

Уравнения процесса нагружения пологих цилиндрических оболочек при двустороннем сжатии

к.т.н. проф. Володин В.П., Надиров Э.Р.

Тверской государственный технический университет

+7 (4822) 52-63-63, n-emin@mail.ru

Аннотация. Получены уравнения процесса нагружения прямоугольных в плане пологих оболочек при двустороннем сжатии при их расчете вариационными методами. Задача решена с учетом геометрической нелинейности.

Ключевые слова: полая оболочка, вариационные методы, процесс нагружения

Введение

В работе рассматривается полая цилиндрическая панель (рисунок 1), находящаяся под действием равномерно распределенных нагрузок p_x и p_y , приложенных с эксцентриситетом z_p . Панель имеет в плане прямоугольную форму с размерами a и b . Задача решается в перемещениях с учетом геометрической нелинейности. Целью работы является получение уравнений процесса нагружения панели.

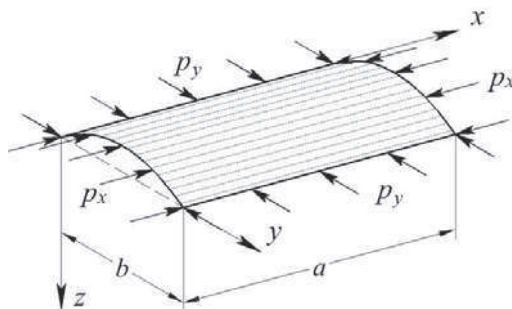


Рисунок 1. Расчетная схема панели

Постановка задачи

Определение перемещений производим на основании предложенной методики [2]. Требуется найти функции, соответствующие общему решению бигармонического уравнения для функции перемещений $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$

$$\alpha_0^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \bar{y}^4} = w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} - \bar{k}_x a w_{,yy} - \bar{k}_y b w_{,xx}. \quad (1)$$

В этом уравнении: $\alpha = a/b$, $\alpha_0 = b/a$; a , b – размеры оболочки в плане; k_x , k_y – кривизны оболочки; буквы после запятой указывают, по какой координате производится дифференцирование функции. Кроме того, введены безразмерные координаты:

$$\bar{k}_x = k_x a, \quad \bar{k}_y = k_y b, \quad \bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b.$$

При двустороннем сжатии панели общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$\Psi_0(\bar{x}, \bar{y}) = \tilde{\Psi}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{1}{2} a_{11} b \bar{y}^2 + \frac{1}{2} a_{22} a \bar{x}^2. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\Psi}(\bar{x}, \bar{y})$ – частное решение уравнения (1); a_{11} , a_{22} – постоянные коэффициенты, подлежащие определению. При двустороннем сжатии панели двоякой кривизны выражение для прогиба примем в виде:

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = f_{\lambda\nu} X_{\lambda}(\bar{x}) Y_{\nu}(\bar{y}). \quad (3)$$

В этом выражении

$$X_\lambda = \sin \bar{k}_x [\bar{m}_x \sin \lambda_x \bar{x} - \sin \lambda_x (\bar{x} - 1)] + \sin \lambda_x [\sin \bar{k}_x (\bar{x} - 1) - \bar{m}_x \sin \bar{k}_x \bar{x}];$$

$$Y_v = \sin \bar{k}_y [\sin \nu_y \bar{y} - \sin \nu_y (\bar{y} - 1)] + \sin \nu_y [\sin \bar{k}_y (\bar{y} - 1) - \sin \bar{k}_y \bar{y}];$$

$$\bar{m}_x = m_x / m_x^0, \quad \bar{m}_x^0 = 1 - \bar{m}_x, \quad m_x = p_x z_p, \quad m_x^0 = p_x z_p^0, \quad 0 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1.$$

Функция $X_\lambda(\bar{x})$ соответствует выполнению граничных условий $X_\lambda(0) = 0$, $X_\lambda(1) = 0$, т.е. (рисунок 2а) сжатию панели на поперечных краях равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью p_x и изгибу моментами m_x и m_x^0 , которые могут быть разными и по величине, и по направлению. Здесь z_p – координата приложения нагрузки p_x .

