Литература

1. Бодров А.С. Автореферат диссертации «Технология ремонтного окрашивания сельскохозяйственных машин порошковыми красками» на соискание учёной степени кандидата технических наук, Москва 2007.

Прямой метод и алгоритм построения сплайнов третьего порядка в задачах управления работой приводов движения

д.т.н. проф. Гданский Н. И., доц. к.т.н. Карпов А.В., асп. Бугаенко А.А.
Университет машиностроения, РГСУ
8(905)7658738, al-kp@mail.ru

Аннотация. При использовании предсказания в управлении вращательным движением возникает необходимость построения дважды гладкой траектории, проходящей через ранее измеренные ее узловые точки. В качестве кусочно-полиномиальной кривой, обеспечивающей требуемую гладкость, рассмотрены интерполяционные кубические сплайны, которые на промежутках между узлами представляют собой кубические параболы, непрерывно соединяющиеся в узлах с гладкостью степени 2. При наложении дополнительных краевых условий данные сплайны минимизируют ее суммарную кривизну.

Ключевые слова: *интерполяционные сплайны, задачи управления, алгоритмы прогнозирования, кинематические характеристики, сплайны Эрмита.*

Введение

Основным путем повышения эффективности оборудования является автоматизация основных и вспомогательных производственных операций. Выполнение последних, как правило, сопровождается недетерминированным изменением внешней нагрузки на приводах. В работе [1] на наборе эталонных кривых произведен сравнительный анализ эффективности методов интерполирования траектории перемещения в задаче управления приводами с прогнозированием внешней нагрузки. Результаты показали, что наилучшим методом интерполирования в задачах управления приводом движения является интерполирование сплайнами Фергюссона. Рациональным шагом является проведение дополнительного исследования на предмет возможности модификации метода с целью снижения вычислительных затрат и увеличения точности.

В цифровых системах управления вращательным движением при моделировании внешней нагрузки $M = M(t, \varphi(t))$, действующей на рабочий вал привода вращательного движения, в виде набора постоянных коэффициентов $\overline{M}^k$, имеющих смысл усредненных значений частных производных по времени t и углу поворота вала φ, мгновенную величину $M(t, \varphi(t))$ в общем случае можно представить в виде скалярного произведения $M(t,\varphi(t)) = (\overline{M}^k, \overline{\varphi}^k(t))$, в котором вектор $\overline{\varphi}^k(t)$ называемый *вектором кинематических характеристик*, соответствующим модели $\overline{M}^k$, зависит только от t и производных φ по t, имеющих порядок от первого до k – порядка модели $\overline{M}^k$.

При таком способе представления внешней нагрузки для расчета управляющего воздействия в данной системе используется работа A, которую должен совершать двигатель на заданном периоде импульсного управления T. Необходимая величина работы на отрезке изменения времени $[t_i, t_{i+1}]$ как функция времени будет рассчитываться по формуле:

$$A_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\overline{M}^k, \overline{\varphi}^k(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Как следует из общего вида формул, получаемых после раскрытия интеграла (1), в них входят только производные φ по t, порядков от 1 до k. В частности, в случае использования модели нагрузки второго порядка $\overline{M}^2$ максимальный порядок производных φ по t в формуле (1) равен 2. Поскольку сама зависимость φ (t) в (1) явно не входит, то это свойство решаемой задачи можно использовать для упрощения вспомогательной задачи интерполирования траектории перемещения вала по заданным ее узловым точкам.

Допустим, задан упорядоченный массив узлов $P_i = (t_i, \varphi_i)$ ($i = 0, ..., n$), лежащих на траектории перемещения. Для построения кусочно-полиномиальной кривой второй степени гладкости, проходящей через заданные узлы, наилучшим решением являются интерполяционные кубические сплайны [2, 3], которые на промежутках между узлами представляют собой кубические параболы, непрерывно соединяющиеся в точках $t_1, ..., t_{n-1}$ (называемых внутренними) с гладкостью степени 2. Также они обладают следующим важным свойством. Если наложить на сплайн в начальном и конечном узле краевые условия $\varphi''(t_0) = \varphi''(t_n) = 0$, то он будет минимизировать функционал

$$J(\varphi(t)) = \int_{t_0}^{t_n} \left|\varphi''(t)\right|^2 dt ,$$

который в случае перемещения равен минимуму работы, совершаемой инерционными нагрузками, создаваемыми перемещаемым звеном.

