УДК 534.1

Исследование параметрических колебаний автомобильного колеса

к.т.н. проф. Щербаков В.И.
Университет машиностроения
8(499)-223-05-23, доб. 14-57; sopr@mami.ru

Аннотация. Рассмотрены параметрические колебания автомобильного колеса, вызванные периодически изменяющейся радиальной жесткостью по мере его перекатывания по дороге. Установлено минимальное значение модуляции жесткости, при которой возможно возникновение неустойчивости движения.

Ключевые слова: *автомобильное колесо, параметрические колебания, неустойчивость движения.*

Экспериментальные исследования жесткостных характеристик автомобильных колес свидетельствуют о том, что радиальная жесткость колеса периодически изменяется по мере его перекатывания по дороге [1]. В результате при движении автомобиля даже по абсолютно ровной дороге могут возникнуть неустойчивые параметрические колебания неподрессоренных масс.

Рассмотрим двухмассовую расчетную схему подвески автомобиля, показанную на рисунке 1. Подрессоренная масса M движется поступательно со скоростью $\vec{V}$, опираясь через безынерционные элементы подвески с жесткостью c_n и коэффициентом вязкого сопротивления b_n на колесо с переменной во времени t радиальной жесткостью $c(t) = c_0 + \Delta c \cdot \cos \omega t$, где c_0 – среднее значение радиальной жесткости колеса, Δc – амплитуда изменения радиальной жесткости колеса, ω – циклическая частота (рисунок 2). Модуляция жесткости шины колеса $\varepsilon_k = \Delta c / c_0$. Считаем, что $\Delta c << c_0$, а коэффициент вязкого сопротивления колеса в радиальном направлении b_k постоянный. Массу неподрессоренных частей обозначим m.

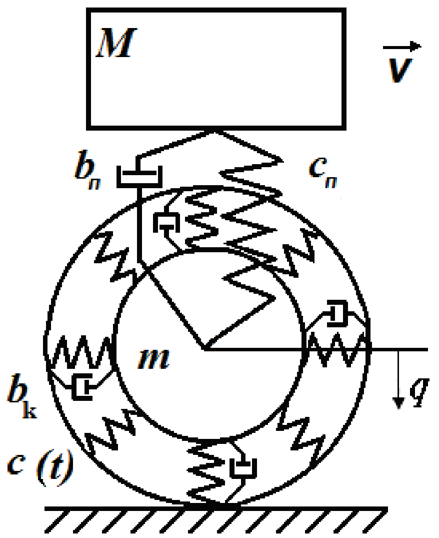

Рисунок 1. Двухмассовая расчетная схема подвески автомобиля

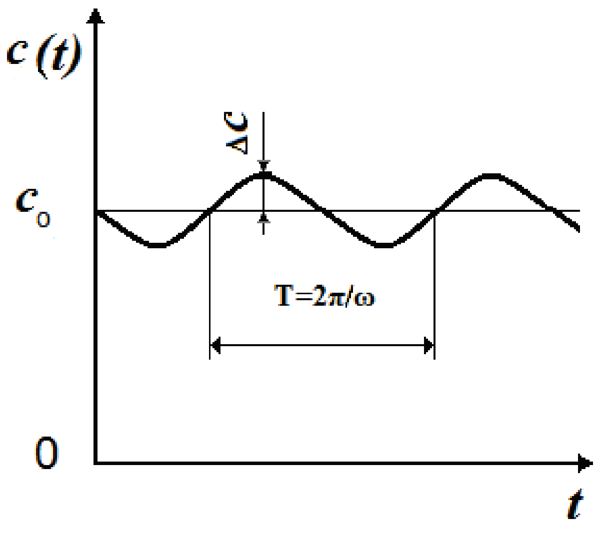

Рисунок 2. Изменение во времени t радиальной жесткости колеса $c(t)$

Из теории параметрических колебаний известно [2, 3], что основное значение имеет случай, когда частота параметрического возбуждения $\omega = \omega_*$ вдвое больше среднего значения собственной частоты системы. В рассматриваемой задаче за последнюю следует считать парциальную собственную частоту неподрессоренной массы ω_0, т.е. для расчета принимаем

$\omega_* / \omega_0 \approx 2$, где $\omega_0 = \sqrt{(c_n + c_o)/m}$. Поэтому задача исследования состояла в определении на плоскости параметров (η, ε) (где $\eta = \omega / \omega_0$) границ зоны параметрической неустойчивости, а также в оценке минимальной величины модуляции жесткости $\varepsilon_{\min}$, при которой возникнет неустойчивость параметрических колебаний.