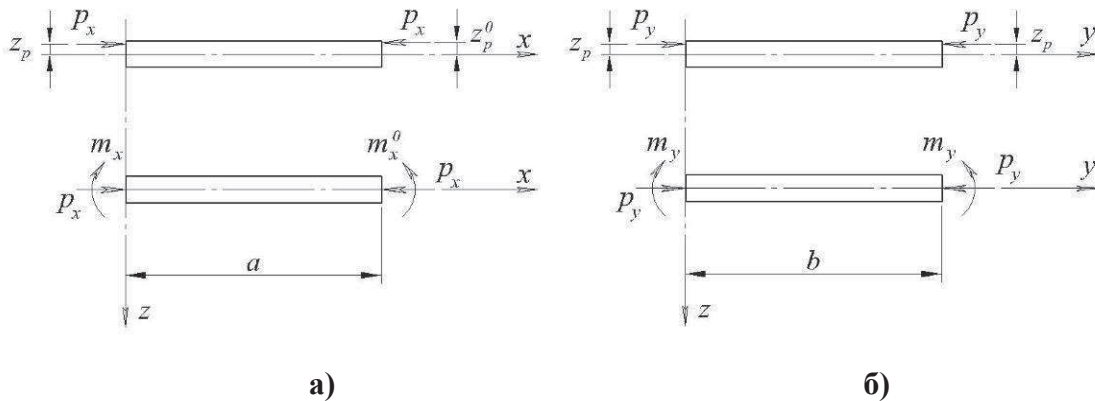


Рисунок 2. Нагрузка на поперечных (а) и на продольных (б) краях с эксцентриситетом и ее эквивалент

Функция $Y_v(\bar{y})$ соответствует выполнению граничных условий $Y_v(0) = 0$, $Y_v(1) = 0$, т.е. (рис. 2б) сжатию панели на продольных краях равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью p_y и изгибу моментами с интенсивностью m_y , одинаковыми и по величине, и по направлению.

$$\lambda_x^2 = \lambda^2 + \bar{k}_x^2; \quad \nu_y^2 = \nu^2 + \bar{k}_y^2; \quad \lambda^2 = \frac{|N_x|a^2}{D}; \quad \nu^2 = \frac{|N_y|b^2}{D}; \quad N_x = \int_0^1 \int_0^1 N_x(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}; \quad N_y = \int_0^1 \int_0^1 N_y(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}.$$

Таким образом, N_x и N_y – это средние значения продольных усилий в процессе нагружения, $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость. Теперь нужно найти частное решение неоднородного бигармонического уравнения:

$$\alpha_0^2 \frac{\partial^4 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \tilde{\Psi}}{\partial \bar{y}^4} = w_{,\bar{x}\bar{y}}^2 - w_{,\bar{x}\bar{x}} w_{,\bar{y}\bar{y}} - \bar{k}_x a w_{,\bar{x}\bar{y}} - \bar{k}_y b w_{,\bar{x}\bar{x}}.$$

При принятом выражении для прогиба частное решение содержит более двухсот слагаемых и будет иметь чрезвычайно громоздкий вид. Учитывая, что нам нужно знать структуру функций, входящих в выражения для касательных перемещений только для определения этих перемещений, используем своеобразный «принцип суперпозиции».

Вводим в рассмотрение функции:

$$X_\lambda^0 = \sin \bar{k}_x [\bar{m}_x \sin \lambda_x \bar{x} - \sin \lambda_x (\bar{x} - 1)]; \quad X_k^0 = \sin \lambda_x [\sin \bar{k}_x (\bar{x} - 1) - \bar{m}_x \sin \bar{k}_x \bar{x}];$$

$$Y_v^0 = \sin \bar{k}_y [\sin \nu_y \bar{y} - \sin \nu_y (\bar{y} - 1)]; \quad Y_k^0 = \sin \nu_y [\sin \bar{k}_y (\bar{y} - 1) - \sin \bar{k}_y \bar{y}]. \quad (4)$$

При принятом выражении для прогиба (3):

$$w_{,\bar{x}\bar{y}}^2 - w_{,\bar{x}\bar{x}} w_{,\bar{y}\bar{y}} = f_{\lambda\nu}^2 [(X_\lambda')^2 (Y_v')^2 - X_\lambda X_\lambda'' Y_v Y_v''].$$

Функции X_λ и Y_v содержат две пары слагаемых: первая пара слагаемых в процессе нагружения меняется не только количественно, но и качественно (за счет изменения парамет-

ров λ_x и ν_y); вторая пара слагаемых меняется только количественно (кривизны \bar{k}_x и \bar{k}_y в процессе нагружения не меняется). При введенных функциях (4):

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = f_{\lambda\nu} \left[X_{\lambda}^0(\bar{x})Y_{\nu}^0(\bar{y}) + X_{\lambda}^0(\bar{x})Y_{\kappa}^0(\bar{y}) + X_{\kappa}^0(\bar{x})Y_{\nu}^0(\bar{y}) + X_{\kappa}^0(\bar{x})Y_{\kappa}^0(\bar{y}) \right].$$

