

плутации случайное сложное напряженное состояние, когда компоненты тензора напряжений представляют собой различные по интенсивности и сложности структуры несинхронные и несинфазные случайные процессы.

*Ключевые слова:* случайный процесс, напряжения, тензометрия, линеаризация, усталость материала, долговечность.

Рассматривается плоское напряженное состояние с компонентами тензора напряжений в виде различных по интенсивности и сложности структуры несинхронных и несинфазных случайных процессов (рисунок 1). Характерными в этом отношении являются тонкостенные элементы металлоконструкций транспортных машин, испытывающих при движении по дорогам со случайными неровностями упругие колебания в продольной и поперечной плоскостях [1-9]. При этом наиболее опасными местами таких металлоконструкций являются узлы. Пример конструкции узлового соединения двух тонкостенных стержней с применением усиливающего элемента показан на рисунке 2а. Надежная информация о напряжениях в таком узле может быть получена только экспериментальными методами, например, электротензометрией. Для этого в наиболее опасных зонах узлового соединения (показаны точками на рисунке 2а) устанавливают розетки тензодатчиков, с помощью которых регистрируют процессы изменения во времени  $t$  деформаций в некоторых выбранных при экспериментах трёх направлениях. Если при этом используют прямоугольные розетки тензодатчиков (рисунок 2б), то получают для каждой исследуемой точки три деформации  $\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \varepsilon_{45^0}(t)$ , которые затем в соответствии с законом Гука пересчитывают в напряжения по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_x(t) &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_x(t) + \mu \cdot \varepsilon_y(t)); \\ \sigma_y(t) &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y(t) + \mu \cdot \varepsilon_x(t)); \\ \tau_{xy}(t) &= \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot (2\varepsilon_{45^0}(t) - \varepsilon_x(t) - \varepsilon_y(t)),\end{aligned}\quad (1)$$

где:  $E, \mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Стандартными методами обработки осциллографических записей случайных процессов вначале получают корреляционные функции и спектральные плотности для деформаций, а затем, в соответствии с формулами (1), такие же характеристики и для напряжений [1-3].

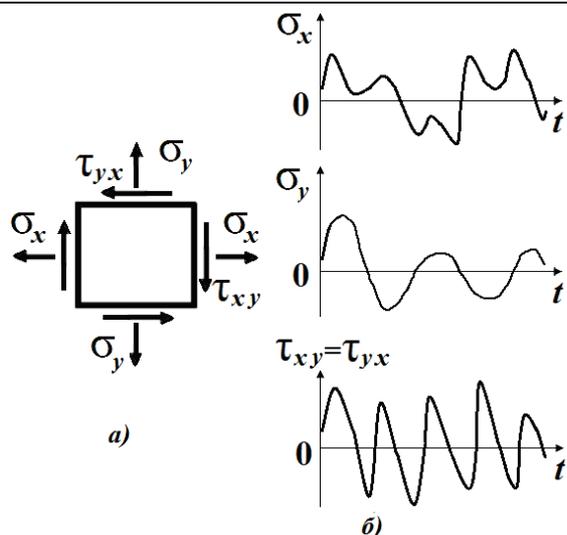
Матрицы корреляционных функций  $K_{\vec{\varepsilon}}(\tau)$  и спектральных плотностей  $S_{\vec{\varepsilon}}(\omega)$  для вектора деформаций  $\vec{\varepsilon}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}K_{\vec{\varepsilon}}(\tau) &= \begin{bmatrix} K_{\varepsilon_x}(\tau) & K_{\varepsilon_x \varepsilon_y}(\tau) & K_{\varepsilon_x \varepsilon_{45^0}}(\tau) \\ K_{\varepsilon_y \varepsilon_x}(\tau) & K_{\varepsilon_y}(\tau) & K_{\varepsilon_y \varepsilon_{45^0}}(\tau) \\ K_{\varepsilon_{45^0} \varepsilon_x}(\tau) & K_{\varepsilon_{45^0} \varepsilon_y}(\tau) & K_{45^0}(\tau) \end{bmatrix}; \\ S_{\vec{\varepsilon}}(\omega) &= \begin{bmatrix} S_{\varepsilon_x}(\omega) & S_{\varepsilon_x \varepsilon_y}(\omega) & S_{\varepsilon_x \varepsilon_{45^0}}(\omega) \\ S_{\varepsilon_y \varepsilon_x}(\omega) & S_{\varepsilon_y}(\omega) & S_{\varepsilon_y \varepsilon_{45^0}}(\omega) \\ S_{\varepsilon_{45^0} \varepsilon_x}(\omega) & S_{\varepsilon_{45^0} \varepsilon_y}(\omega) & S_{45^0}(\omega) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

