

## Математическое моделирование процессов термовязкопластического деформирования материалов

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С., к.ф.-м.н. доц. Даншин В.В., Костин А.В.  
 Университет машиностроения  
 8(495)2230523\*1318, tm@mami.ru

*Аннотация.* На основе уравнений теории неупругости, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении, получен прикладной вариант теории термовязкопластических процессов и кинетические уравнения накопления повреждений для процессов сложного неизотермического нагружения. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций, замыкающих вариант теории. Приводятся результаты верификации варианта теории при сложном нагружении по двузвенным ломаными траекториями деформаций с разными скоростями деформации.

*Ключевые слова:* термовязкопластичность, накопление повреждений, сложное неизотермическое нагружение, базовый эксперимент, идентификация, верификация.

### Введение

Разработка определяющих уравнений описания деформирования материалов в настоящее время идет двумя основными направлениями: разработка вариантов теорий на основе общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1, 2] и разработка вариантов теорий течения при комбинированном упрочнении на основе концепции микронапряжений В.В. Новожилова [3]. В вариантах теорий первого направления нет разделения деформации на упругую и неупругую, а в теориях второго направления такое разделение есть. В работах [4–6] для пластичности на основе уравнений второго направления получены аппроксимации функционалов пластичности теории упругопластических процессов, в которой нет разделения деформации на упругую и пластическую. Главной особенностью полученного в [4–6] варианта теории является введение упругого и пластического состояний, но без разделения деформации на упругую и пластическую.

Математическое моделирование термовязкопластических процессов и нелинейных процессов накопления повреждений при произвольных режимах длительного и (или) циклического нагружения возможно только на основе эволюционных уравнений деформирования и накопления повреждений, т.к. напряженно-деформированное состояние и повреждение являются функционалами процесса нагружения. Вариантами таких уравнений являются эволюционные уравнения, построенные на основе современных моделей термовязкопластичности [7–9]. Эти современные модели относятся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении, а в качестве энергии, отвечающей за процесс накопления повреждений, в них принимается энергия, равная работе микронапряжений на поле неупругих деформаций.

### Вариант теории термовязкопластических процессов

В векторном представлении А.А. Ильюшина [1, 2] уравнения теории неупругости [7] будут иметь вид:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}^e + \bar{\mathcal{E}}^p, \quad \bar{\mathcal{E}}^e = \bar{S} / 2G, \quad (1)$$

$$d\bar{\mathcal{E}}^p = \frac{1}{C} (\bar{S} - \bar{A}) ds^p, \quad (2)$$

$$dC = q_{\mathcal{E}} ds^p + q_T dT + q_R dt, \quad (3)$$

$$d\bar{A} = g_B d\bar{\mathcal{E}}^p + (g_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}}^p + g_A \bar{A}) ds^p + (g_{\mathcal{E}}^T \bar{\mathcal{E}}^p + g_A^T \bar{A}) dT - (g_{\mathcal{E}}^R \bar{\mathcal{E}}^p + g_A^R \bar{A}) dt, \quad (4)$$

где:  $\bar{\mathcal{E}}$ ,  $\bar{\mathcal{E}}^e$  и  $\bar{\mathcal{E}}^p$  — векторы деформаций, упругих и неупругих деформаций;  $\bar{S}$  и  $\bar{A}$  векто-

ры напряжений и добавочных напряжений (микронапряжений [3]);  $s^p$  — длина дуги траектории неупругой деформации;  $C$  — размер (радиус) поверхности нагружения, характеризующий изотропное упрочнение,  $q_{\vartheta}$ ,  $q_T$ ,  $q_R$  — параметры изотропного упрочнения, неизотермического перехода и отжига;  $g_B, g_{\vartheta}, g_A, g_{\vartheta}^T, g_A^T, g_{\vartheta}^R, g_A^R$  — параметры анизотропного упрочнения, неизотермического перехода и рекристаллизации;  $t$  — время. Следует отметить, что здесь нет разделения деформации на пластическую и деформацию ползучести, а есть единая необратимая неупругая деформация.

При развитых неупругих деформациях в условиях неупругого деформирования можно принять, что:

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}^p, \quad s = s^p. \quad (5)$$

Тогда уравнения (1) — (4) примут вид:

$$d\bar{\vartheta} = \frac{1}{C}(\bar{S} - \bar{A})ds, \quad (6)$$

$$dC = q_{\vartheta}ds + q_T dT + q_R dt, \quad (7)$$

$$d\bar{A} = g_B d\bar{\vartheta} + (g_{\vartheta} \bar{\vartheta} + g_A \bar{A})ds + (g_{\vartheta}^T \bar{\vartheta} + g_A^T \bar{A})dT - (g_{\vartheta}^R \bar{\vartheta} + g_A^R \bar{A})dt. \quad (8)$$

Разрешая (6) относительно  $\bar{A}$  и дифференцируя по длине дуги  $s$ , совместно с уравнениями (7), (8) можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{S}}{ds} = & \left[ q_{\vartheta} + g_B - g_A C + \frac{(q_T - g_A^T C)\dot{T}}{\dot{s}} - \frac{(q_R - g_A^R C)}{\dot{s}} \right] \frac{d\bar{\vartheta}}{ds} + \\ & + \left( g_A + \frac{g_A^T \dot{T}}{\dot{s}} - \frac{g_A^R}{\dot{s}} \right) \bar{S} + \left( g_{\vartheta} + \frac{g_{\vartheta}^T \dot{T}}{\dot{s}} - \frac{g_{\vartheta}^R}{\dot{s}} \right) \bar{\vartheta} + C \frac{d^2 \bar{\vartheta}}{ds^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где:  $\dot{T}$ ,  $\dot{s}$  — производные по времени  $t$ .

