С. 105 – 132.
5. Фомин В.М., Платунов А.С. Метод совершенствования показателей работы бензинового двигателя с внутренним смесеобразованием // М.: Известия МГТУ «МАМИ». – № 2 (12) 2011. – С. 84-95.
6. Фомин В.М., Каменев В.Ф., Хрипач Н.А. Теоретические и экспериментальные исследования работы двигателя на водородно-дизельных топливных композициях // International Scientific Journal for Alternative Energyand Ecology ISJAEE. № 7. 2005. – С. 32-42.
7. Фомин В.М., Атраш Рами. Улучшение показателей работы дизеля на бинарном биоуглеводородном топливе // Транспорт на альтернативном топливе. № 5 (29). 2012. – С. 36-40.

Метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем мобильных машин

д.т.н. проф. Гусев А.С., к.т.н. проф. Щербаков В.И., доц. Чуканин Ю.П., к.т.н. доц. Стародубцева С.А.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Университет машиностроения, 8(499)-223-05-23, доб. 14-57; sopr@mami.ru

Аннотация. Рассматривается метод статистической линеаризации применительно к нелинейным динамическим системам мобильных машин с несколькими степенями свободы.

Ключевые слова: *случайный процесс, нелинейная динамическая система, статистическая линеаризация, корреляционная функция, спектральная плотность, дисперсия.*

Методы расчета линейных динамических систем мобильных машин на случайные воздействия к настоящему времени хорошо разработаны [1, 2, 3]. При аналитическом расчете же нелинейных систем часто возникают почти непреодолимые вычислительные трудности. Наиболее эффективным (приближенным) методом расчета таких систем является метод статистической линеаризации [2]. Рассмотрим использование этого метода для расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы, функционирование которых описывается следующим матричным дифференциальным уравнением вида:

$$L(p)\cdot\vec{q}(t)+\vec{\varphi}(q)=\vec{f}(t) \qquad (1)$$

где: $L(p)-$ матрица линейных дифференциальных операторов $(p=d/dt)$;

$\vec{q}(t)=\left[q_1,q_2,\dots,q_n\right]^T -$ вектор обобщенных координат;

$n-$ число степеней свободы системы;

$\vec{\varphi}(\vec{q})-$ нелинейная вектор-функция сил сопротивления;

$\vec{f}(t)-$ вектор гауссовских стационарных процессов внешних воздействий с нулевыми средними значениями и заданными спектральными плотностями в виде матрицы:

$$S_{\vec{f}}(\omega)=[S_{f_\alpha f_\beta}(\omega)], \quad (\alpha,\beta=1,2,\dots n). \qquad (2)$$

Задача состоит в определении матрицы спектральных плотностей выходных процессов $\vec{q}(t)$

$$S_{\vec{q}}(\omega)=[S_{q_k q_j}(\omega)], \quad (k,j=1,2,\dots n). \qquad (3)$$

Применим к уравнению (1) метод статистической линеаризации, суть которого состоит в замене нелинейной функции $\vec{\varphi}(\vec{q})$ на линейную $\vec{\varphi}_0(\vec{q})=C\cdot\vec{q}$, где матрица коэффициентов линеаризации $C=[c_{kj}]$ подлежит определению по какому-либо критерию, определяющему близость векторов $\vec{\varphi}$ и $\vec{\varphi}_0$.

