Установившееся течение вязкой жидкости при входе в трубу

к.т.н. Выскребцов В.Г.
Университет машиностроения
8(495) 223-05-23, доб. 1318, tm@mami.ru

Аннотация. Обращается внимание на то, что система уравнений Навье-Стокса, которая является одной из базовых в теории сплошных сред и служит математической моделью движения в гидромеханике, не описывает некоторые практически важные движения. Они, в частности, не описывают возможное кручение линий тока, т.е. не описывают кручение сплошных сред в малых окрестностях точек. Поэтому принципиально важным является выявление степени соответствия теоретических и экспериментально наблюдаемых течений жидкостей. Течение при входе в трубу может быть одновременно и наблюдаемым и аналитически описанным движением.

Ключевые слова: *вязкая несжимаемая жидкость, установившееся движение, точное решение уравнений Навье-Стокса, безвихревое течение, степенные ряды, диссипация механической энергии, наблюдаемость*

Памяти профессора Григолюка Э.И., чл.-корр. РАН,
зав. кафедрой МГТУ «МАМИ» с 1977 по 2005 г.г.

Хотя уравнения движения вязких сплошных сред приобрели свой современный вид довольно давно в работах Стокса (1845 г.), но их общее решение, как системы дифференциальных уравнений в частных производных, до сих пор не известно. Стокс сформулировал закон линейной зависимости напряжений от скоростей деформаций, представляющих собой обобщение закона Ньютона для жидкостей. Жидкости, для которых справедлив закон Ньютона (пропорциональность касательных напряжений по граням жидкой частицы скоростям деформаций этих граней), называют ньютоновскими. К ним относят минеральные и растительные масла, воду и водные растворы, воздух и множество других.

В связи с невозможностью решить уравнения Стокса в общем виде выделяют частные случаи, когда система уравнений Стокса упрощается. Это немногие случаи. Если, например, профили или эпюры скоростей течения одинаковы при различных расстояниях от начала координат, то замена физических переменных на относительные, безразмерные приводит к уменьшению числа независимых переменных в системе уравнений в частных производных Стокса (или даже к одной переменной), и такие пространственные движения принято называть автомодельными [1, с. 432]. Примерами этих течений могут быть радиальное течение в плоском конфузоре с прямолинейными стенками, безвихревое течение по логарифмическим спиралям и некоторые другие [1, 2].

Особенно простой вид уравнения Стокса или, точнее, уравнения Навье-Стокса приобретают в случае несжимаемых сред (жидкостей) и при условии, когда так называемый вихрь скорости равен нулю. Упрощениями служат условия течения только в одной плоскости (например, течение по логарифмической спирали) или осесимметричность и автомодельность течения. Для этого последнего типа течения, как показано было Н.А. Слёзкиным (1934 г.) [1], уравнения Стокса, записанные в сферической системе координат, сводятся к одному обыкновенному, с одной независимой переменной, дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати.

В более ранних работах [3, 4] было показано, что, несмотря на бесконечное множество формально математически точных решений уравнения Слёзкина, физически возможным аналитическим решением для осесимметричных автомодельных течений вязкой жидкости оказывается только одно. И оно описывает движение жидкости по параболическим, эллиптическим и гиперболическим траекториям как течение между стенками центральной трубки с пористыми стенками и окружающей эту трубку жидкостью. Только течения, соответствующие такой трактовке, можно наблюдать в опытах.

Далее рассматривается часто наблюдающееся осесимметричное, но не автомодельное течение жидкостей, возникающее при течении жидкостей из ёмкостей большого объёма в круглую трубу. Иногда такое движение называют входом в трубу. Правда, обычно это течение переходит в явно вихревое, что каждый может наблюдать, например, при стекании воды из ванны.

В неподвижной жидкости вихрь её скорости, очевидно, равен нулю. Он не может самопроизвольно появиться, если не учитывать наличие в жидкости очень слабой остаточной завихрённости. Поэтому, формулируя математическую модель осесимметричного вытекания жидкости из ёмкости в круглую трубу, обоснованно можно допустить, что величина вихря такого течения во всей ёмкости равна нулю. При этом понятие вихря предполагает, что любые, в том числе бесконечно малые объёмы жидкости не имеют вращений, а совершают лишь поступательное движение, сопровождаемое непрерывной деформацией [1, с. 59]. Можно также принять, что процесс истечения из ёмкости происходит с постоянной скоростью, т.е. течение установившееся. Кроме того, из постановки задачи следует, что вытекание жидкости из ёмкости неопределённо большого объёма в круглую трубу симметрично относительно оси трубы.

Таким образом, в качестве основных допущений математической модели течения вязкой жидкости при входе в круглую трубу из ёмкости большого объёма можно принять, следующие: вязкая несжимаемая жидкость, течение осесимметричное, безвихревое, установившееся. Функции, описывающие проекции скорости на оси цилиндрической системы координат, являются ограниченными, однозначными, без скачков и разрывов, и их можно представить в виде степенных рядов.

