

Течение тонкого слоя пластически анизотропного материала по поверхности упругого полупространства

к.т.н. проф. Бодунов М.А., к.ф.м.н. доц. Бодунов Д.М., Бородин И.В.

Университет машиностроения

(495) 2230523, m.a.bodunov@mail.ru, d-bodounov@mail.ru, xborodin@gmail.com

Аннотация. В работе представлено исследование задачи о течении тонкого слоя по поверхности, ограничивающей упругое полупространство, сформулированной в рамках обобщенной теории течения в тонком слое

Ключевые слова: течение в тонком слое, пластически анизотропный материал, деформируемость инструмента

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП № 14.В37.21.0230

Введение

Одним из требований, предъявляемым к современной технологии, является повышение точности изготовления заготовок на первых, более дешёвых операциях в процессах обработки давлением, чтобы последующая, более дорогая механическая обработка была минимальной. Эта проблема актуальна при получении тонкостенных изделий заданной точности, поскольку существенное влияние на конечную геометрию детали оказывает деформируемость тела инструмента.

Технологические процессы обработки давлением, происходящие в форме течения тонкого слоя по рабочим поверхностям инструмента, – это сложные термомеханические процессы: они связаны с большими деформациями первоначальной заготовки; происходят в условиях повышенных температурных градиентов; заметное влияние на процесс могут оказывать скорости деформаций и параметры внутренней структуры материала (например, процессы обработки давлением материалов, находящихся в состоянии сверхпластичности), а также силы инерции и т.д. Очевидно, математическая модель, строго описывающая такие процессы, будет системой сильно нелинейных и чрезвычайно сложных интегро-дифференциальных уравнений; исследовать ее аналитическими методами практически невозможно.

Процессы пластического течения в тонком слое металла обладают рядом особенностей, в частности для них характерны высокие удельные давления, на порядок превышающие величины сдвиговых напряжений. Возникающие под их действием, а также вследствие конечной жёсткости инструмента деформации, достигают величин, соизмеримых с толщиной обрабатываемой детали. А значит, неучёт этих деформаций при проектировании технологической оснастки может отрицательно сказаться на получении детали в точности заданной геометрии.

Кроме того, важная в практических приложениях проблема течения тонких пластических слоев в условиях анизотропии свойств материала и контактного трения на сегодня практически не исследована.

В представленной работе приводится постановка и решение тестовой задачи течения тонкого слоя пластически анизотропного материала по границе упругого полупространства.

Постановка задачи

Пусть тонкий слой пластического материала располагается между двумя параллельными поверхностями упругих тел инструментов, которые сближаются по направлению друг к другу [1, 2, 3]. В результате заданного движения инструментов сжимаемый слой растекается. В некоторый момент $t = 0$, принимаемый за начальный, слой ограничен произвольным в плане XU кусочно-гладким контуром Γ (рисунок 1).

Уравнение контура можно записать либо в явном виде:

$$y_0 = \varphi(x_0),$$

либо параметрическими уравнениями:

$$x_0 = x_0(t), \quad y_0 = y_0(t).$$

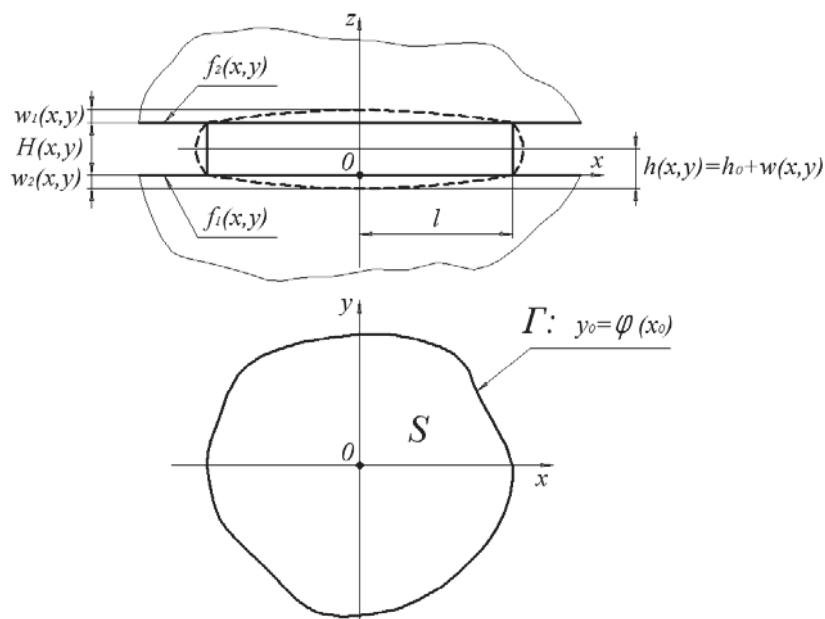


Рисунок 1. Общая схема процесса:

Здесь $H(x, y, t)$ – функция изменяющейся толщины слоя в предположении того, что течение происходит по абсолютно жёстким поверхностям. В данной задаче представленный процесс течения будем рассматривать в относительно небольшой промежуток времени Δt , в течение которого контур $\Gamma(x, y, t)$ Γ практически не изменяется, но степень деформации достаточная для того, чтобы весь слой перешел в состояние пластичности и начался процесс течения. В этом случае за $H(x, y, t)$ можно принять начальную толщину слоя, а в силу того что время здесь – параметр несущественный и производных по нему нет (кинематика не рассматривается), то переменную t можно опустить при написании аргументов функций [1, 2, 3].

Расстояние $H(x, y, t)$ между рабочими поверхностями тел инструментов определяет толщину пластического слоя и полагается весьма малым сравнительно с протяжённостью слоя вдоль осей x и y . Размеры тел инструментов в целом больше размеров слоя.

Будем считать, что слой сжимается между поверхностями, уравнения которых в недеформированном состоянии имеют вид:

$$z = f_1(x, y, t)$$

$$z = f_2(x, y, t)$$

поэтому разность

$$f_1(x, y, t) - f_2(x, y, t) = H(x, y, t)$$

была бы известной толщиной слоя, сжимаемого жёсткими поверхностями.

В процессах течения тонких слоёв развиваются высокие удельные давления на поверхностях контакта с инструментом ($\sigma_n \sim \sigma_s \ell_0^2 / h_0^2$), что приводит к их заметным упругим деформациям. Поэтому толщина слоя становится функцией процесса:

$$h(x, y, t) = H(x, y, t) + w(\sigma_n)$$

Если w_1, w_2 нормальные перемещения точек поверхностей f_1 и f_2 , то толщина слоя запишется в виде:

$$h(x, y, t) = H(x, y, t) + w_1(x, y, t) + w_2(x, y, t)$$

Предположим, что оба инструмента обладают одинаковыми физическими свойствами и геометрией, тогда можно допустить, что при сближении инструментов срединная плоскость слоя остаётся неизменной, что позволяет вследствие симметрии процесса рассматривать течение слоя вдвое меньшей толщины, ограниченного снизу упругим инструментом, а сверху – абсолютно жёстким телом.

Если принять начальную толщину слоя h_0 за постоянную величину, фактическая толщина слоя с учетом упругих деформаций будет определяться (рисунок 1):

$$h(x, y) = h_0 + w(x, y), \quad (1)$$

Таким образом, нахождение неизвестной толщины пластического слоя, определяемой (1.1), а также распределение давления в нём при условии, что область контакта фиксирована, представляется основной целью исследования.

Перейдём к математической формулировке задачи пластического течения в тонком слое. Обозначим p – давление со стороны слоя на поверхности контакта; $\bar{V}\{u, v\}$ – осреднённый по толщине вектор скорости частиц слоя; θ – угол наклона вектора скорости с осью

x ; σ_s – предел текучести материала при известных условиях процесса течения (температура, скорости и степени деформации и т.д.). Приняв все те гипотезы и упрощения, изложенные в [1, 2, 3], запишем систему основных уравнений движения для выделенного элемента слоя $hdxdy$ в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = -\frac{2\tau_s}{h} \cos \theta \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = -\frac{2\tau_s}{h} \sin \theta \end{cases}, \quad (2)$$

Возводя в квадрат левые и правые части (2) и складывая полученные уравнения, запишем соотношение, определяющее контактное давление P :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2} \text{ или } |\text{grad}p|^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad (3)$$

где τ_s – предел текучести материала пластического слоя на сдвиг, $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$.

Граничные условия для (3) определяются из следующих соображений: если контур Γ свободен от внешних воздействий ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$), то $p(x_0, y_0) = \sigma_s$; если граница является пазом, так что в него может свободно втекать металл слоя, а ширина паза порядка или меньше толщины слоя h , то приближённым условием свободного втекания будет $p(x_0, y_0) = 2\sigma_s$ [30]. В общем случае запишем:

$$p(x_0, y_0) = \lambda \sigma_s, \quad (4)$$

где λ – множитель порядка единицы, (x_0, y_0) – точки, принадлежащие фиксированному контуру Γ .