Получаем линеаризованное уравнение вида:

$$\left[L(p)+C\right]\cdot\vec{q}(t)=\vec{f}(t). \qquad (4)$$

Матрица передаточных функций от внешних воздействий $\vec{f}(t)$ к выходным процессам $\vec{q}(t)$ на основе уравнения (4) определяется как:

$$\mathrm{H}(i\omega) = \left[\mathrm{H}_{kj}(i\omega)\right] = \left[L(i\omega) + C\right]^{-1}. \tag{5}$$

Тогда для определения искомой матрицы (3) имеем формулу в матричном виде:

$$S_{\vec{q}}(\omega) = H\left(-i\omega\right) \cdot S_{\vec{f}}(\omega) \cdot H^{T}(i\omega) \tag{6}$$

или в скалярном виде:

$$S_{q_k q_j}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} H_{k\alpha}(-i\omega) \cdot H_{j\beta}(i\omega) \cdot S_{f_\alpha f_\beta}(\omega). \tag{7}$$

Корреляционные моменты компонент вектора $\vec{q}(t)$ будут определяться по формуле:

$$s_{q_k q_j} = \left\langle q_k q_j \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_k q_j}(\omega)\, d\omega, \tag{8}$$

где: $\langle \ldots \rangle$ – оператор усреднения.

Для определения матрицы C используем критерий минимума среднего квадрата отклонения, выраженного как:

$$J = \left\langle \left(\vec{\varphi} - C\vec{q}\right)^{T} \cdot \left(\vec{\varphi} - C\vec{q}\right) \right\rangle = \left\langle \vec{\varphi}^{T}\vec{\varphi} - \vec{q}^{T}C^{T}\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{T}C\vec{q} + \vec{q}^{T}C^{T}C\vec{q} \right\rangle \to \min. \tag{9}$$

При реализации этого критерия воспользуемся следующими формулами для вычисления производных произведения матриц по матрице:

$$\frac{d}{dC}\left(ABC\right) = \left(BA\right)^{T} \to \frac{d}{dC}\left(\vec{\varphi}^{T}C\vec{q}\right) = \vec{\varphi}\vec{q}^{T}; \tag{10}$$

$$\frac{d}{dC}\left(AC^{T}B\right) = \left(BA\right) \to \frac{d}{dC}\left(\vec{q}^{T}C^{T}\vec{\varphi}\right) = \vec{\varphi}\vec{q}^{T}; \tag{11}$$

$$\frac{d}{dC}\left(AC^{T}CD\right) = CDA + CA^{T}D^{T} \to \frac{d}{dC}\left(\vec{q}^{T}C^{T}C\vec{q}\right) = 2C\vec{q}\vec{q}^{T}. \tag{12}$$

Из условия $\dfrac{dJ}{dC} = 0$ получаем:

$$C = \left\langle \vec{\varphi}\vec{q}^{T} \right\rangle \cdot \left\langle \vec{q}\vec{q}^{T} \right\rangle^{-1}. \tag{13}$$

Заметим, что для систем с одной степенью свободы формула (13) принимает вид:

$$c = \frac{\langle \varphi q \rangle}{\langle q^2 \rangle}.$$

Из соотношения (13) следует, что элементы матрицы C выражаются через корреляционные моменты вектора $\vec{q}(t)$ т.е. имеем:

$$C = [c_{kj} = c_{kj}(< q_1 q_1 >, < q_1 q_2 >, \ldots, < q_{n-1}\, q_n >, < q_n\, q_{n>})]. \tag{14}$$

Подставив (13) в (8) с учетом зависимостей (5)-(7), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения корреляционных моментов вектора $\vec{q}(t)$:

$$s_{q_k q_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} \left[L_{k\alpha}(-i\omega) + c_{k\alpha}\right]^{-1} \cdot \left[L_{j\beta}(i\omega) + c_{j\beta}\right] \cdot S_{f_\alpha f_\beta}(\omega)\, d\omega. \tag{15}$$

Теперь по формуле (13) можно определить матрицу С и затем (путем решения уравнения (4)) – все вероятностные характеристики искомого процесса $\vec{q}(t)$.