Выражение для прогиба содержит четыре слагаемых, поэтому, как и для линейной правой части, определяем функцию перемещений от каждого слагаемого в отдельности, снабжаем все полученные слагаемые неопределенным коэффициентом и складываем их, в результате получим необходимую функцию перемещений. Для упрощения дальнейших выкладок вводим такие обозначения:

$$S_{\lambda} = \sin \lambda_x, \quad S_{\lambda x}^0 = \sin \lambda_x \bar{x}, \quad S_{\lambda x} = \sin \lambda_x (\bar{x} - 1), \quad C_{\lambda x}^0 = \cos \lambda_x \bar{x}, \quad C_{\lambda x} = \cos \lambda_x (\bar{x} - 1);$$

$$S_{\nu y}^0 = \sin \nu_y \bar{y}, \quad S_{\nu y} = \sin \nu_y (\bar{y} - 1), \quad C_{\nu y}^0 = \cos \nu_y \bar{y}, \quad C_{\nu y} = \cos \nu_y (\bar{y} - 1).$$

Рассмотрим случай $m_x = m_x^0$, т.е. $\bar{m}_x = 1$. Это случай, когда на поперечных краях действуют моменты, одинаковые по величине и по направлению. Считаем справедливыми условия $\sin \bar{k}_x \approx \bar{k}_x$, $\sin \bar{k}_y \approx \bar{k}_y$, при малых \bar{k}_x и \bar{k}_y ($\bar{k}_x, \bar{k}_y \leq 0,4$). Тогда получим:

$$X_{\lambda}(\bar{x}) = \bar{k}_x (S_{\lambda x}^0 - S_{\lambda x}) - \bar{k}_x S_{\lambda}; \quad X'_{\lambda}(\bar{x}) = \bar{k}_x \lambda_x (C_{\lambda x}^0 - C_{\lambda x}).$$

В этом случае удобно ввести такие функции:

$$X_S = S_{\lambda x}^0 - S_{\lambda x}; \quad X_C = C_{\lambda x}^0 - C_{\lambda x}; \quad Y_S = S_{\nu y}^0 - S_{\nu y}; \quad Y_C = C_{\nu y}^0 - C_{\nu y}.$$

Можно записать:

$$X_{\lambda}(\bar{x}) = \bar{k}_x X_S(\bar{x}) - \bar{k}_x S_{\lambda}; \quad Y_{\nu}(\bar{y}) = \bar{k}_y Y_S(\bar{y}) - \bar{k}_y S_{\nu}.$$

Имеет смысл ввести функции:

$$X_{S1}(\bar{x}) = \sin \lambda_x (2\bar{x} - 1); \quad X_{C1}(\bar{x}) = \cos \lambda_x (2\bar{x} - 1); \quad X_{S2}(\bar{x}) = \sin 2\lambda_x \bar{x} + \sin 2\lambda_x (\bar{x} - 1); \quad X_{C2}(\bar{x}) = \cos 2\lambda_x \bar{x} + \cos 2\lambda_x (\bar{x} - 1).$$

В случае симметричной поперечной деформации (один член ряда) выражение для прогиба берем в виде:

$$w(\bar{x}, \bar{y}) = f_{\lambda 1} X_{\lambda}(\bar{x}) \sin \pi \bar{y}.$$

Вводим обозначения:

$$S_{\lambda} = \sin \lambda_x, \quad C_{\lambda} = 1 - \cos \lambda_x, \quad \bar{k}_{\lambda}^2 = \pi^2 \bar{k}_x^2 \alpha + \bar{k}_x \bar{k}_y \lambda_x^2.$$

Уравнение (1) примет вид:

$$\alpha_0^2 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial \bar{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial \bar{y}^4} = \frac{1}{2} \pi^2 \bar{k}_x^2 \lambda_x^2 f_{\lambda 1}^2 [S_{\lambda} X_S(\bar{x}) - 2X_{C1}(\bar{x}) + X_{C2}(\bar{x}) +$$

$$+ 2C_{\lambda} \cos 2\pi \bar{y} - S_{\lambda} X_S(\bar{x}) \cos 2\pi \bar{y}] + f_{\lambda 1} [b \bar{k}_{\lambda}^2 X_S(\bar{x}) \sin \pi \bar{y} - \pi^2 \bar{k}_x^2 a S_{\lambda} \sin \pi \bar{y}]. \quad (5)$$

Вводим величину:

$$\lambda_k^0 = 1 + \alpha_0 \frac{\bar{k}_y \lambda_x^2}{\bar{k}_x \pi^2}, \quad \text{или} \quad \bar{k}_{\lambda}^2 = \pi^2 \bar{k}_x^2 \alpha \lambda_k^0.$$