Но тогда при описанной постановке задачи возникает некоторое противоречие, т.к. если течение безвихревое, то согласно уравнениям Стокса вязкость не должна оказывать влияния на течение. При нулевой вязкости уравнения Стокса упрощаются и переходят в уравнения Эйлера [1, 2], которые при известной скорости течения сравнительно легко интегрируются. Но до настоящего времени интегрирование этих уравнений с определением скорости течения в каждой точке проведено лишь для некоторых частных случаев движения (точечный источник-сток, течение по логарифмической спирали и др.).

Повседневный опыт показывает, что вязкость влияет на скорость истечения жидкостей из сосудов. Поэтому рассмотрение подобных «протеворечивых» течений может иметь принципиальный интерес. Течение жидкости из ёмкости при входе в трубу интересно ещё и потому, что при входе в трубу траектории движения сходятся и течение сохраняет (теоретически) ламинарный режим до неопределённо больших скоростей. Не ясно, как определять для такого течения число Рейнольдса. Таким образом, теоретическое исследование траекторий течения жидкости при входе в трубу и сравнение их с наблюдаемыми обосновано.

В дальнейшем ось цилиндрической системы координат 0Z считаем направленной по оси трубы, а вторую ось 0r – направленной от центра входного отверстия трубы, как показано на рисунке 1. Тогда координаты (r; Z) любой точки течения будут меняться в пределах от нуля до бесконечности. Предполагаемый характер линий тока вблизи от входа в круглую трубу радиусом r_0 представлен слева, а на удалении от входа в трубу – справа (рисунок 1).

На удалении от входа в трубу диаметр трубы уже можно считать пренебрежимо малым, точечным, а течение – сферическим. В сферической системе координат траектории движения на удалении от входа должны быть прямыми линиями, а скорость течения уже не зависит от угла между траекторией и осью трубы и определяется только расстоянием от входа в трубу. Такое течение имеет безвихревой характер, как это следует из анализа уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат [1].

В описанной модели течения скорость течения U(r;Z) = U(U;V), где U(r;z) и V(r;z) –

соответственно проекции вектора скорости на координатные оси 0r и 0z, должна удовлетворять следующим уравнениям (в жидкости нет источников и стоков):

$$Div\,\mathbf{U} = 0, \qquad rot\,\mathbf{U} = 0. \tag{1}$$

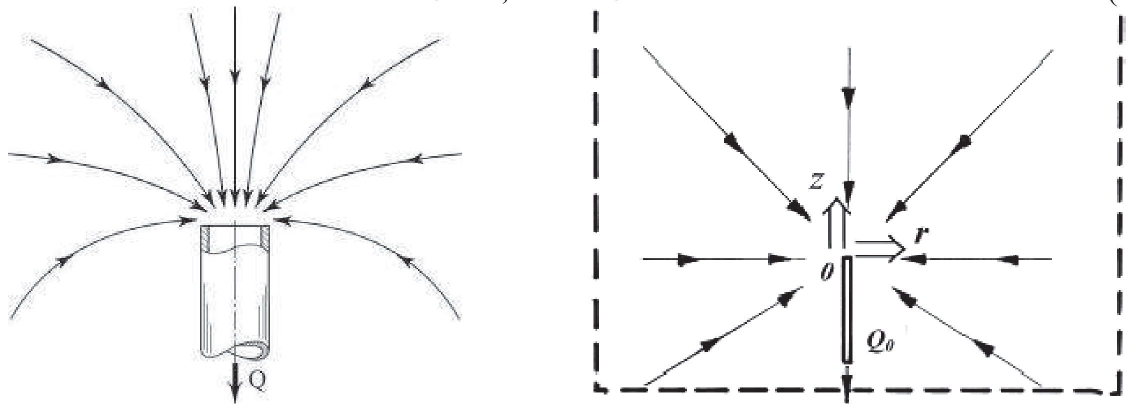

Рисунок 1. Характер линий тока при осевой симметрии и ламинарном втекании жидкости в круглую трубку из неограниченного пространства: слева – вблизи трубки, справа – на большом удалении от всасывающего отверстия трубки; центр трубки служит началом «*0*» цилиндрической системы координат (*r; z*). Q_0 – расход жидкости; пунктиром условно обозначена граница ёмкости с вытекающей из неё жидкостью

В развёрнутом виде с учётом использования цилиндрической системы координат уравнения (1) выражаются следующими формулами [1, с. 419]:

$$(r\,U)^I_r + (r\,V)^I_z = 0; \quad (U)^I_z = (V)^I_r \tag{2}$$

Существенно, что эти уравнения линейны относительно неизвестных проекций скорости течения, и это позволяет искать возможное решение методом разделения переменных [5], а именно в виде: $U = \varphi(r)\,\psi(z); \quad V = F(r)\,f(z).$ (3)

