

Контактная задача для двухслойного упругого покрытия твердого цилиндра

д.т.н. проф. Божкова Л.В., к.т.н. проф. Рябов В.Г., к.т.н. доц. Норицина Г.И.

Университет машиностроения

8(495) 223-05-23, доб. 1318

Аннотация. Предложен аналитический метод решения контактной задачи для двухслойного упругого покрытия твердого цилиндра, применимый для кольцевых слоев произвольной толщины, одновременно в случае сжимаемого и несжимаемого материалов. Закон изменения контактных давлений выражен в виде некоторого бесконечного ряда, содержащего бесконечное число неизвестных констант, которые определены путем разложения известной функции по построенной ортогональной системе функций. В результате найдена величина зоны контакта, закон изменения контактных давлений, характеристика сжатия, а также напряженно-деформированное состояние слоев.

Ключевые слова: контакт, напряжения, деформации, упругие слои, зона контакта, контактные давления, характеристики обжатия, упругие перемещения

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии двухслойного упругого покрытия твердого покрытия цилиндра с другим твердым цилиндром.

В результате деформации упругих слоев произойдет соприкосновение твердого цилиндра с внешним слоем упругого покрытия по некоторой его части, определяемой углом θ_0 (рисунок 1)

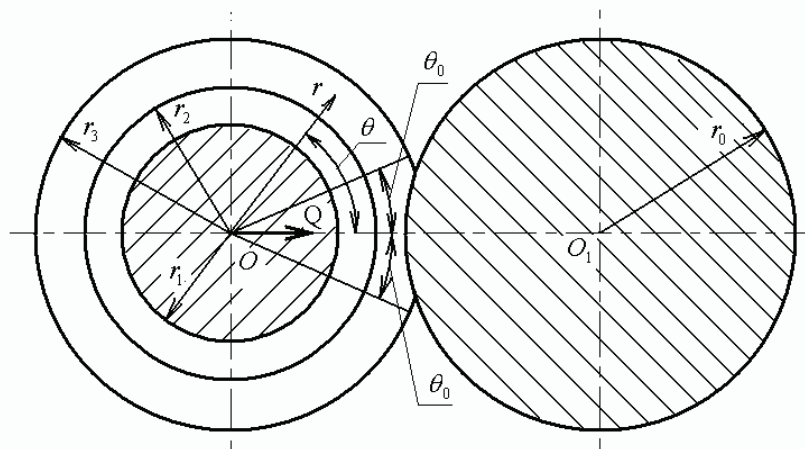


Рисунок 1. Расчетная схема

Считая справедливыми условия плоской деформации и пренебрегая силами трения в зоне контакта, определим величину зоны контакта (угол θ_0), закон распределения контактных давлений $p(\theta)$, а также напряженное и деформированное состояние упругих слоев.

Для определенности присвоим порядковый номер каждому слою (от 1 до 2), начиная от слоя, непосредственно покрывающего твердый цилиндр.

В [1] предложен приближенный инженерный метод решения рассматриваемой задачи. Он прост и удобен, однако в основе этого метода лежит допущение о том, что контактные давления изменяются по закону косинуса. Кроме того, геометрическое условие контакта удовлетворяется только в трех точках зоны контакта.

В связи с этим является актуальным построение уточненного метода решения данной

задачи, свободного от указанных выше допущений. Уточненное решение позволит оценить погрешности, к которым приводит использование приближенного метода решения, и определить класс задач, для которого целесообразно его применение.

Таким образом, закон изменения контактных давлений $\rho(\theta)$ представим в виде некоторого бесконечного ряда

$$\bar{\rho}(\theta) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \cos\left(m\pi \frac{\theta}{\theta_0}\right), & |\theta| < \theta_0, \\ 0, & |\theta| > \theta_0 \end{cases}, \quad (1)$$

где: $\bar{\rho}(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{E_2}$ - безмерная величина, E_2 - модуль упругости внешнего (второго) слоя упругого покрытия, $\rho_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ безразмерные неизвестные константы.