Собственная частота колебаний подрессоренной массы, как минимум, на порядок меньше по сравнению с собственной частотой колебаний неподрессоренной массы [4, 5]. Это позволяет пренебречь вертикальными смещениями подрессоренной массы при исследовании параметрических колебаний неподрессоренной массы. Введем обобщенную координату q для описания вертикальных колебаний массы m и запишем соответствующее уравнение движения:

$$\ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + \omega_0^2 (1 - \varepsilon \cdot \cos \omega t) \cdot q = 0$$

или

$$\ddot{q} + 2n \cdot \dot{q} + \omega_0^2 (1 - \varepsilon \cdot \cos \omega t) \cdot q = 0, \qquad (1)$$

где: $b = b_n + b_k$ – суммарный коэффициент вязкого сопротивления;

$c = c_n + c(t)$ – суммарная жесткость вертикальных связей неподрессоренной массы;

$2n = b/m; \ \varepsilon = \Delta c / (c_n + c_o)$.

Заменой переменной $q(t) = \exp(-nt) \cdot x(t)$ уравнение (1) преобразуется к виду (уравнению Матье):

$$\ddot{x} + \omega_n^2 (1 - \varepsilon \cdot \cos \omega) \cdot x = 0, \qquad (2)$$

где: $\omega_n^2 = \omega_0^2 - n^2$, так как для реальных колебательных систем $n << \omega_0$, то разницей между ω_n и ω_0 будем пренебрегать.

Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$x(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{i\omega_o t} + A^*(t) e^{-i\omega_o t}, \qquad (3)$$

причем комплексную амплитуду $A(t)$ можно считать медленно изменяющейся во времени величиной. Её изменение описывает возможную неустойчивость в системе, а также смещение частоты колебаний относительно собственной частоты ω_0. Знак * обозначает комплексно-сопряженные величины.

После вычисления первой и второй производных от $x(t)$, в которых величинами $\ddot{A}(t)$ и $\ddot{A}^*(t)$ можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми, так как амплитуда $A(t)$ медленно меняющаяся, и их подстановки в уравнение (2) получим:

$$2i\omega_o \dot{A}(t) e^{i\omega_o t} - \frac{\omega_o^2 \varepsilon}{2} \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right) A(t) e^{i\omega_o t} - 2i\omega_o \dot{A}^*(t) e^{-i\omega_o t} - \frac{\omega_o^2 \varepsilon}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) A^*(t) e^{-i\omega t} = 0.$$

Поделим это соотношение на $\exp(i\omega_0 t)$ и усредним по времени $2\pi / \omega$. Все слагаемые, содержащие быстро меняющиеся экспоненты, обратятся в нуль, кроме содержащего экспоненту $\exp[i(\omega - 2\omega_0)t]$, т. к. по условию исследования $\omega \approx 2\omega_0$ и этот член не является колебательным. В результате усреднения получим уравнение:

$$\dot{A}(t) + \frac{i\omega_0 \varepsilon}{4} A^*(t) e^{i(\omega - 2\omega_0)t} = 0. \qquad (4)$$

Введем обозначение $(\omega_0 - \omega / 2) = \delta$ и новую переменную $a(t) = a_1(t) + i \cdot a_2(t)$. Для действительных функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$ получим систему связанных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a}_1(t) + \left(\delta + \dfrac{\omega_0\varepsilon}{4}\right)a_2(t) = 0; \\ \dot{a}_2(t) - \left(\delta - \dfrac{\omega_0\varepsilon}{4}\right)a_1(t) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Решение будем искать в виде:

$$a_1(t) = C_1 e^{\lambda t}, \quad a_2(t) = C_2 e^{\lambda t},$$

где: C_1, C_2 – константы;

λ – параметр, определяющий устойчивость параметрических колебаний.

Из (5) следует условие существования нетривиального решения:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \delta + \dfrac{\omega_0\varepsilon}{4} \\ -\delta + \dfrac{\omega_0\varepsilon}{4} & \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\omega_0\varepsilon}{4}\right)^2 - \delta^2}.$$

Для того, чтобы в системе возникла неустойчивость, необходимо $|\lambda| > n$. При $|\lambda| = n$ будет граница зоны неустойчивости или:

$$\left(\frac{\omega_0\varepsilon}{4}\right)^2 - \delta^2 = n^2.$$

Учитывая, что $\delta = \omega_0 - \omega/2$, получим:

$$\varepsilon = \pm 4\sqrt{1 - \eta + \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{n^2}{\omega_0^2}}.$$

На плоскости параметров (η, ε) – это гиперболы, симметрично расположенные относительно оси ε и имеющие вершины в точках $(\eta = -2,\ \varepsilon_{\min} = 4n/\omega_0)$ и $(\eta = 2,\ \varepsilon_{\min} = 4n/\omega_0)$, что и показано на рисунке 3. Минимальное значение модуляции жесткости, при которой возможно возникновение неустойчивости, достигается при $\eta = \pm 2$. Оно равно $\varepsilon_{\min} = \dfrac{4n}{\omega_0}$.