Подставляя (3) в выражения (2) получим следующие соотношения (здесь и далее $f_z^I(z); \psi^I_z(z); F_r^I(r); \varphi^I_r(r)$ – это производные от соответствующих функций):

$$\psi(z)\times[r\,\varphi(r)]^I_r + r\,F(r)\times f_z^I(z) = 0; \quad \varphi(r)\,\psi^I_z(z) = F_r^I(r)\,f(z).$$

После разделения переменных получим:

$$\psi^I_z(z)/f(z) = F_r^I(r)/\varphi(r) = m; \quad [r\,\varphi(r)]^I_r/[r\,F(r)] = -f_z^I(z)/\psi(z) = n. \tag{4}$$

Здесь m и n = const, т.к. использовано обычное [5] для метода разделения переменных рассуждение: поскольку правые и левые части уравнений (4) зависят от независимых переменных r и Z, то они могут быть только постоянными, соответственно, m и n = const. Равенства (4) позволяют перейти к системе так называемых обыкновенных, зависящих только от одной независимой переменной уравнений, где m и n = const играют роль параметров. Итак, метод разделения позволяет перейти от (4) к следующей системе:

$$\psi^I_z(z)/f(z) = m; \qquad -f_z^I(z)/\psi(z) = n. \tag{5}$$

$$[r\,\varphi(r)]^I_r/[rF(r)] = n; \qquad F_r^I(r)/\varphi(r) = m. \tag{6}$$

Первая система (5) эквивалентна следующим уравнениям:

$$\psi^{II}_{zz}(z) + m\,n\,\psi(z) = 0; \quad f^{II}_{zz}(z) + m\,n\,f(z) = 0. \tag{7}$$

Это так называемые обыкновенные линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянным коэффициентом mn. Решения этих уравнений находятся известным методом с использованием так называемого характеристического уравнения [5]. Граничные условия для рассматриваемой задачи очевидны, они требуют, во-первых, конечного значения скорости при всех значениях координат (r; Z) и, во-вторых, равенства нулю скорости течения на неопределённо большом расстоянии от начала координат:

$$U = \varphi(r)\times\psi(z) \to 0 \ \text{ при } r; z \to \infty; \quad V = F(r)\times f(z) \to 0 \ \text{ при } r; z \to \infty; \tag{9 а}$$

Соответственно, отсюда $\varphi(r) \to 0$ и $F(r) \to 0$ при $r \to \infty$, $\psi(z) \to 0$ и $f(z) \to 0$ при $z \to$

∞. Кроме того, в силу осевой симметрии проекция скорости U на ось 0r при r = 0 должна быть равна нулю: U(0)= 0, т.е. φ(0) = 0. Согласно физическому смыслу задачи на оси трубы вертикальная составляющая скорости должна быть максимальна, откуда: V Ir(0) = 0, следовательно F_r I(0) = 0. (9 б)

Выполнение равенств (9) согласуется с физическим смыслом задачи. К сказанному следует добавить, что в вышеприведенных формулах (4) – (9) под независимыми переменными r и z удобно, чтобы не вводить масштабные размерные коэффициенты, иметь в виду безразмерные, относительные величины. Поскольку единственным геометрическим размером в данной задаче является радиус трубы r0, то здесь и в дальнейшем удобно принять за независимые переменные: x = r/r0; y = z/r0. Однако с учётом того, что рассматривается физическая задача, обозначения независимых переменных как (r; z) будет оставлено, хотя далее эти переменные всюду будут считаться относительными, безразмерными. Т.е. значения длин r и z в рассматриваемой задаче определяется через число единиц r0. При указанном условии коэффициенты m и n оказываются тоже относительными величинами.

С учётом сказанного точное аналитическое решение уравнений (7) имеет вид:

$$\psi(z) = C_{01}\exp(-\sqrt{-mn}\ z); \qquad f(z) = C_{02}\exp(-\sqrt{-mn}\ z). \qquad (10)$$

Здесь C_{01} и C_{02} = const – произвольные постоянные интегрирования, символ exp( ) означает показательную функцию (экспоненту). Подставляя (10) в (5) получим, что C_{01} и C_{02} связаны друг с другом соотношением:

$$m\times C_{02} = (-\sqrt{-nm})\ C_{01} \qquad (10\ а)$$

В соответствии с (10) значение произведения (- mn) должно быть положительно, т.е. должно быть: $m\times n < 0$, другими словами, параметры m и n должны быть разных знаков.