Общее решение уравнения (5) при двухстороннем сжатии панели записывается в виде (2). Использование точного решения уравнения (5) приводит к чрезвычайно громоздким уравнениям вычислительного процесса. Поэтому, следуя общей методологии, снабжаем каждое слагаемое точного решения неопределенным коэффициентом; при исследовании процесса нагружения введенные коэффициенты определяются на основании вариационного уравнения Лагранжа. На основании этого общее решение уравнения (5) запишем в виде:

$$\Psi_0(\bar{x}, \bar{y}) = ab \left[0,5 \cdot a_1 \bar{y}^2 + 0,5 \cdot a_2 \bar{x}^2 + f_0 X_S(\bar{x}) + f_1 X_{C1}(\bar{x}) + f_2 X_{C2}(\bar{x}) + \right.$$

$$\left. + f_3 X_S(\bar{x}) \sin \pi \bar{y} + f_4 X_S(\bar{x}) \cos 2\pi \bar{y} + f_5 \sin \pi \bar{y} + f_6 \cos 2\pi \bar{y} \right].$$

Введение множителя ab приводит к тому, что коэффициенты a_k и f_m являются безразмерными. Заменим неопределенными коэффициентами множители во вторых производ-

ных, которые сложным образом зависят от параметра λ , поскольку именно от вторых производных зависят деформации и перемещения. Пусть:

$$f_{\lambda 2} = \frac{1}{2a} f_{\lambda 1}^2 \frac{\lambda_x^2}{(\alpha_0 \lambda_x^2 + 4\alpha\pi^2)^2} S_\lambda; \quad f_{\lambda 3} = f_{\lambda 1} \frac{1}{(\alpha_0 \lambda_x^2 + \alpha\pi^2)^2}.$$

Тогда согласно [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{ab} (\alpha \Psi_{,yy}^0 - \mu \alpha_0 \Psi_{,xx}^0); \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{ab} (\alpha_0 \Psi_{,xx}^0 - \mu \alpha \Psi_{,yy}^0); \quad \gamma_{xy}^0 = -2(1+\mu) \frac{1}{ab} \Psi_{,xy}^0; \\ U_0(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{b} \int (\alpha \Psi_{,yy}^0 - \mu \alpha_0 \Psi_{,xx}^0) d\bar{x}; \quad V_0(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{a} \int (\alpha_0 \Psi_{,xx}^0 - \mu \alpha \Psi_{,yy}^0) d\bar{y}; \quad U_1(\bar{x}, \bar{y}) = \int \left(\bar{k}_x w - \frac{1}{2a} w_{,x}^2 \right) d\bar{x}; \\ V_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \int \left(\bar{k}_y w - \frac{1}{2b} w_{,y}^2 \right) d\bar{y}; \quad U(\bar{x}, \bar{y}) = U_0(\bar{x}, \bar{y}) + U_1(\bar{x}, \bar{y}); \quad V(\bar{x}, \bar{y}) = V_0(\bar{x}, \bar{y}) + V_1(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда перемещения краев панели симметричны относительно осей ее симметрии, т.е. $u(0, \bar{y}) = -u(1, \bar{y})$; $v(\bar{x}, 0) = -v(\bar{x}, 1)$. В этом случае принимаем:

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = U(\bar{x}, \bar{y}) + f_0(\bar{y}); \quad v(\bar{x}, \bar{y}) = V(\bar{x}, \bar{y}) + g_0(\bar{x}); \quad f_0(\bar{y}) = -\frac{1}{2} [U(1, \bar{y}) + U(0, \bar{y})]; \quad g_0(\bar{x}) = -\frac{1}{2} [V(\bar{x}, 1) + V(\bar{x}, 0)].$$

Деформации определяются так:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \frac{1}{b} f_0'(\bar{y}) + \frac{1}{a} g_0'(\bar{x}). \quad (7)$$

Таким образом, линейные деформации остаются такими же, как и в исходном случае; меняются только угловые деформации.

$$f_0(\bar{y}) = \bar{k}_x^2 f_{\lambda 1}^2 \frac{\lambda_x^2}{8a} C_\lambda - \frac{1}{2} (\alpha a_{11} - \mu a_{22}); \quad g_0(\bar{x}) = \bar{k}_x^2 \pi^2 f_{\lambda 1}^2 \frac{\alpha}{8b} (C_\lambda + S_\lambda^2) - \frac{1}{2} (\alpha_0 a_{22} - \mu a_{11}). \quad (8)$$