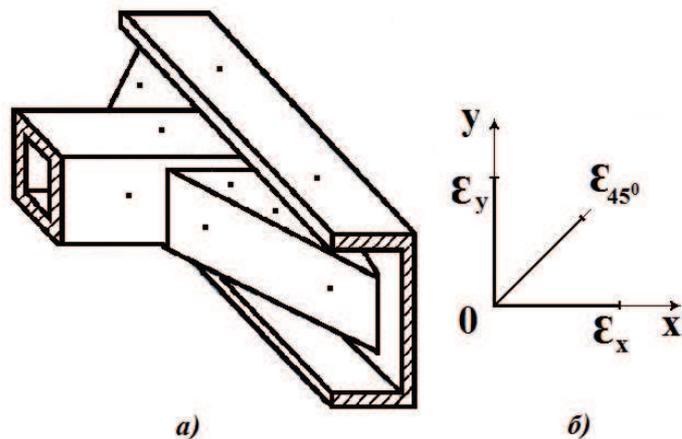
Для упрощения записи формул соотношения (1) представим в виде:

$$y_i(t) = \sum_{g=1}^3 c_{ig} x_g, \quad (i=1,2,3), \quad (2)$$

где:  $y_i, x_g$  – соответствующие напряжения и деформации;  $c_{ig}$  – коэффициенты влияния, которые здесь не выписываются.



**Рисунок 1. Плоское напряженное состояние (а) с компонентами напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ , изменяющимися по случайным законам во времени  $t$  (б)**



**Рисунок 2. Пример сложного узла металлоконструкции (а) и прямоугольная розетка тензодатчиков (б)**

Тогда элементы матрицы корреляционных функций и матрицы спектральных плотностей для напряжений будут вычисляться по формулам:

$$K_{y_i y_g}(\tau) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 c_{i\alpha} c_{g\beta} K_{x_\alpha x_\beta}(\tau);$$

$$S_{y_i y_g}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 c_{i\alpha} c_{g\beta} S_{x_\alpha x_\beta}(\omega).$$

В данной работе при расчете усталостной долговечности элементов конструкций при случайных циклических воздействиях используется энергетическая теория прочности в форме, учитывающей смену этапов растяжения и сжатия [7]. При этом вместо известного для эквивалентного напряжения выражения

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 3\tau_{xy}^2},$$

вводится в рассмотрение энергетический параметр циклической нагруженности элементарного объема материала  $p(t)$  в виде:

$$p(t) \approx (\sigma_x(t) - \sigma_y(t)) \cdot (|\sigma_x(t) - \sigma_y(t)|) + 3 \cdot \tau_{xy}(t) \cdot |\tau_{xy}(t)|. \quad (3)$$

Здесь все вероятностные характеристики для вектора напряжений  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$  считаются известными. Однако в силу нелинейности соотношения (3) определение всех необходимых для расчёта усталости вероятностных характеристик процесса  $p(t)$  представляет собой сложную и не имеющую до настоящего времени эффективного решения задачу. Поэтому ограничимся эффективным решением и воспользуемся для этого методом статистической линеаризации, т.е. заменим выражение (3) на следующую линейную композицию гауссовских процессов:

$$p(t) = k_1(\sigma_x(t) - \sigma_y(t)) + 3k_2\tau_{xy}(t), \quad (4)$$

где коэффициенты линеаризации  $k_1$  и  $k_2$  вычислим по критерию равенства дисперсий процессов (3) и (4), т.е. по формулам [2]:

$$k_1^2 = \frac{\langle (\sigma_x - \sigma_y)^4 \rangle}{\langle (\sigma_x - \sigma_y)^2 \rangle} = \frac{3s_{\sigma_x}^4 - 12s_{\sigma_x}^2 s_{\sigma_x \sigma_y}^2 + 6s_{\sigma_x}^2 s_{\sigma_y}^2 + 12s_{\sigma_x \sigma_y}^4 - 12s_{\sigma_x \sigma_y}^2 s_{\sigma_y}^2 + 3s_{\sigma_y}^4}{s_{\sigma_x}^2 - 2s_{\sigma_x \sigma_y}^2 + s_{\sigma_y}^2}; \quad (5)$$

$$k_2^2 = \frac{\langle \tau_{xy}^4 \rangle}{\langle \tau_{xy}^2 \rangle} = 3s_\tau^2. \quad (6)$$

Здесь знаком  $\langle \dots \rangle$  показана операция усреднения, а все величины, входящие в соотношения (5) и (6), определяются по элементам матриц корреляционных функций. Имеем:  $s_{\sigma_x}^2 = K_{\sigma_x}(0)$ , – дисперсия процесса  $\sigma_x(t)$ ,  $s_{\sigma_y}^2 = K_{\sigma_y}(0)$ , – дисперсия процесса  $\sigma_y(t)$ ,  $s_\tau^2 = K_\tau(0)$ , – дисперсия процесса  $\tau_{xy}(t)$ ,  $s_{\sigma_x \sigma_y}^2 = K_{\sigma_x \sigma_y}(0)$ , – коэффициент корреляции процессов  $\sigma_x(t)$ , и  $\sigma_y(t)$ .