Для функций F(r) и φ(r) из системы (6) получим тоже обыкновенные линейные однородные дифференциальные уравнения, но уже с переменными коэффициентами.

$$r\,F^{II}_{rr}(r) + F^{I}_{r}(r) - (mn\,r)\,F(r) = 0; \quad r^2\varphi(r)^{II}_{rr} + r\,\varphi(r)^{I}_{r} - \varphi(r)(1 + mn\,r^2) = 0. \qquad (11)$$

Если во втором уравнении сделать замену ω(r) = rφ(r), то оно может быть приведено к виду, совпадающему с видом первого уравнения (11), а именно:

$$r\,\omega_{rr}^{II}(r) - \omega_r^{I}(r) - (mn\,r)\,\omega(r) = 0. \qquad (12)$$

Решения подобных уравнений (типа уравнения Бесселя) в конечном аналитическом виде неизвестно [5]. Поэтому их решения приходится находить в виде степенных рядов. Будем искать значение функций F(r) и φ(r) в виде:

$$\varphi(r) = \Sigma\, a_j r^j \ (j = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

$$F(r) = \Sigma\, b_i r^i \ (i = 0, 1,2,3 \ldots)$$

Здесь aj и bi – постоянные коэффициенты. Другими словами, представим, например, F(r) в виде:

$$F(r) = b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 r^4 + b_5 r^5 + b_6 r^6 + b_7 r^7 + b_8 r^8 + b_9 r^9 + b_{10} r^{10} + \ldots$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (11) и приравнивая сумму коэффициентов при одинаковых степенях r нулю, получим систему алгебраических линейных уравнений, из которой следует, что все коэффициенты с нечетными номерами i = 1, 3, 5, 7, 9… должны быть равны нулю, т.е.:

$$b_1 = b_3 = b_5 = b_7 = b_9 = \ldots = 0. \qquad (13\ а)$$

Все коэффициенты с чётными номерами i = 2,4,6,8,… выражаются через один коэффициент b0 и соответственно равны:

$$b_2 = b_0\,(mn) / [2\times 2];\ b_4 = b_0\,(mn)^2 / [2\times 4]^2;\ b_6 = b_0\,(mn)^3 / [2\times 4\times 6]^3;$$

$$b_8 = b_0\,(mn)^4 / [2\times 4\times 6\times 8]^2 \text{ и т.д.} \qquad (13\ б)$$

Таким образом, значение для *F(r)* можно записать в виде следующего ряда:

$$F(r) = b_0\times\{1+(mn)/2^2\times r^2+(mn)^2/(2\times 4)^2\times r^4+(mn)^3/(2\times 4\times 6)^2 r^6+(mn)^4/[2\times 4\times 6\times 8]^2 r^8+\ldots\} \qquad (14)$$

Закономерность изменения чётных коэффициентов bi в соответствии с (13) и (14) позволяет указать общую формулу значения коэффициента для любого i. Для нечётных: i =1,3,5 … bi =0. Для чётных: i = 2, 4, 6, 8… bi = b0 ×(mn) i/2/ [2i/2×(i/2)!]2

В этом выражении (i/2)! означает произведение натуральных целых чисел от 1 до i/2, т.е. (i/2)! = 1×2× 3×…×i/2; это так называемый факториал от i/2. Если через B(r) обозначить для краткости выражение для степенного ряда в фигурных скобках, то значение для F(r) можно записать в виде:

$$F(r) = \Sigma\, b_i\, r^i = b_0 \times B(r) =$$
$$= b_0 \times \{1 + \frac{mn}{2^2 1!} r^2 + \frac{(mn)^2}{2^4 (2!)^2} r^4 + \frac{(mn)^3}{2^6 (3!)^2} r^6 + \frac{(mn)^4}{2^8 (4!)^2} r^8 + \frac{(mn)^5}{2^{10} (5!)^2} r^{10} + \frac{(mn)^6}{2^{12} (6!)^2} r^{12} + \ldots\} \quad (15)$$

Из выражения (15) видно, что после дифференцирования функция *F(r)* удовлетворяет условию (9б), а именно: $F_r{}^1(0) = 0$.

Определение функции F(r) позволяет найти и вторую функцию: φ(r). Это определение можно сделать разными способами. Во-первых, согласно второй формуле (6) φ(r) можно выразить путём дифференцирования ряда (15), а именно вынося общий множитель b_0 (r mn /2), получим, что:

$$\varphi\,(r) = \Sigma\, a_j\, r^j = F_r^1(r)/\,m = [b_0\, r\, n\,/2]\;\; A(r) =$$
$$= b_0 (r\,n\,/2) \times \{1 + \frac{mn}{2^2\,(2!)} r^2 + \frac{(mn)^2}{2^5\,(3!)} r^4 + \frac{(mn)^3}{2^7 3(4!)} r^6 + \frac{(mn)^4}{2^9 12\,(5!)} r^8 + \frac{(mn)^5}{2^{11} 60\,(6!)} r^{10} + \ldots\} \quad (16)$$

Здесь через A(r) обозначено выражение для степенного ряда в фигурных скобках. Степенной ряд (15) для F(r) согласно признаку Даламбера [5] сходится на всей числовой оси, поэтому и ряд (16) для φ(r) также сходится на всей числовой оси, что следует и из вида ряда (16).