Рассмотрим глобальную переменную t. В математической форме полная совокупность геометрических условий относительно t, накладываемых на кубические параболы $\{S_i\ (t), i=1,2,\dots,n\}$, имеет вид:

а) $\varphi\ (t) = S_i\ (t)$ при $t_{i-1} \le t \le t_i$; $i = 1, 2, \dots, n$. – условие кусочности φ (t);

б) $S_i\ (t_{i-1}) = P_{i-1}$; $S_i\ (t_i) = P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ – условия прохождения сплайна $S_i\ (t)$ через заданные узлы ломаной P_{i-1} и P_i;

в) $S_{\bar{i}}{}'(t_i) = S_{\bar{i}+1}{}'(t_i)$, $i = 1, \dots, n$-1 – гладкость порядка 1 во внутренних узлах;

г) $S_{\bar{i}}{}''(t_i) = S_{\bar{i}+1}{}''(t_i)$, i=1, …, n-1 – гладкость порядка 2 во внутренних узлах;

д) $S_1''(t_0) = S_n''(t_n) = 0$ - краевые условия в начальном и конечном узлах. (2)

Общепринятым методом построения кубических интерполяционных сплайнов является использование локальных сплайнов Эрмита. Данные сплайны строят по двукратным узлам t_i, в которых помимо значений $S_i\ (t_i)$ заданы также величины первых производных $S_i'(t_i)$. Поскольку в исходной задаче значения первых производных $S_i'(t_i)$ не задаются, их рассматривают в качестве неизвестных величин задачи, для решения которой составляют линейную систему уравнений. Матрица ее трёхдиагональна, что позволяет решать систему при помощи специальной упрощенной модификации метода Гаусса – метода прогонки [1, 2]. Основными стадиями метода прогонки являются:

1) расчет коэффициентов матрицы,

2) прямая прогонка,

3) обратная прогонка.

Расчет трудоемкости реализации алгоритма прогонки (таблица 1) показывает, что при максимальном сокращении расчетных формул вычислительные затраты при построении n сплайнов относительно невелики и составляют (после суммирования пп.1 – 3 таблицы 1): сложений 9n-3, умножений 8n-3, делений 4n-2.

Существенной особенностью данного метода является то, что:

1) независимой переменной каждого сплайна S_i является нормированная на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$ локальная переменная $\tau_i = (t - t_{i-1})/h_i$, где $h_i = (t_i - t_{i-1})$,

2) результирующие сплайны S_i имеют вид полиномов Эрмита.

При каждом расчете значений сплайна S_i переход 1) от глобальной переменной t к локальной τ_i при однократном расчете длин отрезков требуется выполнение одного вычитания и одного деления.

Таблица 1

Расчет минимального числа расчетных операций при построении *n* сплайнов

Стадии	Сложения и вычитания	Умножения	Деления
1.Расчет коэффициентов матрицы	$5n$-2	$4n$-2	(n-1)
2. Прямая прогонка	$3n$-1	$3n$-1	$3n$-2
3.Обратная прогонка	n	n	1
4а. Переход к каноническому виду по τ_i	$5n$	$5n$	0
4б. Переход к каноническому виду по t	$19n$	$28n$	$2n$
ИТОГО при переходе к каноническому виду по t_i,	$14n$-3	$13n$-3	$4n$-2
ИТОГО при переходе к каноническому виду по x	$28n$-3	$36n$-3	$6n$-2

Однако затраты при расчете полинома Эрмита 2) по сравнению с использованием схемы Горнера для кубического полинома (3 сложения и 3 умножения) слишком высоки, и при большом числе расчетов значений сплайна S_i необходимо перейти от полинома Эрмита к каноническом виду по локальной переменной τ_i. Данный переход при максимальном сокращении расчетных формул при построении n сплайнов требует относительно невысоких вычислительных затрат (п.4а таблицы 1): сложений $5n$, умножений $5n$.

Таким образом, для построения n сплайнов в форме канонических полиномов, зависящих от локальных переменных τ_i, необходимо затратить (сумма пп.1 – 4а таблицы 1): сложений $14n$-3, умножений $13n$-3, делений $4n$-2.