Для примера рассмотрим нелинейную механическую систему с двумя степенями свободы, показанную на рисунке 1. Упругие элементы, изображенные в виде пружин, имеют нелинейные характеристики вида (рисунок 2):

$$F_1 = c_1\,\Delta_1 + b_1\,\Delta_1^3, \quad \Delta_1 = q_1 - q_2; \; F_2 = c_2\,\Delta_2 + b_2\,\Delta_2^3, \quad \Delta_2 = q_2,$$

где: F_1, F_2 – усилия в упругих элементах;

$q_1, q_2 -$ обобщенные координаты системы;

$\Delta_1, \Delta_2 -$ деформации упругих элементов;

$c_1, b_1, c_2, b_2 -$ параметры упругости;

$b -$ коэффициент линейного демпфирования.

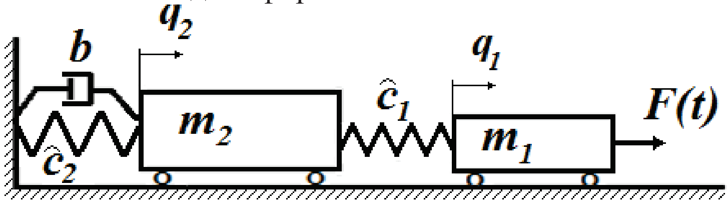
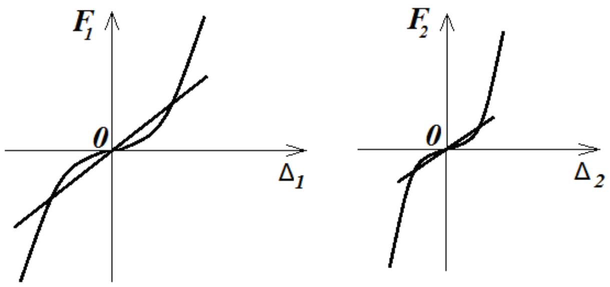


Рисунок 1. Общий вид нелинейной механической системы с двумя степенями свободы: m₁, m₂ – массы; F(t) – вынуждающая сила; $\hat{c}_1, \hat{c}_2 -$ линеаризированные параметры жесткостей упругих элементов



а) б)

Рисунок 2. Нелинейные характеристики упругих элементов и линеаризирующие прямые: а) – для элемента, соединяющего массы между собой; б) – для элемента, соединяющего массу m_2 со стеной

Нелинейные составляющие упругих характеристик линеаризуем по критерию минимума среднего квадратического отклонения и заменяем на линейные выражения:

$$\Delta_1^3 = (q_1 - q_2)^3 \approx k_1 \cdot (q_1 - q_2);\ \ \Delta_2^3 = q_2^3 \approx k_2 \cdot q_2,$$

где: $k_1 = \dfrac{\left\langle (q_1 - q_2)^4 \right\rangle}{\left\langle (q_1 - q_2)^2 \right\rangle} = 3\left(s_{q_1}^2 + s_{q_2}^2 - 2s_{q_1q_2}\right),\ \ k_2 = 3s_{q_2}^2 -$коэффициенты линеаризации;

$s_{q_1}^2, s_{q_2}^2, s_{q_1q_2} -$ дисперсии и коэффициент корреляции процессов $q_1(t)$ и $q_2(t)$, которые должны быть определены по ходу решения задачи.

После линеаризации упругие характеристики принимают вид:

$$F_1 = \hat{c}_1(q_1 - q_2);\ \ F_2 = \hat{c}_2 q_2,$$

где: $\hat{c}_1 = c_1 + b_1 k_1 = c_1 + 3b_1 \cdot (s_{q_1}^2 + s_{q_2}^2 - 2s_{q_1q_2});$ (16)

$$\hat{c}_2 = c_2 + 3b_2 s_{q_2}^2. \qquad (17)$$

Линеаризированные дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид:

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + \hat{c}_1 \cdot (q_1 - q_2) = F(t); \\ m_2\ddot{q}_2 - \hat{c}_1 \cdot (q_1 - q_2) + \hat{c}_2 q_2 + b\dot{q}_2 = 0, \end{cases} \qquad (18)$$

где: $\hat{c}_1 = \hat{c}_1(s_{q_1}^2, s_{q_2}^2, s_{q_1q_2});\ \ \hat{c}_2 = \hat{c}_2(s_{q_2}^2).$

Здесь в скобках указаны аргументы функций $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$.