Функцию φ(r) можно определить не только из второго уравнения (6), но и из первого из уравнений (6), а именно из соотношения: [r φ(r)]Ir = n [r F(r]). Подставляя сюда соответствующие значения из (15) и (16) получим, что должно выполняться равенство:

$$[r^2\;\; A(r)]^1{}_r = 2r\, B(r). \quad (17)$$

Подстановкой выражений (15) и (16) убеждаемся в тождественном выполнении этого равенства. Таким образом, значения обеих проекций скорости течения определены с точностью до произвольных постоянных интегрирования и параметров m и n:

$$U = \varphi\,(r)\;\; \psi\,(z) = C_{01} \times exp(-\, \sqrt{-\,mn}\, /\, z\, /) \times (b_0\, r\, n/2)\; A(r).$$
$$V = F(r)\;\; f(z) = C_{02} \times exp(-\, \sqrt{-\,mn}\, /\, z\, /) \times b_0\, B(r). \quad (18)$$

Как уже отмечалось, величины постоянных интегрирования C_{01} и C_{02} связаны между собой: m C_{02} = (-$\sqrt{-\,nm}$) C_{01}. Поэтому фактически неопределённым остаётся параметр mn и одна из произвольных постоянных, например C_{01}.

Определим теперь расход жидкости, втекающей в трубу радиуса r_0. Это можно сделать двумя способами. Во-первых, можно вычислить значение расхода Q_{01} через вертикальную проекцию скорости V на входе в трубу при z = 0 с учётом того, что на входе в трубу 0 < r < r_0; z = 0. С учётом того, что рассматривается именно вытекание из ёмкости через трубу (рисунок 2), необходимо считать, что U < 0 и V < 0 согласно рисунку 1. Тогда в соответствии с (18) получим:

$$Q_{01} = -\,2\;\pi \times \int_0^{r_0} r\; V(r;\,0)\;\; dr = -\,2\;\pi\;\; C_{02}\, b_0 \int_0^{r_0} r\, B(r)\; dr\,.$$

Подставляя сюда значение 2 *r B(r),* выраженное согласно (17) через $[r^2 \times A(r)]^1{}_r$), придём к выражению:

$$Q_{01} = -\pi\, C_{02}\, b_0 \times \left| r^2 A(r) \right|_0^{r} = -\pi\, C_{02}\, b_0\, r_0^{\,2} \times A(r_0),$$

где:

$$A(r_0) = \left\{1 + \frac{mn}{2^2\,(2!)} r_0^{\,2} + \frac{(mn)^2}{2^5\,(3!)} r_0^{\,4} + \frac{(mn)^3}{2^7 3(4!)} r_0^{\,6} + \frac{(mn)^4}{2^9 12\,(5!)} r_0^{\,8} + \frac{(mn)^5}{2^{11} 60\,(6!)} r_0^{\,10} + \dots\right\}. \qquad (19)$$

Рисунок 2. Определение расхода Q_{01} через вертикальную проекцию скорости V(r; 0) на входе в трубу (слева) и расхода Q_{02} как объёма жидкости, протекающей с горизонтальной проекцией скорости $U(r_0; z)$ в трубу радиуса r_0 и неопределённой высоты (справа)

Но, во-вторых, значение расхода можно вычислить, используя только горизонтальную компоненту скорости $U(r_0; z)$ (рисунок 2), представив, что жидкость из ёмкости поступает в трубу радиуса r_0 только за счёт протекания $U(r_0; z)$ Тогда после соответствующих преобразований получим:

$$Q_{02} = -2\,\pi r_0 \int_0^{\infty} U(r_0\,; z)\, dz = -2\,\pi r_0\, (b_0 r_0 n/2)\, C_{01} A(r_0) / (-1/\sqrt{-nm}) \times (-1) =$$

$$= -\pi r_0^2\, b_0\, n\, C_{01} \times A(r_0) / (\sqrt{-nm}). \qquad (20)$$

Здесь $A(r_0)$ определяется по формуле (19). Очевидно, что должно быть равенство расходов, вычисленных разными способами, т.е. должно быть $Q_{01} = Q_{02} = Q_0$, и поэтому из сравнения (19 и (20) получим следующее равенство:

$$-\pi r_0^2\, C_{02}\, b_0 \times A(r_0) = -\pi r_0^2 b_0 n\, C_{01}\, A(r_0) / \sqrt{-mn}. \qquad (21)$$

Отсюда находим с учётом связи C_{01} и C_{02} согласно (10а), что:

$$m\,n = -1. \qquad (22)$$

Соответственно: $C_{01} = -m\, C_{02}$ (22 а)