Существенной особенностью интерполирования при решении рассмотренной выше задачи управления является то, что в формулы интегралов работ (1) входят только старшие коэффициенты $\{C_1, C_2, C_3\}$ канонических кубических полиномов, зависящих от глобальной переменной t. Свободный коэффициент C_0 не входит. Переход от сплайнов в форме полиномов Эрмита, зависящих от локальных переменных τ_i, к каноническим полиномам по глобальной переменной t, требует значительных вычислительных затрат (п.4б таблицы 1). В сумме для построения n сплайнов в форме канонических полиномов, зависящих от глобальной переменной t, необходимо затратить (сумма пп.1 – 3 и 4б таблицы 1): сложений $28n$-3, умножений $36n$-3, делений $6n$-2.

Постановка задачи

Для существенного снижения вычислительных затрат предложен прямой метод построения кубических интерполирующих сплайнов, в котором сплайны рассматриваются сразу в канонической форме по глобальной переменной t без использования полиномов Эрмита, а также не рассчитываются свободные коэффициенты сплайнов C_0. Такое интерполирование в отличие от традиционного назовем *частичным*.

Введем для упрощения расчетов новую относительную глобальную переменную $\tau = t - t_0$.

Постановка задачи. На плоскости $\tau O\varphi$ задан набор из (n +1) точки вида $\overline{P_i} = (\varphi_i, \tau_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Рассмотрим на отрезках $[\overline{P}_{i-1}; \overline{P_i}]$ кубические сплайны:

$$S_i(\tau) = C_0^i + C_1^i \tau + C_2^i \tau^2/2 + C_3^i \tau^3/3,\ i = 1, \ldots, n. \quad (3)$$

Необходимо найти коэффициенты $\{C_1^i, C_2^i, C_3^i\}$ всех сплайнов $\{S_i(\tau)\}$ ($i = 1, \ldots, n$) из условия гладкости степени 2 во внутренних узлах при заданных краевых условиях:

$$S_1''(0) = 0;\ S_n''(\tau_n) = 0. \quad (4)$$

Поскольку свободные коэффициенты C_0^i сплайнов $\{S_i(\tau)\}$ не требуется определять, рассматриваем вместо $S_i(\tau)$ их первые производные, которые являются квадратными параболами вида:

$$D^i(\tau) = (S_i(\tau))_\tau' = C_1^{\,i} + C_2^{\,i}\,\tau + C_3^{\,i}\,\tau^2. \qquad (5)$$

Таким образом, частичное решение задачи интерполирования (без определения свободных коэффициентов) сплайнов $S_i(\tau)$, зависящих от глобальной переменной τ, сведено к полному расчету коэффициентов $\{C_1^{\,i}, C_2^{\,i}, C_3^{\,i}, i = 1, \ldots, n\}$ соответствующих им квадратных парабол $\{D^i(\tau)\}$ (5).

Прямой метод частичного решения задачи интерполирования

Для решения задачи полного расчета коэффициентов $\{C_1^{\,i}, C_2^{\,i}, C_3^{\,i}, i = 1, \ldots, n\}$ квадратных парабол $\{D^i(\tau)\}$, зависящих от глобальной переменной τ, предложено использовать упрощённый (по сравнению с прогонкой, основанной на использовании полиномов Эрмита) метод, основная идея которого заключается в непосредственном расчете искомых коэффициентов без использования промежуточных представлений. Поэтому метод назван *прямым*.

Для определённости параболу $D^1(\tau)$ будем называть **начальной**, параболы $D^2(\tau)$ – $D^{n-1}(\tau)$ – **внутренними**, $D^n(\tau)$ – **конечной**. Как и в методе прогонки, в предлагаемом методе для расчета искомых коэффициентов используем прямой и обратный ход.

Прямой ход

Основная идея прямого хода заключается в том, что старший коэффициент текущей параболы $D^i(\tau)$ ($i = 1, \ldots, n$-1) линейно выражается через старший квадратный коэффициент $C_3^{\,i+1}$ следующей за ней параболы $D^{i+1}(\tau)$, а свободный $C_1^{\,i}$ и линейный $C_2^{\,i}$ коэффициенты параболы $D^i(\tau)$ выражаются $C_3^{\,i}$:

$$C_3^{\,i} = A_3^{\,i}\,C_3^{\,i+1} + B_3^{\,i};$$

$$C_1^{\,i} = A_1^{\,i}\,C_3^{\,i} + B_1^{\,i};$$

$$C_2^{\,i} = A_2^{\,i}\,C_3^{\,i} + B_2^{\,i}. \qquad (6)$$

Отдельно рассмотрим начальную параболу $D^1(\tau)$, внутренние параболы $D^2(\tau)$ - $D^{n-1}(\tau)$ и конечную $D^n(\tau)$.