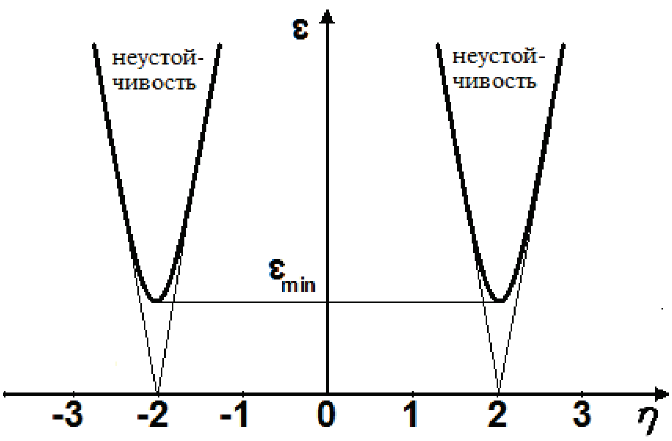

Рисунок 3. Зоны параметрической неустойчивости

Рассмотрим числовой пример. Если $c_n = 33 кН/м$, $m = 60 кг$, $b = 300\, Н \cdot с/м$, $c_o = 300 кН/м$, $\Delta c = 15 кН/м$, $\varepsilon_к = 0{,}05$, то частота собственных колебаний системы будет равна:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{c_n + c_o}{m}} = \sqrt{\frac{33 \cdot 10^3 + 300 \cdot 10^3}{60}} = 74{,}5 c^{-1},$$

относительный коэффициент потерь примет значение:

$$n = \frac{b}{2m} = \frac{300}{2 \cdot 60} = 2{,}5 c^{-1},$$

а минимальное значение модуляции жесткости, при которой возможно возникновение неустойчивости равно:

$$\varepsilon_{\min} = \frac{4n}{\omega_0} = \frac{4 \cdot 2{,}5}{74{,}5} = 0{,}13.$$

Заключение

В результате проведенных исследований получены зависимости, позволяющие оценить границы зоны параметрической неустойчивости автомобильного колеса в области частот вблизи главного параметрического резонанса.

Литература

1. Балабин И.В., Чабунин И.С. Автомобильные и тракторные колёса. – М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2010. 444 с.
2. Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А., Стародубцева С.А., Щербаков В.И. Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении. М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2007. 336 с.
3. Щербаков В.И., Чабунин И.С., Стародубцева С.А. Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2010. 288 с.
4. Щербаков В.И., Чабунин И.С. Аналитическая динамика и теория колебаний в приложении к автомобильным конструкциям. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Университет машиностроения, 2013. 205 с.
5. Щербаков В.И., Надеждин В.С. Колебания колесной машины при движении по неровной дороге. – М.: Изд-во МГТУ «МАМИ», 2011. 40 с.

Об унификации некоторых терминов и понятий, применяемых в теории трактора, автомобиля, быстроходных колёсных и гусеничных транспортно-тяговых машин

к.т.н. проф. Парфенов А.П., к.т.н. проф. Щетинин Ю.С.

Университет Машиностроения

8(495)223-05-23 (доб.15-27), a.parfen@mail.ru

Аннотация. Предлагаются единые термины, относящиеся к общим понятиям, часто употребляемым в теории автомобиля, трактора, быстроходных колёсных и гусеничных транспортно-тяговых машин.

Ключевые слова: *термины, понятия, унификация, автомобиль, трактор, быстроходная транспортная машина.*

Необходимость в унификации терминов, применяемых в родственных дисциплинах, стала особенно очевидной, в связи с утверждением стандарта по подготовке специалистов по специальности 190109 «Наземные транспортно - технологические средства» по специализации «Автомобили и тракторы».

Первый шаг в направлении унификации терминов, применяемых в дисциплинах «Конструкция автомобилей и тракторов», «Конструкция быстроходных гусеничных транспортно – тяговых машин» был сделан при публикации учебника «Тракторы. Конструкция», под общей редакцией проф. док. техн. наук Шарипова В.М., подготовленного коллективом преподавателей МГТУ «МАМИ» [1].