Толщина слоя $h(x, y)$ в выражении (3) определяется при общей постановке задачи в процессе решения; в простейшем варианте, когда известна функция жёсткости $K(x, y, x', y')$ тела инструмента, для w имеем:

$$w(x, y) = \iint_S K(x, y, x', y') p(x', y') dx' dy', \quad (5)$$

Определение функции влияния K для произвольного упругого трёхмерного тела представляет собой самостоятельную трудную задачу, поэтому в рамках данной работы мы остановимся на использовании известной функции Буссинеска, описывающей упругое полупространство [4]:

$$K = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}},$$

Далее, после подстановки (1) в (3), получим

$$|\text{gradp}|^2 = \frac{4\tau_s^2}{(h_0 + w(x, y))^2}, \quad (6)$$

Если область S фиксирована (что в дальнейшем предполагается), уравнения (5), (6) вместе с граничным условием (4) составляют краевую задачу для определения двух неизвестных функций P и h .

Далее приведем полученную систему уравнений, а также граничные условия к безразмерному виду, который в дальнейшем будем использовать. Координаты x, y , а также x', y' отнесем к ℓ , перемещения w к h_0 (которую считаем постоянной) и оставим за ними преж-

ние обозначения. Введем функцию давления по формуле $z = \frac{(p - \lambda\sigma_s)h_0}{2\tau_s\ell}$, тогда уравнение (6) и граничное условие (4) переписутся в виде:

$$|\text{gradz}|^2 = (1 + w)^{-2}, \quad (7)$$

$$z(x_0, y_0) = 0, \quad (8)$$

Из (5) найдем

$$w = \delta_1 \iint_S K(x, y, x', y') dx' dy' + \delta_2 \iint_S K(x, y, x', y') z(x', y') dx' dy'. \quad (9)$$

В (9) приняты следующие обозначения:

$$\delta_1 = \text{дл} \frac{\ell}{h_0} y_s, \quad \delta_2 = 2 \text{дл} \frac{\ell^2}{h_0^2} \tau_s.$$

$$\delta = \frac{1 - \mu^2}{\pi E}$$

Отметим, что параметр δ характеризует размерность функции жесткости $K(x, y, x', y')$, здесь μ - коэффициент Пуассона, E - модуль Юнга.

Поскольку система включает нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных и интегральное соотношение, применим метод последовательных приближений [5]. Полагая $w = 0$ в первом приближении (в этом случае инструмент представляет собой абсолютно жесткое тело), решаем дифференциальное уравнение (7). Решением будет функция z в первом приближении. При известном z из (9) находим w во втором приближении. Далее процесс повторяется. Алгоритм метода можно представить так:

$$|\text{gradz}^{(k)}|^2 = (1 + w^{(k)})^{-2},$$

$$z^{(k)}(x_0, y_0) = 0,$$

$$w^{(k+1)} = \delta_1 \iint_S K(x, y, x', y') dx' dy' + \delta_2 \iint_S K(x, y, x', y') z^{(k)}(x', y') dx' dy'.$$

где k - номер итерации.

Задача о течении тонкого слоя идеально пластического материала по поверхности, ограничивающей упругое полупространство, в указанной постановке исследована в работах [6,

8].

В обобщении теории течения тонкого пластического слоя на случай анизотропии материала и контактного трения [7] показано, что уравнение, связывающее давление в слое ортотропного материала с его толщиной (а значит, и упругими деформациями инструмента) математически тождественно уравнению (3) и имеет вид:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad (10)$$

где β - отношение пределов текучести материала вдоль осей x и y соответственно, т.е. показатель анизотропии. После подстановки $y = \beta\eta$ в (10), получаем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad (11)$$

что дает возможность решить задачу (11), (4), (5) с помощью уже известного метода приближений [5].

Следует отметить, что каждая итерация метода приближений приводит к необходимости перехода от одной системы координат к другой. Задача для определения давления решается в плоскости (x, η) , а задача по определению прогибов в плоскости (x, y) (рисунок 2).

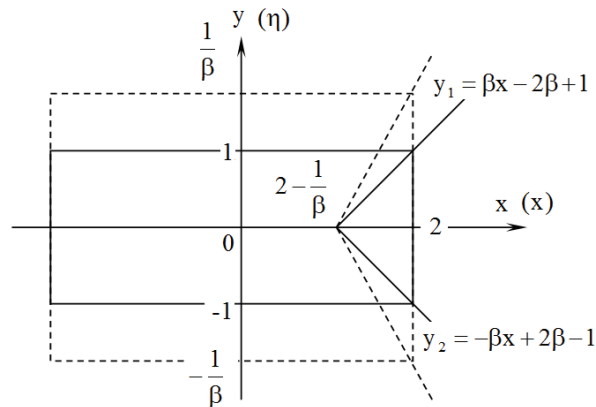


Рисунок 2. Схема перехода

Наличие большого числа параметров задачи позволило провести оценку влияния параметра анизотропии на скорость сходимости метода последовательных приближений.