Это соотношение, как видно из (16) или (19), существенно упрощает выражения для степенных рядов. Учитывая, что за единицу измерения длины в рассматриваемой задаче принято значение r0, и, как указывалось ранее, в аналитических выражениях следует считать, что независимые переменные рассматриваются как относительные величины, как доли r0, то можно считать, что: $r_0 = 1$. Тогда получим, что значение числового знакопеременного ряда (19) с точностью, например, до третьего знака (точность тщательно проводимых опытов) можно вычислить как:

$$A(r_0) = 1 - \frac{1}{2^3\,(1!)} + \frac{1}{2^5\,(3!)} - \frac{1}{2^7 3\,(4!)} + \frac{1}{2^9 12\,(5!)} - \frac{1}{2^{11} 60\,(6!)} + \dots$$

$$= 1 - 0{,}125 + 0{,}005208 - 0{,}0001085 + \dots \approx 0{,}880. \qquad (23)$$

Обозначая площадь сечения трубки через $S = \pi r_{20}$, выражение для расхода в соответствии с (19) и (23) определяется как: $Q_0 = C_{02} \times b_0 \times 0{,}880\, S$.

Произведение постоянных C_{02} и b_0 определяет максимальную величину скорости V_{max} при втекании, которая согласно (18) и (15) равна:

$V_{max} = V(0;0) = C_{02}\, b_0\, B(0) = C_{02}\; b_0.$

Таким образом, для данного течения: $Q_0 = 0{,}880\;\; S\;\; V_{max}.$ (24)

Числовую величину этого соотношения можно проверить опытным путём. Кроме того из (22) и (24) следует, что выражения для скоростей (18) с учётом (22) можно упростить до следующего вида:

$$U = \varphi(r)\times\psi(z) = V_{max}\times exp(- / z /)\times r\, A(r)/2.$$

$$V = F(r)\times f(z) = V_{max}\times exp(- / z /)\times B(r).$$

В этом выражении функции $A(r)$ *и* $B(r)$ означают, как и ранее, ряды в фигурных скобках (15) и (16), которые с учётом (22) принимают вид (оставляем пять значащих цифр):

$$B(r) = 1 - 0{,}25\, r^{2} + 0{,}015625\, r^{4} - 4{,}3403\times 10^{-4}\, r^{6} + 6{,}7817\; 10^{-6}\, r^{8} - 6{,}7817\; 10^{-8}\, r^{10} + \ldots$$

$$A(r) = 1 - 0{,}125 r^{2} + 5{,}2083\times 10^{-3} r^{4} - 1{,}08507\; 10^{-4} r^{6} + 1{,}3563\; 10^{-6} r^{8} - 1{,}1303\; 10^{-8}\, r^{10} + \ldots \quad (25)$$

Следует отметить, что вязкость жидкости в вышеприведённых формулах для определения скорости течения не используется. Поэтому она не должна влиять на рассматриваемое течение и его характеристики. Но, с другой стороны, влияние вязкости на течение должно иметь место, т.к. выражение для рассеиваемой при течении вязкой жидкости, диссипируемой в единице объёма и в единицу времени механической энергии, должно быть пропорционально вязкости даже при условии того, что течение безвихревое. Т.е. при условии, что rot U = 0 [1, с. 485]. Противоречие здесь очевидно, и подобные противоречия называют в гидромеханике парадоксами.

Полученные выводы могут быть и должны быть проверены в опытах с течением описанного типа и с жидкостями разных вязкостей. Кроме того, из (25) и с учётом (23) следует, что на кромке трубки с координатой (1;0) получим: U(1;0) = 0,44 V_{max} и V(1;0) = $V_{max} \neq 0$. А с физической точки зрения в указанной точке проекции скорости должны быть нулевые. Но это единственная точка, в которой имеет место скачок от конечной скорости движения жидкости до нулевой скорости точки твёрдого тела (на кромке трубы).

Другой характеристикой исследуемого течения, соответствие теоретических и экспериментальных особенностей которого также можно проверить наблюдением, является характер линий тока. Для определения линий тока течения вычислим тангенс угла α наклона касательных к линиям тока (рисунок 3) с учётом соотношения между постоянными C_{01} и C_{02} согласно (22а).