При статистически независимых процессах  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_y(t)$ ,  $\tau_{xy}(t)$ :

$$k_1^2 = 3(s_{\sigma_x}^2 + s_{\sigma_y}^2).$$

Тогда дисперсия процесса  $p(t)$  и дисперсии его первых двух производных  $\dot{p}(t)$  и  $\ddot{p}(t)$  будут вычисляться по формулам:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= 3(s_{\sigma_x}^4 + s_{\sigma_y}^4) + 27s_\tau^4, \\ s_{\dot{p}}^2 &= 3(s_{\sigma_x}^2 + s_{\sigma_y}^2)(s_{\dot{\sigma}_x}^2 + s_{\dot{\sigma}_y}^2) + 27s_\tau^2 s_\tau^2, \\ s_{\ddot{p}}^2 &= 3(s_{\sigma_x}^2 + s_{\sigma_y}^2)(s_{\ddot{\sigma}_x}^2 + s_{\ddot{\sigma}_y}^2) + 27s_\tau^2 s_\tau^2, \end{aligned}$$

где:  $s_{\dot{\sigma}_x}^2 = -\ddot{K}_{\sigma_x}(0)$ , – дисперсия процесса  $\dot{\sigma}_x(t)$ ,

$s_{\dot{\sigma}_y}^2 = -\ddot{K}_{\sigma_y}(0)$ , – дисперсия процесса  $\dot{\sigma}_y(t)$ ,

$s_\tau^2 = -\ddot{K}_\tau(0)$ , – дисперсия процесса  $\dot{\tau}_{xy}(t)$ ,

$s_{\ddot{\sigma}_x}^2 = K_{\sigma_x}^{IY}(0)$ , – дисперсия процесса  $\ddot{\sigma}_x(t)$ ,

$s_{\ddot{\sigma}_y}^2 = K_{\sigma_y}^{IY}(0)$ , – дисперсия процесса  $\ddot{\sigma}_y(t)$ ,

$s_\tau^{IY} = K_\tau^{IY}(0)$ , – дисперсия процесса  $\ddot{\tau}_{xy}(t)$ .

Частота процесса  $p(t)$  по нулям  $\omega_0$ , экстремумам  $\omega_\varepsilon$  и параметр сложности структуры этого процесса  $k_0$  (отношение числа экстремумов к числу нулей) будут вычисляться по формулам [3]:

$$\omega_0 = \frac{s_{\dot{p}}}{s_p}; \quad \omega_\varepsilon = \frac{s_{\ddot{p}}}{s_{\dot{p}}}; \quad k_0 = \frac{\omega_\varepsilon}{\omega_0}. \quad (7)$$

Из представления (4) следует, что процесс  $p(t)$  будет процессом со сложной структурой с  $k_0 > 1$  даже в том случае, когда он состоит из суммы процессов с простой структурой, имеющих  $k_0 = 1$ . Для процессов со сложной структурой понятие цикла напряжения и понятие амплитуды цикла однозначно не определяются и требуется при расчете на усталостную долговечность применять различные приближенные методы приведения (замены) процессов со сложной структурой к эквивалентным по повреждающему действию процессам с простой структурой [1-3]. При этом к наибольшему повреждающему действию (к наименьшей оценке для усталостной долговечности) приводит метод максимумов, в котором за амплитуды напряжений принимаются положительные максимумы, а за расчетную частоту циклов – среднее число таких максимумов в единицу времени. Схематизация процесса в этом случае состоит в переносе положительных минимумов и отрицательных максимумов на нулевую (среднюю) линию.

Такой подход эквивалентен рассмотрению процесса  $p(t)$  как узкополосного процесса с  $k_0 = 1$ , частотой  $\omega_0$  и с амплитудами циклов, подчиняющимися релеевской плотности распределения вероятностей:

$$f(p) = \frac{p}{s_p^2} \cdot \exp\left(-\frac{p^2}{2s_p^2}\right). \quad (8)$$

Теперь для расчета на усталостную долговечность стандартное уравнение кривой усталости в амплитудах напряжений  $\sigma$  и числах циклов до разрушения  $N$

$$N(\sigma) = \begin{cases} N_o \frac{\sigma_{-1}^m}{\sigma^m}, & \sigma \geq \sigma_{-1}; \\ \infty, & \sigma < \sigma_{-1}, \end{cases} \quad (9)$$

где:  $N_o, \sigma_{-1}, m$  – параметры, следует заменить на выражение:

$$N(p) = \begin{cases} N_o \frac{p_{-1}^{m/2}}{p^{m/2}}, & p \geq p_{-1} = \sigma_{-1}^2; \\ \infty, & p < p_{-1}, \end{cases} \quad (10)$$

где:  $p$  – амплитуда энергетического параметра циклической нагруженности.