1. $D^1(\tau)$. Из условия $S_1''(0) = 0$ следует: $(D^1(0))' = C_2^{\,1}+C_3^{\,1}\cdot 0 = 0$. Отсюда получаем: $C_2^{\,1} = 0$. При этом для коэффициента

$$C_2^{\,1}: A_2^{\,1} = B_2^{\,1} = 0. \qquad (7)$$

Из условий прохождения сплайна $S^1(\tau)$ через точки $\overline{P}_0 = (\varphi_0, \tau_0 = 0)$ и $\overline{P}_1 = (\varphi_1, \tau_1)$ следует:

$S_1(\tau_0 = 0) = C_0^{\,1} = \varphi_0$; $S_1(\tau_1) = C_0^{\,1} + C_1^{\,1}\,\tau_1 + C_2^{\,1}\,\tau_1^{\,2}/2 + C_3^{\,1}\,\tau_1^{\,3}/3 = \varphi_1$.

Вычтем из второго соотношения первое с учетом $C_2^{\,1} = 0$:

$C_1^{\,1}\tau_1 + C_3^{\,1}\,\tau_1^{\,3}/3 = \Delta\varphi_1$, где $\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_0$.

Из этого равенства выразим линейную зависимость $C_1^{\,1}$ ($C_3^{\,1}$):

$$C_1^{\,1} = \Delta\varphi_1/\tau_1 - C_3^{\,1}\,\tau_1^{\,2}/3 = A_1^{\,1}\,C_3^{\,1} + B_1^{\,1};\ A_1^{\,1} = -\tau_1^{\,2}/3;\ B_1^{\,1} = \Delta\varphi_1/\tau_1. \qquad (8)$$

Расчетные формулы для выражения младших коэффициентов $C_1^{\,1}$ и $C_2^{\,1}$ начальной параболы через старший $C_3^{\,1}$ следующие:

$$A_1^{\,1} = -\tau_1^{\,2}/3 \qquad B_1^{\,1} = \Delta\varphi_1/\tau_1$$

$$A_2^{\,1} = 0 \qquad B_2^{\,1} = 0. \qquad (9)$$

Выражение (6) для старшего коэффициента $C_3^{\,1}$ у начальной параболы определяется при анализе параболы $D^2(\tau)$.

2. Рассмотрим внутренние параболы $D^i(\tau)$, $i = 2, \ldots, n$ -1.

К началу их анализа для предыдущей параболы $D^{i-1}(\tau)$ известны линейные зависимости:

$$C_1^{\,i-1} = A_1^{\,i-1}\,C_3^{\,i-1} + B_1^{\,i-1};$$

$$C_2^{\,i-1} = A_2^{\,i-1}\,C_3^{\,i-1} + B_2^{\,i-1}. \qquad (10)$$

Подставим формулы парабол $D^{i-1}(\tau)$ и $D^i(\tau)$ в условия гладкости второй степени в узле $\tau = \tau_{i-1}$ для сплайнов $S_{i-1}(\tau)$ и $S_i(\tau)$ ($S_{i-1}'(\tau_{i-1}) = S_i'(\tau_{i-1})$; $S_{i-1}''(\tau_{i-1}) = S_i''(\tau_{i-1})$):

$$C_1^{i-1} + C_2^{i-1}\tau_{i-1} + C_3^{i-1}\tau_{i-1}^2 = C_1^i + C_2^i\tau_{i-1} + C_3^i\tau_{i-1}^2;$$

$$C_2^{i-1} + 2C_3^{i-1}\tau_{i-1} = C_2^i + 2C_3^i\tau_{i-1}.$$

Умножая обе части второго соотношения на $(-\tau_{i-1})$, складываем его с первым. При этом получим систему уравнений более простого вида:

$$C_1^{i-1} - C_3^{i-1}\tau_{i-1}^2 = C_1^i - C_3^i\tau_{i-1}^2;$$

$$C_2^{i-1} + 2C_3^{i-1}\tau_{i-1} = C_2^i + 2C_3^i\tau_{i-1}.$$

Подставим в уравнения полученной системы зависимости (10):

$$(A_1^{i-1} - \tau_{i-1}^2)C_3^{i-1} + B_1^{i-1} = C_1^i - C_3^i\tau_{i-1}^2;$$

$$(A_2^{i-1} + 2\tau_{i-1})C_3^{i-1} + B_2^{i-1} = C_2^i + 2C_3^i\tau_{i-1}. \quad (11)$$

Из условий $S_i(\tau_{i-1}) = \varphi_{i-1}$; $S_i(\tau_i) = \varphi_i$ получим уравнение:

$$C_1^i + C_2^i(\tau_{i-1} + \tau_i)/2 + C_3^i(\tau_{i-1}^2 + \tau_{i-1}\tau_i + \tau_i^2)/3 = \Delta\varphi_i / \Delta\tau_i, \quad (12)$$

где $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i - \varphi_{i-1}$, $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$.