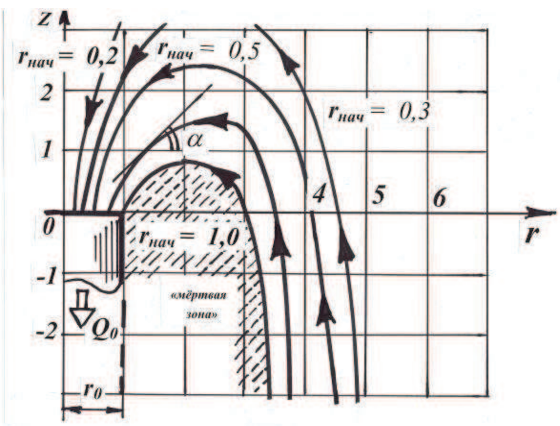

Рисунок 3. Вид теоретических траекторий течения жидкости при её течении из ёмкости в круглую трубу диаметром $2r_0$ при начальной точке траектории со значениями вертикальной координаты z = 0 и радиальной координаты: $r_{нач}/r_0 = 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}8$ и *1,0*. «Застойная» или «мёртвая» зона, где теоретически жидкость неподвижна, заштрихована

В соответствии с рисунком 3 и формулами (25) получим для угла наклона траекторий:

$$tg\,\alpha = dz/\,dr = V/\,U \;=\; 2\,B(r)\,/\,\{r \times A(r)\}. \qquad (26)$$

Теперь необходимо провести деление двух степенных рядов B(r) и A(r). Это можно сделать разными способами: делением «в столбик», как делят обычные многочлены, но принимая обратный порядок степеней по возрастанию от нулевой степени. Но можно выполнить деление степенных рядов методом неопределённых коэффициентов по формуле Коши [6]. В самом общем виде решение задачи деления степенных рядов приведено в книге В.И. Смирнова [7], где указана формула для коэффициентов степенного ряда степени n в виде частного двух определителей n – го порядка. После деления рядов тем или иным способом и проверки результата с помощью перемножения полученного ряда и ряда A(r) получим новый ряд в виде:

$$B(r)/A(r) = 1 - 0{,}125r^{2} - 0{,}5212\times 10^{-2}\,r^{4} - 0{,}32553\times 10^{-3}\,r^{6} - 0{,}218\times 10^{-4}\,r^{8}\ \ldots \qquad (27)$$

Интегрируя (27) получим выражение для линий тока в виде:

$$Z(r) = 2\{\,\ln(r/r_{нач}) - 0{,}0625\,(r^{2} - r^{2}_{нач}) - 1{,}303\;\;10^{-3}(r^{4} - r^{4}_{нач}) - 0{,}1519\;\;10^{-3}(r^{6} - r^{6}_{нач}) + \ldots\} \qquad (28)$$

При интегрировании этого выражения за начало отсчёта траектории, т.е. линии тока, принято значение радиальной абсциссы начальной точки траектории, т.е. точка с координатами ($r_{нач.}$; 0) на рисунке 3, на котором приведены несколько теоретических траекторий движения для значений $r_{нач}$ / r_0, в том числе для $r_{нач}$ /r_0 = 0,2; 0,3; 0,5; 0,9 и 1,0. Значения rнач играют роль параметра для семейства траекторий (с физической точки зрения это конечная точка при движении из ёмкости в трубу). Можно отметить, что согласно рисунку 3 в области между стенкой трубки и линией тока с $r_{нач}$ = 1,0 имеется «мёртвая» или «застойная зона», в которой теоретически движение жидкости совершенно отсутствует. А на расстояниях, превышающих примерно $10r_0$ вследствие быстрого падения скоростей согласно (25) по мере удаления от начала координат скорости движения жидкости становятся пренебрежимо малы по сравнению с максимальной V_{max} .

На этом аналитическое исследование поставленной задачи – исследование осесимметричного втекания вязкой сплошной среды в круглую трубу – можно закончить. Но данную задачу можно усложнять, например выбирая не круглую в сечении трубу, а другой осесимметричной формы: эллиптическую, прямоугольную и т.д. Важно установить, насколько теоретические характеристики, в частности траектории движения жидких частиц, соответствуют действительным, наблюдаемым траекториям, насколько влияет вязкость жидкости на её истечение, насколько оправданы другие теоретические положения вышеприведённого анализа. Насколько существенно то, что у маловязких жидкостей (воды, бензина, воздуха и др.) существует, хотя и малое, так называемое трение покоя. Как разрешаются указанные выше теоретические противоречия? На все эти и подобные им вопросы могут ответить только опыты, описание которых автор в литературе по соответствующей теме не обнаружил. Как иногда бывает, новые результаты порождают и новые вопросы.

Пока можно утверждать следующее. Оказалось возможным найти новое точное решение уравнений Навье-Стокса, причём поскольку найденное точное решение не предполагает неопределённо больших значений скоростей или градиентов скоростей в неограниченных областях течения, то течение должно быть наблюдаемо. Математический аппарат, применённый для анализа течения, оказался лежащим в пределах инженерных курсов математики, читавшихся в МГТУ «МАМИ».