В результате получаем:

$$U_2(\bar{x}, \bar{y}) = U(\bar{x}, \bar{y}) + f_0(\bar{y}); \quad V_2(\bar{x}, \bar{y}) = V(\bar{x}, \bar{y}) + g_0(\bar{x}).$$

Таково симметричное перемещение в направлении оси x (в продольном направлении) и симметричное перемещение в направлении оси y (в поперечном направлении). Из (7) с учетом (8) следует:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0.$$

Таким образом, деформации остаются без изменения. Введем обозначения:

$$\lambda_{x1}^0 = 4\alpha\pi^2 - \mu\alpha_0\lambda_x^2; \quad \lambda_{x2}^0 = \alpha_0\lambda_x^2 - 4\mu\alpha\pi^2; \quad \lambda_{x3}^0 = \alpha\pi^2 - \mu\alpha_0\lambda_x^2; \quad \lambda_{x4}^0 = \alpha_0\lambda_x^2 - \mu\alpha\pi^2; \quad \bar{k}_0 = \bar{k}_y / \bar{k}_x. \quad (9)$$

Взаимное удаление точек, расположенных на продольных $\Delta v(\bar{x})$ и поперечных $\Delta u(\bar{y})$ краях, будет таким

$$\begin{aligned} \Delta v(\bar{x}) &= v(\bar{x}, 1) - v(\bar{x}, 0) = \alpha_0 a_{22} - \mu a_{11} + \bar{k}_x^2 \pi^2 \left\{ -\frac{\alpha}{4a} (C_\lambda + S_\lambda^2) f_{\lambda 1}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi^3} f_{\lambda 1} \left[(\bar{k}_0 + \mu\alpha_0) S_\lambda - \bar{k}_0 X_S(\bar{x}) \right] - \frac{2\lambda_{x4}^0}{\pi} \lambda_k^0 f_{\lambda 3} X_S(\bar{x}) \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta u(\bar{y}) &= u(1, \bar{y}) - u(0, \bar{y}) = \alpha a_{11} - \mu a_{22} + \bar{k}_x^2 \pi^2 \left\{ \frac{1}{2b} f_{\lambda 1}^2 \left[2 \frac{\mu\alpha}{\lambda_x} C_\lambda S_\lambda - \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{2\pi^2} C_\lambda + \frac{\lambda_{x4}^0}{2\pi^2 \lambda_x} S_\lambda C_\lambda - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha_0 \lambda_x}{2\pi^2} S_\lambda C_\lambda \cos 2\pi \bar{y} \right] + \frac{2}{\pi^2 \lambda_x} C_\lambda f_{\lambda 1} \sin \pi \bar{y} + 2\alpha \frac{\lambda_{x1}^0}{\lambda_x} C_\lambda f_{\lambda 2} \cos 2\pi \bar{y} - \frac{2\alpha \lambda_{x3}^0}{\lambda_x} \lambda_k^0 C_\lambda f_{\lambda 3} \sin \pi \bar{y} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Взаимное удаление угловых точек, расположенных на краях панели, определяется так

$$\Delta u_0 = \Delta u(1) = \Delta u(0) = \alpha a_{11} - \mu a_{22} + \bar{k}_x^2 \pi^2 C_\lambda \left[\frac{f_{\lambda 1}^2}{4b} \left(\frac{3\mu\alpha}{\lambda_x} S_\lambda - \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{\pi^2} \right) + 2\alpha \frac{\lambda_{x1}^0}{\lambda_x} f_{\lambda 2} \right]; \quad (12)$$

$$\Delta v_0 = \Delta v(1) = \Delta v(0) = \alpha_0 a_{22} - \mu a_{11} + \bar{k}_x^2 \pi^2 \left[-\frac{\alpha}{4a} f_{\lambda 1}^2 (C_\lambda + S_\lambda^2) - \frac{2\mu\alpha_0}{\pi^3} f_{\lambda 1} S_\lambda - \frac{2\lambda_{x4}^0}{\pi} \lambda_k^0 f_{\lambda 3} S_\lambda \right]. \quad (13)$$

Известно, что вариационные методы позволяют эффективно получать приближенные решения дифференциальных уравнений с точностью, достаточной для инженерных расчетов. [1] Систему разрешающих уравнений получим на основании вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta U = \delta W, \quad (14)$$

где: $\delta U = \int_0^1 \int_0^1 (N_x \delta \varepsilon_x + N_y \delta \varepsilon_y + N_{xy} \delta \gamma_{xy} + M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + 2M_{xy} \delta \kappa_{xy}) ab d\bar{x} d\bar{y}$ – работа внутрен-

них сил на возможных перемещениях;

$$\delta W = - \int_0^1 p_x \delta u b d\bar{y} \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} - \int_0^1 p_y \delta v a d\bar{x} \Big|_{\bar{y}=0}^{\bar{y}=1} - \alpha_0 \int_0^1 m_x \delta w_{,\bar{x}} d\bar{y} \Big|_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} - \alpha \int_0^1 m_y \delta w_{,\bar{y}} d\bar{x} \Big|_{\bar{y}=0}^{\bar{y}=1} \quad (15)$$

– работа внешних сил на возможных перемещениях. В (15) стоят минусы потому, что нагрузка сжимающая.