В соответствии с линейной гипотезой накопления усталостных повреждений число циклов до разрушения  $N_*$  будет вычисляться по формуле:

$$N_* = \left( \int_0^\infty \frac{f(p) dp}{N(p)} \right)^{-1}. \quad (11)$$

А усталостная долговечность (в единицах времени) будет определяться как:

$$T_* = \frac{2\pi}{\omega_0} N_*. \quad (12)$$

Подставив выражения (8), (10) и (11) в соотношение (12), получим следующую формулу для расчета усталостной долговечности:

$$T_* = \frac{2 \cdot \pi \cdot s_p}{s_p} \cdot \frac{N_o \cdot p_{-1}^{m/2}}{2^{m/4} \cdot s_p^{m/2} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{4} + 1, p_{-1}^2 / (2s_p^2)\right)}, \quad (13)$$

где:  $\Gamma(\beta, \alpha) = \int_\alpha^\infty e^{-t} \cdot t^{\beta-1} \cdot dt$  – табулированная неполная гамма-функция, значения параметров

которой  $x = m/2 + 1$  и  $\alpha = \sigma_{-1}^2 / (2s_p^2)$ .

Более точные результаты по расчету усталостной долговечности получим при использовании схематизации случайного процесса по методу полных циклов [3]. В этом случае порядок расчета сводится к следующему. Вначале определяется закономерность  $k = k(x)$ , где  $x = p / s_p$ , изменения параметра сложности структуры  $k$  от уровня амплитуд  $x$  постепенно по мере их увеличения исключаемых из процесса простых циклов. Эта функция является решением следующего трансцендентного алгебраического уравнения:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k_0} + \ln \frac{k_0 \cdot (k-1)}{k \cdot (k_0-1)} = -\frac{x^2}{2}, \quad (14)$$

где:  $k_0 > 1$  – начальный параметр сложности структуры.

Плотность распределения вероятностей для амплитуд всех циклов имеет вид:

$$f(p) = \frac{p}{s_p^2} \cdot \frac{k^2 \left(\frac{p}{s_p}\right)}{k_0 - 1} \cdot \left( k \left(\frac{p}{s_p}\right) - 1 \right). \quad (15)$$

С учетом соотношений (11), (12), (14) и (15) получаем следующую формулу для опре-

деления ожидаемого числа циклов нагружения до разрушения:

$$N_* = (k_0 - 1) \cdot N_0 \cdot x_{-1}^{m/2} \cdot \alpha(m, k_0, x_{-1}), \quad (16)$$

где:  $x_{-1} = \frac{p_{-1}}{s_p}$ ;  $\alpha = \frac{1}{\int_{x_{-1}}^{\infty} x^{\left(\frac{m}{2}+1\right)} \cdot k^2(x) \cdot (k(x)-1) \cdot dx}$ . (17)

В выражении (17) величина  $k(x)$  – решение алгебраического уравнения (14).

Параметр  $\alpha = \alpha(m, k_0, x_{-1})$  определяется численно.

### Заключение

Таким образом, введение в рассмотрение энергетического параметра циклической нагруженности материала в сочетании со статистической его линеаризацией позволило эффективно решить задачу оценки усталостной долговечности тонкостенных металлоконструкций транспортных машин, находящихся в эксплуатации под воздействием несинхронных и несинфазных случайных процессов компонент тензора напряжений.

### Литература

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
2. Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 224 с.
3. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. М.: Машиностроение, 1984. 245 с.
4. Гусев А.С. Случайные колебания деформируемых объектов при транспортировке. //Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 1.
5. Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А., Стародубцева С.А., Щербаков В.И. Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении. М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2007. 336 с.
6. Гусев А.С., Щербаков В.И., Стародубцева С.А. Оценка виброн нагруженности длинномерного легкодеформируемого груза при его транспортировании по дороге со случайными неровностями /Автомобильная промышленность. - № 2, 2014.-с. 24-27.
7. Гусев А.С., Щербаков В.И., Стародубцева С.А., Гребенкина М.И. Расчет прочностной надежности и усталостной долговечности элементов конструкций мобильных машин, нагруженных случайными изгибающими и крутящими моментами /Известия МГТУ «МАМИ», № 2 (16), Т. 1, 2013. –с. 54-57.
8. Щербаков В.И., Надеждин В.С. Колебания колесной машины при движении по неровной дороге: учебное пособие. М.: МГТУ «МАМИ», 2011. 40 с.
9. Щербаков В.И., Чабунин И.С., Стародубцева С.А. Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2010. 288 с.
10. Whitney C.A. Random processes in physical systems. New York: John Willey, 1990. 320 p.