Разложим функцию $\bar{\rho}(\theta)$ в ряд Фурье на промежутке $-\pi \leq \theta \leq \pi$:

$$\bar{\rho}(\theta) = \frac{\bar{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \cos n\theta. \quad (2)$$

Коэффициенты ряда Фурье $\bar{A}_0, \bar{A}_n$ являются также безразмерными величинами и определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \frac{2\theta_0}{\pi} \rho_0, \\ \bar{A}_n &= \frac{2 \sin n\theta_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \rho_m \frac{n}{(\tilde{m}^2 - n^2)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tilde{m} = \frac{m\pi}{\theta_0}$.

В рассматриваемой задаче величина зоны контакта при малых деформациях будет малой (по сравнению с радиусами упругих слоев), вследствие чего радиальные упругие перемещения в зоне контакта точек внешней поверхности второго упругого слоя ($W_2(r_3, \theta)$) могут быть представлены в безразмерном виде следующим образом:

$$\bar{W}_2(1, \theta) = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_3}{r_0}\right) \theta^2, \quad |\theta| < \theta_0, \quad (4)$$

где: $\bar{W}_2(1, \theta) = \frac{W_2(r_3, \theta)}{r_3}$, $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r_3}$, δ - неизвестный параметр, характеризующий сближение тел при сжатии.

На основании результатов [2] с учетом соотношений (1)-(3) радиальные упругие перемещения точек внешней поверхности второго упругого слоя $\bar{W}_2(1, \theta)$, вызванные действием на участке $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ контактных нормальных давлений $\bar{\rho}(\theta)$, можно представить в виде:

$$\bar{W}_2(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \bar{A}_n \cos n\theta, \quad (5)$$

где γ_n - некоторая последовательность чисел, зависящая от конструктивных параметров (радиусов кольцевых слоев и твердых цилиндров) и упругих характеристик материала слоев.

В результате подстановки (3) в выражение (5) получим:

$$\bar{W}_2(1, \theta) = \frac{2}{\pi} \left[\rho_0 \gamma_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \rho_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n \sin n\theta_0 \cos n\theta}{\tilde{m}^2 - n^2} \right], \quad (6)$$

где $\eta_n = n\gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Естественно, что функция (6) должна совпадать с функцией (4) в зоне контакта. Приравняв правые части (4) и (6), будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \left[\rho_0 \gamma_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \rho_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n \sin n \theta_0 \cos n \theta}{\tilde{m}^2 - n^2} \right] = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \theta^2, \quad |\theta| < \theta_0. \quad (7)$$

Безразмерный параметр $\bar{\delta}$, характеризующий сближение тел при сжатии, определим, подставляя в (7) значение $\theta = 0$:

$$\bar{\delta} = -\frac{2}{\pi} \left[\rho_0 \gamma_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \rho_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n \sin n \theta_0}{\tilde{m}^2 - n^2} \right]. \quad (8)$$

В результате подстановки (8) в (7) получим:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m \varphi_m(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \theta^2, \quad |\theta| < \theta_0, \quad (9)$$

где

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{n^2} [\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n \theta_0], \quad (10)$$

$$\varphi_m(\theta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{(\tilde{m}^2 - n^2)} [\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n \theta_0], \quad (11)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