Складывая (12) с первым уравнением (11) и вторым, умноженным на $(\tau_{i-1} + \tau_i)/2$, получим соотношение, содержащее только коэффициенты C_3^{i-1} и C_3^i:

$$(A_1^{i-1} - \tau_{i-1}^2)C_3^{i-1} + B_1^{i-1} + (A_2^{i-1} + 2\tau_{i-1})C_3^{i-1}(\tau_{i-1} + \tau_i)/2 + B_2^{i-1}(\tau_{i-1} + \tau_i)/2 + C_3^i(\tau_{i-1}^2 + \tau_{i-1}\tau_i + \tau_i^2)/3 = \Delta\varphi_i / \Delta\tau_i - C_3^i\tau_{i-1}^2 + 2C_3^i\tau_{i-1}(\tau_{i-1} + \tau_i)/2.$$

Преобразуя его, выразим C_3^{i-1} через C_3^i:

$$C_3^{i-1}[A_1^{i-1} + A_2^{i-1}(\tau_{i-1} + \tau_i)/2 + \tau_{i-1}\tau_i] = C_3^i[-(\tau_{i-1}^2 + \tau_{i-1}\tau_i + \tau_i^2)/3 + \tau_{i-1}\tau_i] + \Delta\varphi_i / \Delta\tau_{i-1} - B_1^{i-1} - B_2^{i-1}(\tau_{i-1} + \tau_i)/2;$$

$$C_3^{i-1} = A_3^{i-1}C_3^i + B_3^{i-1};$$ где

$\tau_{(i)\text{кв}} = \tau_i^2$; $A_3^{i-1} = -\Delta\tau_{(i)\text{кв}} / (3K)$; $B_3^{i-1} = (\Delta\varphi_i / \Delta\tau_i - B_1^{i-1} - B_2^{i-1}\tau_{i\text{ср}})/K$;

$\tau_{i\text{ср}} = (\tau_{i-1} + \tau_i)/2$; $K = A_1^{i-1} + A_2^{i-1}\tau_{i\text{ср}} + \tau_{i-1}\tau_i$. (13)

После подстановки (13) в уравнения системы (11) выражаем из них искомые зависимости $C_1^i(C_3^i)$ и $C_2^i(C_3^i)$:

$$C_1^i = (A_1^{i-1} - \tau_{i-1}^2)C_3^{i-1} + B_1^{i-1} + C_3^i\tau_{i-1}^2 = (A_1^{i-1} - \tau_{i-1}^2)(A_3^{i-1}C_3^{i-1} + B_3^{i-1}) + B_1^{i-1} + C_3^i\tau_{i-1}^2 = A_1^iC_3^i + B_1^i,$$

где $F^i = A_1^{i-1} - \tau_{(i-1)\text{кв}}$; $A_1^i = A_3^{i-1}F^i + \tau_{(i-1)\text{кв}}$; $B_1^i = B_3^{i-1}F^i + B_1^{i-1}$;

$$C_2^i = (A_2^{i-1} + 2\tau_{i-1})C_3^{i-1} + B_2^{i-1} - 2C_3^i\tau_{i-1} = (A_2^{i-1} + 2\tau_{i-1})(A_3^{i-1}C_3^{i-1} + B_3^{i-1}) + B_2^{i-1} - 2C_3^i\tau_{i-1} = A_2^iC_3^i + B_2^i;$$ где

$\tau_{(i-1)\text{у}2} = 2\tau_{i-1}$; $G^i = A_2^{i-1} + \tau_{(i-1)\text{у}2}$; $A_2^i = A_3^{i-1}G^i - \tau_{(i-1)\text{у}2}$; $B_2^i = B_3^{i-1}G^i + B_2^{i-1}$. (14)