По закону Гука внутренние усилия связаны с деформациями и кривизнами следующим образом. Нормальные и сдвигающие силы:

$$N_x = B(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \quad N_y = B(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); \quad N_{xy} = 0,5(1 - \mu)B\gamma_{xy}. \quad (16)$$

Изгибающие и крутящие моменты определяются по формулам:

$$M_x = D(\kappa_x + \mu \kappa_y); \quad M_y = D(\kappa_y + \mu \kappa_x); \quad M_{xy} = D(1 - \mu)\kappa_{xy}. \quad (17)$$

В этих уравнениях: $B = Eh/(1 - \mu^2)$ – жесткость оболочки на растяжение-сжатие; E – модуль продольной упругости; h – толщина оболочки.

Вводим полусуммы и полуразности деформаций и кривизн:

$$\varepsilon_s = 0,5(\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad \varepsilon_r = 0,5(\varepsilon_x - \varepsilon_y); \quad \kappa_s = 0,5(\kappa_x + \kappa_y); \quad \kappa_r = 0,5(\kappa_x - \kappa_y).$$

Отсюда следует:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_s + \varepsilon_r; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_s - \varepsilon_r; \quad \kappa_x = \kappa_s + \kappa_r; \quad \kappa_y = \kappa_s - \kappa_r. \quad (18)$$

Подставив (18) в (16) и (17), и приняв

$$B(1 + \mu)\varepsilon_s = N_s; \quad B(1 - \mu)\varepsilon_r = N_r; \quad D(1 + \mu)\kappa_s = M_s; \quad D(1 - \mu)\kappa_r = M_r;$$

получим:

$$N_x = N_s + N_r; \quad N_y = N_s - N_r; \quad M_x = M_s + M_r; \quad M_y = M_s - M_r.$$

Взаимные удаления точек, расположенных на краях панели, определяются по формулам (10), (11). Для деформаций ε_s , ε_r получаем выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s = & \frac{1}{2}(1 - \mu) \left(\frac{a_{11}}{b} + \frac{a_{22}}{a} \right) + \frac{1}{2b}(1 - \mu)\bar{k}_x^2 \pi^2 \left\{ \frac{1}{2a} f_{\lambda 1}^2 \left[-X_{sc}(\bar{x}) - \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{2\pi^2} C_\lambda \cos 2\pi \bar{y} \right] + \right. \\ & \left. + \lambda_{x1} f_{\lambda 2} X_s(\bar{x}) \cos 2\pi \bar{y} + \frac{\alpha_0}{\pi^2} f_{\lambda 1} S_\lambda \sin \pi \bar{y} - \lambda_k^0 \lambda_{x2} f_{\lambda 3} X_s(\bar{x}) \sin \pi \bar{y} \right\}; \\ \varepsilon_r = & \frac{1}{2}(1 + \mu) \left(\frac{a_{11}}{b} - \frac{a_{22}}{a} \right) + \frac{1}{2b}(1 + \mu)\bar{k}_x^2 \pi^2 \left\{ \frac{1}{2a} f_{\lambda 1}^2 \left[X_{sc}(\bar{x}) - \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{2\pi^2} C_\lambda \cos 2\pi \bar{y} \right] + \right. \\ & \left. + \lambda_{x3} f_{\lambda 2} X_s(\bar{x}) \cos 2\pi \bar{y} + \frac{\alpha_0}{\pi^2} f_{\lambda 1} S_\lambda \sin \pi \bar{y} - \lambda_k^0 \lambda_{x4} f_{\lambda 3} X_s(\bar{x}) \sin \pi \bar{y} \right\}. \end{aligned}$$

Где функция:

$$X_{sc}(\bar{x}) = \alpha S_\lambda X_s(\bar{x}) - \frac{\alpha}{2} X_{c1}(\bar{x}) + \frac{\alpha}{4} X_{c2}(\bar{x}); \quad (19)$$

$$\lambda_{x1} = 4\alpha\pi^2 + \alpha_0\lambda_x^2; \quad \lambda_{x2} = \alpha\pi^2 + \alpha_0\lambda_x^2; \quad \lambda_{x3} = 4\alpha\pi^2 - \alpha_0\lambda_x^2; \quad \lambda_{x4} = \alpha\pi^2 - \alpha_0\lambda_x^2.$$

