрирующее звено не может быть использовано в ИП.

Дифференцирующее звено со статизмом имеет следующую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{K(1 + T_0 p)}{1 + Tp}. \quad (29)$$

При входном импульсном сигнале прямоугольной формы выходной сигнал будет иметь вид:

$$\tau_{\text{вых}} = T \ln \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \frac{T - T_0}{T} \frac{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right). \quad (30)$$

Для импульса пилообразной формы (рисунок 1б) выходной сигнал описывается следующими выражениями:

$$\tilde{t}_1 = \frac{\tau^2}{2\theta} - T_0 + T(1 - e^{-\tau/T}) - \frac{e^{-\tau_1/T}}{e^{\theta/T} - 1} \left[T + \left(T - \frac{T_0 - T}{T} \tau \right) e^{\tau/T} \right], \quad (31)$$

$$\tilde{t}_2 = T \ln \left[\frac{2\theta}{\tau^2} (T - T_0) \left(1 - \frac{T - \tau}{T} e^{\tau/T} \right) \frac{e^{\theta/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right]. \quad (32)$$

Из выражения (43) следует, что оно может быть решено только численным методом.

Инерционное звено второго порядка имеет следующую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{K}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} \quad (33)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения инерционное звено второго порядка может иметь различные переходные характеристики, в результате чего различают апериодическое звено второго порядка и колебательное звено.

Рассмотрим апериодическое звено второго порядка, для которого σ_1 и σ_1 – действительные корни характеристического уравнения. Обозначив

$$B = \frac{K}{2\sigma_1^2 T_1^2 - \sigma_1 T_2}, \quad C = \frac{K}{2\sigma_2^2 T_1^2 - \sigma_2 T_2}, \quad (34)$$

определим изменение выходной величины при прямоугольном входном импульсном сигнале.

Время нарастания и спада сигнала:

$$\tilde{t}_1 = -\frac{1}{\sigma_1} \ln \left\{ \left[\frac{K(\tau - \theta)}{B\theta} - \frac{C}{B} \cdot \frac{e^{\sigma_2 \theta} - e^{\sigma_2 \tau}}{e^{\sigma_2 \theta} - 1} e^{-\sigma_2 \tilde{t}_1} \right] \frac{e^{\sigma_1 \theta} - 1}{e^{\sigma_2 \theta} - e^{\sigma_1 \tau}} \right\}, \quad (35)$$

$$\tilde{t}_2 = -\frac{1}{\sigma_1} \ln \left\{ \left[\frac{K\tau}{B\theta} - \frac{C}{B} \cdot \frac{e^{\sigma_2 \theta}}{e^{\sigma_2 \theta} - 1} (1 - e^{\sigma_2 \tau}) e^{-\sigma_2 \tilde{t}_2} \right] \frac{e^{\sigma_1 \theta} - 1}{e^{\sigma_1 \theta} (1 - e^{\sigma_1 \tau})} \right\}. \quad (36)$$

Из выражений (47, 48) следует, что они могут быть разрешены относительно параметра \tilde{t} только численным методом.

Передачная функция неминимально-фазового звена имеет следующий вид:

$$W(p) = K \frac{1 - T_1 p}{1 + T_2 p}. \quad (37)$$

Длительность прямоугольного импульса, прошедшего неминимально-фазовое звено, равна:

$$\tau_{\text{вых}} = T_2 \ln \left[\frac{\theta - \tau}{\tau} \frac{e^{\theta/T_2} (e^{\tau/T_2} - 1)}{e^{\theta/T_2} - e^{\tau/T_2}} \right]. \quad (38)$$

Таблица 1

Математические модели выходных сигналов различных типовых звеньев при входном импульсном сигнале прямоугольной формы