Расчетные формулы для выражения младших коэффициентов C_1^i и C_2^i и старшего коэффициента C_3^{i-1} параболы D^{i-1} через старший коэффициент C_3^i параболы D^i следующие:

$$\tau_{(i-1)\text{кв}} = \tau_{(i-1)}^2;\ \tau_{(i)\text{кв}} = \tau_i^2;\ \tau_{i\text{ср}} = (\tau_{i-1} + \tau_i)/2;\ \Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i - \varphi_{i-1},\ \Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1};$$

$$K = A_1^{i-1} + A_2^{i-1}\tau_{i\text{ср}} + \tau_{i-1}\tau_i;\ F^i = A_1^{i-1} - \tau_{(i-1)\text{кв}};\ \tau_{(i-1)\text{у}2} = 2\tau_{i-1};\ G^i = A_2^{i-1} + \tau_{(i-1)\text{у}2};$$

$$A_3^{i-1} = -\Delta\tau_{(i)\text{кв}} / (3K);\ B_3^{i-1} = (\Delta\varphi_i / \Delta\tau_i - B_1^{i-1} - B_2^{i-1}\tau_{i\text{ср}})/K; \quad (15)$$

$$A_1^i = A_3^{i-1}F^i + \tau_{(i-1)\text{кв}};\ B_1^i = B_3^{i-1}F^i + B_1^{i-1};$$

$$A_2^i = A_3^{i-1}G^i - \tau_{(i-1)\text{у}2};\ B_2^i = B_3^{i-1}G^i + B_2^{i-1}.$$

3. Конечная парабола $D^n(\tau)$.

К началу ее анализа для предыдущей параболы $D^{n-1}(\tau)$ известны зависимости:

$$C_1^{n-1} = A_1^{n-1}C_3^{n-1} + B_1^{n-1}; \quad (16)$$

$$C_2^{n-1} = A_2^{n-1} C_3^{n-1} + B_2^{n-1}.$$

Из условий гладкости второй степени в предпоследнем узле $\tau = \tau_{n-1}$ для сплайнов $S_{n-1}(\tau)$ и $S_n(\tau)$ ($S_{n-1}'(\tau_{n-1}) = S_n'(\tau_{n-1})$; $S_{n-1}''(\tau_{n-1}) = S_n''(\tau_{n-1})$) получим:

$$C_1^{n-1} + C_2^{n-1} \tau_{n-1} + C_3^{n-1} \tau_{n-1}^2 = C_1^n + C_2^n \tau_{n-1} + C_3^n \tau_{n-1}^2;$$

$$C_2^{n-1} + 2C_3^{n-1} \tau_{n-1} = C_2^n + 2C_3^n \tau_{n-1}.$$

Аналогично умножаем обе части второго соотношения на ($-\tau_{n-1}$), складываем его с первым и получаем систему более простого вида:

$$C_1^{n-1} - C_3^{n-1} \tau_{n-1}^2 = C_1^n - C_3^n \tau_{n-1}^2;$$

$$C_2^{n-1} + 2C_3^{n-1} \tau_{n-1} = C_2^n + 2C_3^n \tau_{n-1}.$$

Подставим в уравнения системы зависимости (16):

$$(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^2)C_3^{n-1} + B_1^{n-1} = C_1^n - C_3^n \tau_{n-1}^2;$$
$$(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})C_3^{n-1} + B_2^{n-1} = C_2^n + 2C_3^n \tau_{n-1}. \qquad (17)$$

Аналогично из условий $S_n(\tau_{n-1}) = \varphi_{n-1}$; $S_n(\tau_n) = \varphi_n$ получим уравнение:

$$C_1^n + C_2^n(\tau_{n-1} + \tau_n)/ 2 + C_3^n(\tau_{n-1}^2 + \tau_{n-1} \tau_n + \tau_n^2)/ 3 = \Delta\varphi_n / \Delta\tau_n, \qquad (18)$$

где $\Delta\varphi_n = \Delta\varphi_n - \varphi_{n-1}$, $\Delta\tau_n = \tau_n - \tau_{n-1}$.

Дополнительно для данной параболы из второго краевого условия (4) получим еще одно уравнение:

$$C_2^n + 2C_3^n \tau_n = 0. \qquad (19)$$

Четыре уравнения системы (17) – (19) содержат 4 неизвестных коэффициента: C_3^{n-1}; C_1^n; C_2^n; C_3^n. Найдем их величины.