Для деформации сдвига $\varepsilon_{xy} = 0,5 \cdot \gamma_{xy}$ получаем:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 = -(1+\mu)\bar{k}_x^2\pi^3 \frac{2}{b} \left[2\lambda_x f_{\lambda2} X_C(\bar{x}) \sin 2\pi\bar{y} + \lambda_x \lambda_k^0 f_{\lambda3} X_C(\bar{x}) \cos \pi\bar{y} \right].$$

Выражения для кривизн используем в виде:

$$\mathbf{j}_x = -\frac{1}{a^2}(w_{,\bar{x}\bar{x}} + \bar{k}_x^2 w); \quad \mathbf{j}_y = -\frac{1}{b^2}(w_{,\bar{y}\bar{y}} + \bar{k}_y^2 w); \quad \mathbf{j}_{xy} = -\frac{1}{ab}(w_{,\bar{x}\bar{y}} + \bar{k}_x \bar{k}_y w).$$

Вводим обозначения:

$$\bar{k}_s^2 = \alpha(\pi^2 - \bar{k}_y^2) + \alpha_0 \bar{k}_x^2; \quad \bar{k}_r^2 = \alpha(\pi^2 - \bar{k}_x^2) - \alpha_0 \bar{k}_y^2. \quad (20)$$

Результаты

С учетом всего изложенного выражения для δU и δW подставляем в вариационное уравнение Лагранжа (14) и приравниваем выражения при вариациях одинаковых коэффициентов. В результате получаем интегральные условия минимума полной потенциальной энергии деформации панели

$$\int_0^1 \int_0^1 [(1-\mu)N_s + (1+\mu)N_r] d\bar{x}d\bar{y} = \mu p_y - p_x; \quad \int_0^1 \int_0^1 [(1-\mu)N_s - (1+\mu)N_r] d\bar{x}d\bar{y} = \mu p_x - p_y; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & f_{\lambda1} \int_0^1 \int_0^1 \left[-(1-\mu)N_s X_{SC}(\bar{x}) + (1+\mu)N_r X_{SC}(\bar{x}) - (1-\mu) \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{2\pi^2} C_\lambda N_s \cos 2\pi\bar{y} - \right. \\ & \left. - (1+\mu) \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{2\pi^2} C_\lambda N_r \cos 2\pi\bar{y} \right] d\bar{x}d\bar{y} + \frac{b}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\mu)N_s S_\lambda \sin \pi\bar{y} + (1+\mu)N_r S_\lambda \sin \pi\bar{y}] d\bar{x}d\bar{y} + \\ & + \frac{1}{\bar{k}_x \pi^2} \int_0^1 \int_0^1 \left[-\bar{k}_r^2 M_s S_\lambda + \bar{k}_s^2 M_r S_\lambda + (\alpha_0 \lambda_x^2 + \bar{k}_r^2) M_s X_S(\bar{x}) \right] \sin \pi\bar{y} + (\alpha_0 \lambda_x^2 - \bar{k}_s^2) M_r X_S(\bar{x}) \sin \pi\bar{y} - \\ & - 2\pi \lambda_x M_{xy} X_C(\bar{x}) \cos \pi\bar{y} \Big\} d\bar{x}d\bar{y} = -p_x b \left\{ \frac{1}{2b} f_{\lambda1} C_\lambda \left[\frac{3\mu\alpha}{\lambda_x} S_\lambda + \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{\pi^2} S_\lambda - \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{\pi^2} \right] + \frac{4}{\pi^3 \lambda_x} C_\lambda \right\} - \\ & - p_y a \left\{ \frac{1}{2b} f_{\lambda1} C_\lambda (C_\lambda - 3) + \frac{4}{\pi^3 \lambda_x} \left[\bar{k}_0 C_\lambda - \frac{\lambda_x}{2} (\bar{k}_0 + \mu\alpha_0) S_\lambda \right] \right\} + \frac{4\alpha_0}{\bar{k}_x \pi^3} \lambda_x C_\lambda m_x. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) будет служить для определения параметра $f_{\lambda1}$.

$$\begin{aligned} & f_{\lambda2} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\mu)\lambda_{x1} N_s X_S(\bar{x}) \cos 2\pi\bar{y} + (1+\mu)\lambda_{x3} N_r X_S(\bar{x}) \cos 2\pi\bar{y} - \\ & - 4(1+\mu)\pi \lambda_x N_{xy} X_C(\bar{x}) \sin 2\pi\bar{y}] d\bar{x}d\bar{y} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (23) будет служить для определения параметра $f_{\lambda2}$.