Передаточные функции $H_1(i\omega)$ от $F(t)$ к $q_1(t)$ и $H_2(i\omega)$ от $F(t)$ к $q_2(t)$ определяются из системы уравнений (18) при $F(t) = e^{i\omega t}$, $q_1 = H_1(i\omega) \cdot e^{i\omega t}$, $q_2 = H_2(i\omega) \cdot e^{i\omega t}$. После подстановки и решения получим:

$$H_1(i\omega) = \frac{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 - m_2\omega^2 + bi\omega}{(\hat{c}_1 - m_1\omega^2)\cdot(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 - m_2\omega^2 + bi\omega) - \hat{c}_1^2}; \tag{19}$$

$$H_2(i\omega) = \frac{\hat{c}_1}{(\hat{c}_1 - m_1\omega^2)\cdot(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 - m_2\omega^2 + bi\omega) - \hat{c}_1^2}. \tag{20}$$

Спектральные плотности и взаимная спектральная плотность процессов $q_1(t)$ и $q_2(t)$ будут вычисляться по следующим формулам:

$$S_{q_1}(\omega) = \left|H_1(i\omega)\right|^2 \cdot S_F(\omega); \tag{21}$$

$$S_{q_2}(\omega) = \left|H_2(i\omega)\right|^2 \cdot S_F(\omega); \tag{22}$$

$$S_{q_1q_2}(\omega) = \left|H_1(-i\omega)\right|\cdot\left|H_2(i\omega)\right| \cdot S_F(\omega). \tag{23}$$

Дисперсии и коэффициент корреляции процессов $q_1(t)$ и $q_2(t)$ будут выражаться следующими интегралами:

$$s_{q_1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_1}(\omega)\, d\omega; \quad s_{q_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_2}(\omega)\, d\omega; \quad s_{q_1q_2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{q_1q_2}(\omega)\, d\omega.$$

Теперь по формулам (16) и (17) определяем величины $\hat{c}_1$ и $\hat{c}_2$, а по формулам (19) и (20) – передаточные функции. После этого по формулам (21), (22) и (23) находим спектральные плотности и взаимную спектральную плотность выходных случайных процессов $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Рассматриваемую задачу можно считать решенной.

Таким образом, показано, что метод статистической линеаризации в динамике нелинейных систем с конечным числом степеней свободы эффективен и вполне реализуем.

Литература

1. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем /Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1999. – 504 с.
2. Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 223 с.
3. Гусев А.С. Расчет конструкций при случайных воздействиях /А.С. Гусев, В.А. Светлицкий . М.: Машиностроение, 1984. -240 с.
4. Щербаков В.И. Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций /В.И. Щербаков, И.С. Чабунин, С.А. Стародубцева. М.: МГТУ «МАМИ», 2010. – 288с.

Закрученные струи за лопаточными завихрителями в свободном пространстве и в камере сгорания ГТД

к.т.н. доц. Эммиль М.В.

Университет машиностроения

8 (495) 223-05-23, доб. 1054

Аннотация. Рассматривается течение закрученного потока воздуха за кольцевыми лопаточными завихрителями в свободном пространстве и в жаровой трубе камеры сгорания ГТД. Представлены профили скоростей и показана интенсивность турбулентности в различных зонах жаровой трубы камеры сгорания.

Ключевые слова: закрученные струйные течения, профили скоростей, турбулентность, жаровая труба камеры сгорания

Закрученные струйные течения широко используются в различных устройствах для сжигания топлива. Закручивание потока воздуха в камере сгорания интенсифицирует процессы турбулентного смешения и, следовательно, процессы горения, поскольку основное влияние на них оказывают газодинамические факторы. Закрутка потока является простым и