Следует отметить, что самым активным сторонником внедрения и поддержки на должном уровне этих курсов был заведующий кафедрой «Прикладной и вычислительной математики» МАМИ, чл.-корр. РАН, профессор Э.И. Григолюк. Он внимательно следил за тем, чтобы преподаватели кафедры, как штатные, так и совместители, читали лекции и вели практические занятия на всех факультетах института с максимальной ответственностью. Он уделял большое внимание подбору кадров, приглашая в качестве внештатных преподавателей кафедры ведущих специалистов как отраслевых КБ, так и академических институтов.

В его время одни и те же курсы математики читались на всех факультетах и специальностях. В представлении Э.И. Григолюка именно такой объём математический знаний, зафиксированный в учебных программах, учебных пособиях и т.д., обеспечивал будущему инженеру достаточную подготовку на многие годы вперёд. По-видимому, этот подход был правильным, хотя объём предлагаемых студентам знаний был довольно большим и вызывал у большинства студентов трудности усвоения.

Но в настоящее время, в том числе и в связи со снижением уровня школьной подготовки по естественно-научным дисциплинам и переходом на систему бакалавриата, объём курсов математики в МАМИ заметно снизился. По мнению автора, это нельзя приветствовать, т.к. естественные науки, служащие базисом для инженерных дисциплин, неизбежно требуют знания математики, в первую очередь теории дифференциальных уравнений, несмотря на довольно популярное мнение, что вследствие тотального распространения компьютеров и программных продуктов к ним, глубоких знаний высшей (в первую очередь дифференцирования, интегрирования и теории дифференциальных уравнений) математики не требуется. Встречаются даже утверждения, что в связи с массовым распространением карманной вычислительной техники необязательно даже знание арифметических дробей. Так ли это?

И вопрос можно поставить даже более широко: возможно ли открытие и наблюдение новых явлений, обусловленных действием новых, ещё не описанных явлений и законов природы в наше время? Вопрос для многих довольно спорный, несмотря на известное утверждение классика: «электрон так же неисчерпаем, как и атом».

В пятидесятые и шестидесятые годы, на заре развития вычислительной техники и начала применения компьютеров (первый в мире компьютер был создан в США в 1946 году, второй электронной вычислительной машиной - так тогда назывались компьютеры - был компьютер, созданный в СССР в 1949 году), высказывались мнения, что в будущем, по мере расширения применения компьютеров, поскольку основные законы природы уже открыты, компьютер будет представлять собой как бы настольную лабораторию. Эксперименты примут характер вычислений, станут «численными экспериментами».

Вот как описывает ситуацию в этой области академик РАН (и ряда иностранных академий) И.Р. Шафаревич: «… Л.А. Арцимович. Он был академик-секретарь отделения физико-математических наук. Тогда это было громадное отделение, обнимавшее очень много разных наук, геологию, астрономию. И вот как-то он делал отчёт о деятельности нашего отделения за год. Я к нему подошёл и сказал: вы не заметили, что вы в качестве двух основных достижений нашего отделения назвали создание большого ускорителя и запуск спутника. Ведь это же технические достижения, наука должна исследовать законы природы. По-видимому, для него вопрос был очень продуманный, больной. Он немедленно взорвался: да вы, Игорь Ростиславович, не заметили, что эпоха открытия законов природы кончилась. Их не так много, наверное, они уже в основном все известны. А сейчас перед человечеством открывается, может быть, более интересная, захватывающая технология, создание искусственной природы, комбинирование этих известных законов для использования их, для создания каких-то новых реальностей…

Он как-то мне сказал или при мне, что Ньютону лафа была: он вошёл в лес грибной, там кругом белые, подосиновики, не собранные никем до него. И вот он начал их в корзинку собирать. А сейчас, говорит, вынюхивают каждую сыроежку, уже весь лес обобран, и физикам очень трудно что-то такое найти новое…» [8].

По мнению автора, помимо полезности знания математики в объёме инженерного образования, следует также помнить высказывание М.В. Ломоносова: «Математику уже потому учить должно, что она ум в порядок приводит». За время, истекшее с момента появления этого высказывания, оно никем не подвергалось сомнению. Думается, что по этому поводу классик мог бы сказать: «Учение Ломоносова всесильно, потому что оно верно».

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Издательство «Наука», М, 1973.
2. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. Общий курс. Издательство «Наука». М, 1964.
3. Выскребцов В.Г. Новые точные решения уравнений Навье-Стокса для осесимметрич-ных автомодельных течений жидкости. Журнал «Математические методы и физико-математические поля», Львов, Изд-во Национальной АН Украины, Том 41, №3, 1998.
4. Выскребцов В.Г. Значение точных решений уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса. Известия МГТУ «МАМИ», № 1 (13). Москва, 2011.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов. Том 2, М, Издательство «Наука», М, 1976.
6. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. Киев, «Наукова думка», 1974.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том III, ч.2. Гостехиздат, М – Л, 1950.
8. Шафаревич И.Р. Записки русского экстремиста. М, Алгоритм, 2012.