$$\begin{aligned} & f_{\lambda3} \int_0^1 \int_0^1 [(1-\mu)\lambda_{x2} N_s X_S(\bar{x}) \sin \pi\bar{y} + (1+\mu)\lambda_{x4} N_r X_S(\bar{x}) \sin \pi\bar{y} + \\ & + 2(1+\mu)\pi \lambda_x N_{xy} X_C(\bar{x}) \cos \pi\bar{y}] d\bar{x}d\bar{y} = -\frac{4}{\pi \lambda_x} C_\lambda (\lambda_{x3}^0 p_x + \lambda_{x4}^0 p_y). \end{aligned} \quad (24)$$

Из уравнения (24) будет определяться параметр $f_{\lambda3}$. В результате имеем пять уравнений, а неизвестных у нас семь: a_{11} , a_{22} , $f_{\lambda1}$, $f_{\lambda2}$, $f_{\lambda3}$, p_x , p_y . В качестве двух дополнительных уравнений принимаем взаимное удаление угловых точек Δu_0 и Δv_0 , расположенных на краях оболочки и определяемых по формулам (12), (13). Пусть $\Delta u_0 = -\Delta_0$, $\Delta v_0 = -\beta \Delta_0$, т.е. угловые точки сближаются. Тогда получим:

$$\alpha a_{11} - \mu a_{22} = -\Delta_0 - \bar{k}_x^2 \pi^2 C_\lambda \left[\frac{1}{4b} f_{\lambda 1}^2 \left(\frac{3\mu\alpha}{\lambda_x} S_\lambda - \frac{\alpha_0 \lambda_x^2}{\pi^2} \right) + 2\alpha \frac{\lambda_{x1}^0}{\lambda_x} f_{\lambda 2} \right]; \quad (25)$$

$$\alpha_0 a_{22} - \mu a_{11} = -\beta \Delta_0 + \bar{k}_x^2 \pi^2 \left[\frac{1}{4b} f_{\lambda 1}^2 C_\lambda (3 - C_\lambda) + \frac{2\mu\alpha_0}{\pi^3} f_{\lambda 1} S_\lambda + \frac{2\lambda_{x4}^0}{\pi} \lambda_k^0 S_\lambda f_{\lambda 3} \right]. \quad (26)$$

Из этих уравнений будем определять a_{11} и a_{22} . Параметр Δ_0 , характеризующий сближение угловых точек, будем принимать за параметр прослеживания процесса нагружения панели. Складывая и вычитая уравнения (21), получим

$$\int_0^1 \int_0^1 N_s d\bar{x} d\bar{y} = -\frac{1}{2}(p_x + p_y); \quad \int_0^1 \int_0^1 N_r d\bar{x} d\bar{y} = -\frac{1}{2}(p_x - p_y). \quad (27)$$

Эти уравнения будем использовать для определения p_x и p_y . Параметры \bar{k}_s^2 , \bar{k}_r^2 определяются по формулам (20); параметры λ_{x1}^0 , λ_{x2}^0 , λ_{x3}^0 , λ_{x4}^0 – по формулам (9); параметры λ_{x1} , λ_{x2} , λ_{x3} , λ_{x4} – по формулам (19).

Заключение

Система уравнений (22)-(27) является существенно нелинейной. Объясняется это не только тем, что неизвестные коэффициенты входят в них в виде различных степеней и произведений. Если оболочка работает за пределом упругости, то функциями координат ее точек становятся пластические модули и коэффициент Пуассона. Кроме того, процесс нагружения зависит от параметра λ , от которого существенно нелинейно зависят коэффициенты уравнений.

Полученная система уравнений решается по шагам с использованием в пределах каждого шага метода итераций для уточнения решения. При этом в начале каждого шага и каждой итерации коэффициенты системы уравнений берутся из предыдущего шага или предыдущей итерации, это позволяет при записи системы уравнений в приращениях считать эти коэффициенты постоянными.

Литература

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. 288 с.
2. Володин В.П., Надиров Э.Р. Определение аппроксимирующих функций в выражениях для перемещений при расчете пологих оболочек // Вестник Тверского государственного университета: научный журнал. Серия «Прикладная математика» – Тверь: ТвГУ, 2012. №17. Вып. 2 (25). с. 41 – 51.
3. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: ГИТТЛ, 1956. 421 с.
4. Иванов В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости. – М.: Изд-во РУДН, 2001. 176 с.
5. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964. 194 с.