Выразим из (17) C_2^n (C_3^n):

$$C_2^n = A_3^n C_3^n + B_3^n,$$

где

$$A_3^n = 2\tau_n; \qquad B_3^n = 0. \qquad (20)$$

Полученное выражение подставим во второе выражение (17) и найдем зависимость C_3^{n-1} (C_3^n):

$$(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})C_3^{n-1} + B_2^{n-1} = - 2C_3^n \tau_n + 2C_3^n \tau_{n-1};$$

$$C_3^{n-1} = A_3^{n-1} C_3^n + B_3^{n-1},$$

где

$$A_3^{n-1} = - 2\Delta\tau_n / (A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1});\ B_3^{n-1} = - B_2^{n-1} / (A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}). \qquad (21)$$

Подставляя данную зависимость в первое уравнение (17), найдем из него выражение для C_1^n (C_3^n):

$$(A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^2)[-(2\Delta\tau_n C_3^n + B_2^{n-1})/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1})] + B_1^{n-1} = C_1^n - C_3^n \tau_{n-1}^2;$$

$C_1^n = A_1^n C_3^n + B_1^n$, где

$$A_1^n = [-2\Delta\tau_n (A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^2)/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}) + \tau_{n-1}^2];$$
$$B_1^n = B_2^{n-1} (A_1^{n-1} - \tau_{n-1}^2)/(A_2^{n-1} + 2\tau_{n-1}) + B_1^{n-1}. \qquad (22)$$

Подставляя зависимости (20) и (22) в уравнение (18), найдем из него выражение для коэффициента C_3^n:

$$[-2\Delta\tau_n\,(A_1^{\,n-1}-\tau_{\,n-1}^{\,2})\,/\,(A_2^{\,n-1}+2\tau_{\,n-1})+\tau_{n-1}^{\,2}]C_3^{\,n}+B_2^{\,n-1}(A_1^{\,n-1}-\tau_{n-1}^{\,2})/(A_2^{\,n-1}+$$

$$+2\tau_{n-1})+B_1^{\,n-1}-2C_3^{\,n}\,\tau_n(\tau_{n-1}+\tau_n)/\,2+C_3^{\,n}(\tau_{n-1}^{\,2}+\tau_{n-1}\,\tau_n+\tau_n^{\,2})/\,3=\Delta\varphi_n\,/\,\Delta\tau_n;$$

$$C_3^{\,n}=[\Delta\varphi_n/\Delta\tau_n-B_2^{\,n-1}(A_1^{\,n-1}-\tau_{n-1}^{\,2})/(A_2^{\,n-1}+2\tau_{n-1})-B_1^{\,n-1}]/[-2\Delta\tau_{\,n}(A_1^{\,n-1}-\tau_{\,n-1}^{\,2})/(A_2^{\,n-1}+ \qquad (23)$$

$$+2\tau_{n-1})-2\Delta\tau_n\,(2\tau_{n-1}+\tau_n)/3].$$

Таким образом, для конечной параболы $D^n(\tau)$ величина старшего коэффициента C_3^n определяется не зависимостью вида (6), а формулой (23).

Для сокращения числа расчетных операций предложен следующий алгоритм расчета коэффициентов конечной параболы $\{C_1^n;\ C_2^n;\ C_3^{\,n}\}$и значения старшего коэффициента C_3^{n-1} параболы $D^{n-1}(\tau)$:

$$C_3^{\,n}=[\Delta\varphi_n/\Delta\tau_n-B_2^{\,n-1}\,E^{\,n}-B_1^{\,n-1}]/[F^{\,n}(\,E^{\,n}+(G^{\,n}+\tau_n)/3];$$

где $\tau_{(n-1)\text{кв}}=\tau_{n-1}^{\,2}$; $G^{\,n}=2\tau_{n-1}$; $H^{\,n}=1/(A_2^{\,n-1}+G^{\,n})$; $E^{\,n}=(A_1^{\,n-1}-\tau_{\,(n-1)\text{кв}})H^{\,n}$; $F^{\,n}=-2\Delta\tau_{\,n}$;

$$C_1^{\,n}=[F^{\,n}E^{\,n}+\tau_{\,(n-1)\text{кв}}]\,C_3^{\,n}+B_2^{\,n-1}E^{\,n}+B_1^{\,n-1}; \qquad (24)$$

$$C_2^{\,n}=(-\,2\tau_n)\,A_3^{\,n}\,C_3^{\,n};$$

$$C_3^{\,n-1}=F^{\,n}\,H^{\,n}\,C_3^{\,n}-B_2^{\,n-1}H^{\,n}.$$

Обратный ход.