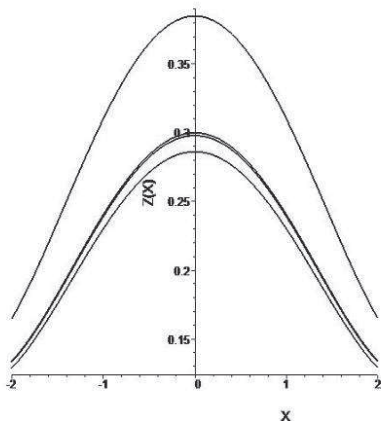


Рисунок 3. Сечение $w(x, 0)$, $\beta = 1.2$

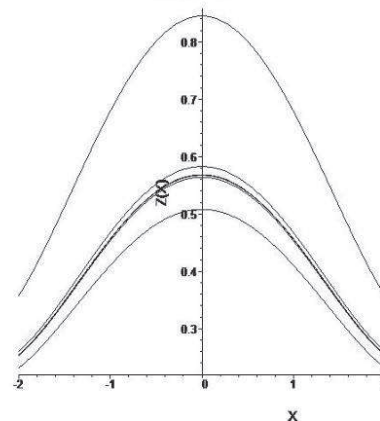


Рисунок 4. Сечение $w(x, 0)$, $\beta = 0.9$

На рисунках 3-6 представлены некоторые результаты исследования задачи течения тонкого слоя пластически ортотропного материала, занимающего в плане прямоугольную область с соотношением сторон 2:1 и 3:1, относительной толщиной 1/30, 1/40 и различными

значениями параметра анизотропии. Вычислительные процедуры проводились с использованием пакета Maple 15.00.

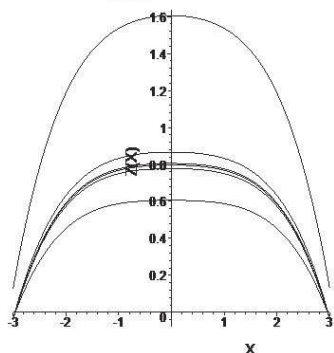


Рисунок 5. Сечение $w(x,0)$, $\beta = 0.9$

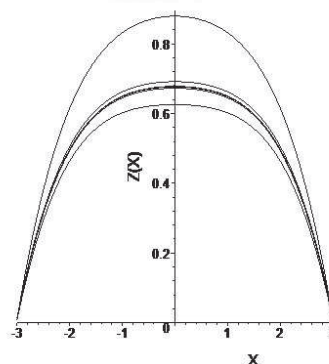


Рисунок 6. Сечение $w(x,0)$, $\beta = 1.2$

Выводы

1. Установлена фактическая сходимость метода последовательных приближений, предложенного для решения системы интегро-дифференциальных уравнений.
2. Характер поверхности перемещений качественным образом не зависит от параметров задачи.
3. Значение параметра анизотропии может оказать существенное влияние на скорость сходимости метода, поскольку влияет на распределение давления в слое, тем самым подтверждаются полученные ранее результаты исследований – увеличение давления приводит к снижению скорости сходимости метода. Очевидно, первое приближение является грубым, но второе, для ряда значений параметров задачи, может дать довольно точную оценку величины упругих перемещений контактных поверхностей инструмента.

Литература

1. Ильющин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // Прикл. матем. и мех. – 1954, т. 18, № 3. – с. 265-288.
2. Ильющин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // Прикл. матем. и мех. – 1955, т. 19, № 6. – с. 693-713.
3. Кийко И.А. Теория пластического течения в тонком слое металла. – М.: Инст. мех. МГУ, 1971. – 66 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности // М., Наука. – 1969. – 420 с.
5. Кийко И.А. Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического вещества // ДАН СССР. – 1964, т. 157, № 3. – с. 551-553.
6. Бодунов Д.М. Течение тонкого слоя идеально-пластического материала по деформируемым поверхностям: Дис... канд. физ.-мат.н. – М., МГТУ МАМИ, 2004. – 163 с.
7. Кийко И.А., Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя//ПММ, 2006, т.70, вып.2, с. 344-351.
8. Бодунов Д.М., Бодунов М.А., Коваленко П.В., Задача о течении пластического вещества в фиксированной области, имеющей форму равнобокой трапеции. Инструмент – упругое полупространство. Известия МГТУ «МАМИ», 2007, №2(4), с.229-239.