№	Типовое звено	Математическая модель
1	Апериодическое звено 1-го порядка	$\tau_{\text{вых}} = \theta + T \ln \left(\frac{\theta - \tau}{\tau} \frac{e^{\tau/T} - 1}{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}} \right)$
2	Дифференцирующее звено с астатизмом	$\tau_{\text{вых}} = \tau - T \ln \left[\frac{T(e^{\tau/T} - 1)}{\tau} \right]$
3	Дифференцирующее со статизмом	$\tau_{\text{вых}} = T \ln \left(\frac{\theta}{\theta - \tau} \frac{T - T_0}{T} \frac{e^{\theta/T} - e^{\tau/T}}{e^{\theta/T} - 1} \right)$
4	Неминимально-фазовое звено	$\tau_{\text{вых}} = T_2 \ln \left[\frac{\theta - \tau}{\tau} \frac{e^{\theta/T_2} (e^{\tau/T_2} - 1)}{e^{\theta/T_2} - e^{\tau/T_2}} \right]$

В результате проведенных исследований были рассмотрены следующие звенья: апериодическое первого и второго порядка, дифференцирующее с астатизмом, дифференцирующее без статизма, интегрирующее, дифференцирующее со статизмом и неминимально-фазовое.

В таблице 1 приведены математические модели ИП для различных типовых звеньев при входном импульсном сигнале прямоугольной формы.

При анализе этих звеньев на предмет зависимости длительности сигнала прямоугольной, треугольной и пилообразной формы от постоянной времени звена было выявлено, что не все звенья могут быть использованы в качестве ИП.

Выводы

1. Найденены математические модели ИП на основе типовых звеньев.
2. Исследована возможность использования импульсных сигналов различной формы для питания ИП.
3. В ходе анализа выявлены возможные сочетания ИП и типовых сигналов для их дальнейшего практического использования.

Литература

1. Патент РФ № 2121149. Импульсный измерительный преобразователь // Бугров А.В. Латышенко К.П., Левин А.В. Изобретения. Полезные модели № 30, 1998.
2. Головин В.В. Использование импульсной модуляции в кондуктометрии//Актуальные проблемы технических наук: сб. ст. Междунар. н.-практ. конф. – Уфа: Аэтерна, 2014. с. 6 – 8.

Индукцирование каротиногенеза у дрожжей *Phaffia rhodozyma* штамм Y2228 при образовании синглетного кислорода в культуральной жидкости под действием пероксида водорода

Мельникова Е.В., к.т.н. Герман Л.С., д.т.н. проф. Крамм Э.А.
Университет машиностроения
melnikovanoble@gmail.com

Аннотация. В статье рассмотрен способ индуцирования каротиногенеза у дрожжей *Phaffia rhodozyma* штамм Y2228 при помощи пероксида водорода.

Ключевые слова: биомасса дрожжей, каротиноиды, синглетный кислород

Дрожжи *Phaffia rhodozyma* штамм Y2228 являются продуцентом астаксантина. Эти дрожжи способны утилизировать как шестиатомные, так и пятиатомные сахара.

Астаксантин является высшим каротиноидом с самой высокой антиоксидантной активностью. В организмах высших животных астаксантин выполняет регуляторные функции, повышает иммунитет, повышает выживаемость особей в условиях стресса и вредных воздействий окружающей среды.

Благодаря способности культуры утилизировать пяти- и шестиатомные сахара возможно получение кормового препарата, содержащего астаксантин из послеспиртовой барды.

Послеспиртовая барда для культивирования дрожжей *Phaffia rhodozyma* штамм Y2228 требует предварительной переработки, включающей разделение барды на фракции, слабокислый гидролиз биомассы спиртовых дрожжей и двухступенчатый гидролиз дробины (для получения пяти- и шестиатомных моносахаров).

Однако в результате гидролиза цветность питательной среды не позволяет получить нужную концентрацию синглетного кислорода, образующегося при воздействии света, чтобы индуцировать каротиногенез у дрожжей.

Получить синглетный кислород в культуральной жидкости возможно при внесении в культуральную жидкость органических или неорганических окислителей. При выборе окислителя следует учитывать его токсичность и токсичность продуктов разложения, так как токсины могут угнетать рост биомассы дрожжей, а содержание токсинов в кормовых продуктах недопустимо.

В предварительных экспериментах из трех неорганических окислителей, показавших возможность их применения для получения такой концентрации синглетного кислорода, которая индуцирует образование астаксантина, по вышеназванным причинам выбран пероксид водорода [1].