Заключается в последовательном расчете коэффициентов оставшихся квадратных парабол $D^i(\tau)$, $i=n-1,\ldots,1$. Выполняется в последовательности, обратной прямому ходу.

Для каждой параболы $D^i(\tau)$ ($i=n-1,\ldots,1$) по уже рассчитанному значению старшего коэффициента C_3^{i+1} параболы $D^{i+1}(\tau)$ по формулам (6) вначале рассчитывается старший коэффициент $C_3^{\,i}$, а по нему – младшие $C_1^{\,i}$ и $C_2^{\,i}$.

Расчетный алгоритм и оценка его трудоемкости

Начальные данные: координаты точек $\overline{P}_i=(\varphi_i,\tau_i)$, ($i=0,\ \ldots,\ n$), $\tau_0=0$.

Необходимо определить: массивы коэффициенты $\{C_1^{\,i},\ C_2^{\,i},\ C_3^{\,i}\}$ набора сплайнов $\{S_i\,(\tau)\}$ ($i=1,\ \ldots,\ n$), обеспечивающих гладкость второй степени во внутренних узлах при краевых условиях: $S_0'(0)=0$; $S_{n-1}''(\tau_n)=0$.

Начальные действия. Вводим вспомогательные массивы$\{A_3^{\,i}\}$, $\{B_3^{\,i}\}$, $\{A_1 i\}$, $\{B_1 i\}$, $\{A_2 i\}$, $\{B_2 i\}$, в которых номера элементов изменяются от 1 до n -1. Поскольку в расчетах коэффициентов соседних парабол повторяются вычисления квадратов значений времени τ_i, то перед началом вычислений предварительно рассчитываем их:

$$\tau_{(i)\text{кв}}=\tau_i^{\,2};\ 1,\ \ldots,\ n\,. \qquad (25)$$

Шаг 1. Прямой ход. Расчет вспомогательных коэффициентов $A_1^{\,1}$, $B_1^{\,1}$, $A_2^{\,1}$, $B_2^{\,1}$ для начальной параболы $D^1(\tau)$. Из (9) следует:

$$A_1^{\,1}=-\tau_{(1)\text{кв}}\,/\,3;\quad B_1^{\,1}=(\varphi_1-\varphi_0)/\tau_1;\quad A_2^{\,1}=B_2^{\,1}=0. \qquad (26)$$

Шаг 2. Прямой ход. Цикл по внутренним параболам ($i=1,\ \ldots,\ n$ -1). Расчет вспомогательных коэффициентов $A_1^{\,i}$, $B_1^{\,i}$, $A_2^{\,i}$, $B_2^{\,i}$ для внутренней параболы $D^i(\tau)$, а также коэффициентов $A_3^{\,i-1}$, $B_3^{\,i-1}$ для параболы $D^{i-1}(\tau)$ выполняем по формулам (15):

$$\tau_{i\text{ср}}=(\tau_{i-1}+\tau_i)\,/2\,;\ \ \Delta\varphi_i=\Delta\varphi_i-\varphi_{i-1},\ \Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1};\ \ K=A_1^{\,i-1}+A_2^{\,i-1}\tau_{i\text{ср}}+\tau_{i-1}\tau_i;$$

$$F^i=A_1^{\,i-1}-\tau_{(i-1)\text{кв}};\ \tau_{(i-1)\text{у}2}=2\tau_{i-1};\ G^i=A_2^{\,i-1}+\tau_{(i-1)\text{у}2};$$

$$A_3^{\,i-1}=-\,\Delta\tau_{(i)\text{кв}}\,/\,(3K);\ B_3^{\,i-1}=(\Delta\varphi_i\,/\,\Delta\tau_i-B_1^{\,i-1}-B_2^{\,i-1}\,\tau_{i\text{ср}})\,/K; \qquad (27)$$

$$A_1^{\,i}=A_3^{\,i-1}\,F^i+\tau_{(i-1)\text{кв}};\ B_1^{\,i}=B_3^{\,i-1}\,F^i+B_1^{\,i-1};$$

$$A_2^{\,i}=A_3^{\,i-1}\,G^i-\tau_{(i-1)\text{у}2};\ B_2^{\,i}=B_3^{\,i-1}\,G^i+B_2^{\,i-1}.$$

Шаг 3. Прямой ход. Расчет коэффициентов $C_3^{\,n}$, $C_1^{\,n}$, $C_2^{\,n}$, $C_3^{\,n-1}$ выполняем по формулам