На основании результатов [2] можно доказать, что последовательность чисел η_n ($n = 1, 2, \dots$) стремится при увеличении n к некоторому числу η . Это позволяет улучшить сходимость рядов, входящих в (8), (10) и (11). В результате будем иметь:

$$\bar{\delta} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \gamma_0 \rho_0 \theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \rho_m \left[\frac{(-1)^{m+1}}{\tilde{m}} \eta \operatorname{si}(m\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta_n - \eta) \sin n \theta_0}{\tilde{m}^2 - n^2} \right] \right\}, \quad (12)$$

$$\varphi_0(\theta) = \frac{\eta}{\pi} \left[\int_{\theta_0}^{\theta} \ln \left(2 \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2} \right) d\theta - \int_{-\theta_0}^{\theta} \ln \left(2 \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right) d\theta - 2 \int_0^{\theta_0} \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta_n - \eta)}{n^2} [\sin n(\theta_0 + \theta) + \sin n(\theta_0 - \theta) - 2 \sin n \theta_0], \quad (13)$$

$$\varphi_m(\theta) = \frac{\eta}{\pi \tilde{m}} \left\{ \sin(\tilde{m} \theta) \left[\ln \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 + \theta} + s_1(\tilde{m}(\theta_0 + \theta)) - s_1(\tilde{m}(\theta_0 - \theta)) \right] + \right.$$

$$\left. + \cos(\tilde{m} \theta) [\operatorname{si}(\tilde{m}(\theta_0 + \theta)) + \operatorname{si}(\tilde{m}(\theta_0 - \theta))] - 2 \operatorname{si}(m\pi) \right\} + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma_n - \gamma)}{(\tilde{m}^2 - n^2)} \cdot \quad (14)$$

$$[\sin n(\theta_0 - \theta) + \sin n(\theta_0 + \theta) - 2 \sin n \theta_0], \quad m = 1, 2, \dots$$

где: $\operatorname{si}(x)$ - интегральный синус, $s_1(x)$ - затабулированная функция [3].

Таким образом, задача свелась к определению неизвестных констант ρ_m ($m = 0, 1, 2, \dots$), входящих в функциональное уравнение (9).

Рассмотрим метод решения функционального уравнения (9), в основе которого лежит построение ортогональной системы функций $\Phi_m(\theta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) по заданной системе функций $\varphi_m(\theta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Ортогональная система функций может быть построена на основании следующего соотношения:

$$\Phi_m(\theta) = \sum_{i=0}^m \frac{T_{im}^{-1}}{T_{mm}^{-1}} \varphi_i(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где T_{im}^{-1} - элемент некоторой обратной матрицы $[T]_m^{-1}$. При этом элементы матрицы $[T]_m$ определяются по формуле:

$$T_{ij} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \varphi_i(\theta) \cdot \varphi_j(\theta) d\theta, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad j = 0, 1, 2, \dots, m., \quad (16)$$

Следовательно, константы $\rho_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ можно определить путем решения задачи о разложении функции $f(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \theta^2$ по ортогональной системе функций $\Phi_m(\theta) (m = 0, 1, 2, \dots)$. При этом искомые константы будут равны

$$\rho_m = \sum_{i=m}^{\infty} D_i \frac{T_{mi}^{-1}}{T_{ii}^{-1}}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

где

$$D_i = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \cdot \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \theta^2 \Phi_i(\theta) d\theta}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Phi_i^2(\theta) d\theta}. \quad (18)$$

Для определения величины зоны контакта необходимо составить уравнение статического равновесия:

$$\tilde{\bar{Q}} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \bar{\rho}(\theta) r_3 d\theta, \quad (19)$$

где $\bar{Q} = \frac{Q}{E_2}$ (Q - величина результирующей нагрузки).

В результате подстановки (1) в уравнение (19) получим

$$\tilde{\bar{Q}} = 2\tilde{\rho}_0 \theta_0, \quad (20)$$

где:

$$\tilde{\bar{Q}} = \frac{Q}{E_2 r_3 \left(1 + \frac{r_3}{r_0} \right)}, \quad \tilde{\rho}_0 = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{r_3}{r_0} \right)}. \quad (21)$$

Таким образом, общая схема уточненного метода решения контактной задачи для двухслойного упругого покрытия твердого цилиндра состоит в следующем:

- На основании результатов [2] вычисляем параметр γ_0 и последовательность чисел $\eta_n (n = 1, 2, \dots)$. Устанавливаем при этом с заданной точностью число η , к которому эта последовательность чисел стремится.
- Задаваясь последовательно различными значениями угла θ_0 , определяем соответствующие им константы $\rho_m (m = 0, 1, 2, \dots)$ в соответствии с (14) – (18).
- На основании (12) и (20) строим графики зависимостей соответственно между параметром δ , результирующей нагрузкой и углом θ_0 .
- По заданной результирующей нагрузке Q (или заданному сближению тел при сжатии δ) по одному из построенных графиков определяем угол θ_0 (тем самым определяем величину зоны контакта).
- Для найденного значения угла θ_0 определяем константы $\rho_m (m = 0, 1, 2, \dots)$.
- На основании (1) находим закон изменения контактных давлений $\rho(\theta)$.

- Определив величину зоны контакта (угол θ_0) и закон распределения контактных давлений $\rho(\theta)$, на основании результатов [2] можно определить напряженное и деформированное состояния каждого из упругих слоев.

На рисунке 2 показаны законы изменения контактных давлений при различных значениях отношений модулей упругости слоев $\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$ в случае, когда $\theta_0 = 0,05$ раз, коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$, $\rho_1 = \frac{r_1}{r_3} = 0,95$ и $\rho_2 = \frac{r_2}{r_3} = 0,96$.

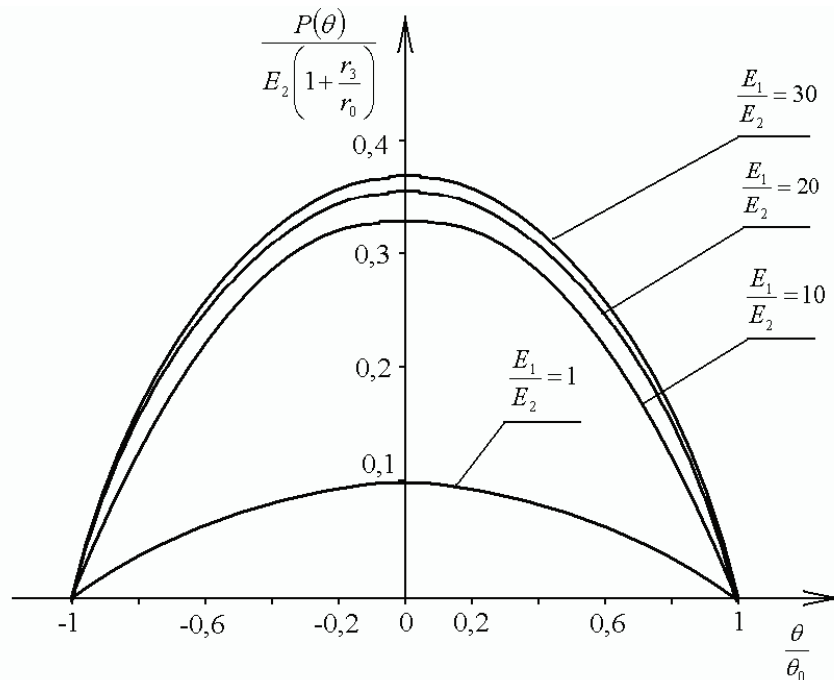


Рисунок 2. Законы изменения контактных давлений

Следует отметить, что достоинством предложенного метода решения контактной задачи для двухслойного упругого покрытия твердого цилиндра является применимость его не только для кольцевых слоев произвольной толщины, но и одновременно для случаев сжимаемого и несжимаемого материалов.

Литература

- Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Приближенное решение контактной задачи для двухслойного упругого покрытия твердого цилиндра.// Известия МГТУ «МАМИ», М.: 2012, № 1, с. 230-234.
- Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области.// Известия МГТУ «МАМИ», М.: 2011, № 1, с. 217-221.
- Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике, Наука, М.: 1978, 831 с.