Используя конкретные значения параметров неупругости [7], можно определить, что последнее слагаемое как минимум на порядок меньше остальных членов, и, значит, этим слагаемым в уравнении (9) можно пренебречь. Тогда уравнение (9) примет вид:

$$\frac{d\bar{S}}{ds} = N \frac{d\bar{\vartheta}}{ds} + N_s \bar{S} + N_{\vartheta} \bar{\vartheta}, \quad (10)$$

$$N = q_{\vartheta} + g_B - g_A C + \frac{(q_T - g_A^T C)\dot{T}}{\dot{s}} - \frac{(q_R - g_A^R C)}{\dot{s}}, \quad (11)$$

$$N_s = g_A + \frac{g_A^T \dot{T}}{\dot{s}} - \frac{g_A^R}{\dot{s}}, \quad (12)$$

$$N_{\vartheta} = g_{\vartheta} + \frac{g_{\vartheta}^T \dot{T}}{\dot{s}} - \frac{g_{\vartheta}^R}{\dot{s}}. \quad (13)$$

Уравнение (10) принадлежит А.А. Ильюшину [1, 2, 10] и получено для случая обобщенных плоских задач. Здесь же уравнение (10) получено из общих соотношений теории неупругости без введения каких-либо ограничений на вид задачи, что позволяет рассматривать возможность его применения не только для обобщенных плоских задач.

Для формулировки условий упругого и неупругого состояний вводится поверхность нагружения, которая изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\bar{S}) = |\bar{S} - \bar{A}| - C = 0. \quad (14)$$

Тогда состояние будет упругим, если напряженное состояние находится внутри поверхности нагружения или вектор приращения деформаций направлен внутрь поверхности

нагружения. В случае, если напряженное состояние находится на поверхности нагружения и вектор приращения деформаций направлен во внешнюю сторону поверхности нагружения, то состояние будет неупругим. Окончательно уравнения прикладного варианта теории термовязкопластических процессов и кинетические уравнения накопления повреждений примут следующий вид:

$$|\bar{S} - \bar{A}| < C \cup (\bar{S} - \bar{A}) \cdot \dot{\bar{\mathcal{E}}} \leq 0 \text{ — упругое состояние} \quad (15)$$

$$\bar{S} = 2G\bar{\mathcal{E}}, \quad (16)$$

$$\dot{C} = q_T \dot{T} - q_R, \quad (17)$$

$$\dot{\bar{A}} = (g_B^T \bar{\mathcal{E}} + g_A^T \bar{A}) \dot{T} - (g_B^R \bar{\mathcal{E}} + g_A^R \bar{A}), \quad (18)$$

$$\dot{\omega} = -g_\omega \omega, \quad (19)$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W; \quad (20)$$

$$|\bar{S} - \bar{A}| = C \cap (\bar{S} - \bar{A}) \cdot \dot{\bar{\mathcal{E}}} > 0 \text{ — неупругое состояние} \quad (21)$$

$$\dot{\bar{S}} = N \dot{\bar{\mathcal{E}}} + (N_S \bar{S} + N_\mathcal{E} \bar{\mathcal{E}}) \dot{s}, \quad (22)$$

$$\dot{C} = q_\mathcal{E} \dot{s} + q_T \dot{T} - q_R, \quad (23)$$

$$\dot{\bar{A}} = g_B \dot{\bar{\mathcal{E}}} + (g_B \bar{\mathcal{E}} + g_A \bar{A}) \dot{s} + (g_B^T \bar{\mathcal{E}} + g_A^T \bar{A}) \dot{T} - (g_B^R \bar{\mathcal{E}} + g_A^R \bar{A}), \quad (24)$$

$$\dot{\omega} = \alpha \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{1}{W} (\bar{A} \cdot \dot{\bar{\mathcal{E}}}) - g_\omega \omega, \quad (25)$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W. \quad (26)$$

Здесь  $\omega$  — повреждение;  $\alpha$  — параметр, характеризующий нелинейность процесса накопления повреждений и зависящий от уровня микронапряжений;  $g_\omega$  — параметр, отвечающий за процесс залечивания повреждений;  $W$  — энергия разрушения;  $g_W^T$  — параметр, обеспечивающий неизотермический переход;  $g_W$  — параметр, отвечающий за процесс охрупчивания.

К уравнениям (15)–(26) следует добавить уравнение, связывающее шаровые составляющие тензоров напряжений  $\sigma = \sigma_{ii}/3$  и деформаций  $\varepsilon = \varepsilon_{ii}/3$ , а также температурную деформацию  $\varepsilon_T = \int \alpha_T dT$ :

$$\sigma = 3K(\varepsilon - \varepsilon_T). \quad (27)$$

### Материальные функции

Определяющие функции (параметры), входящие в систему уравнений (15)–(27), выражаются [7] через материальные функции, подлежащие экспериментальному определению, следующим образом:

$$g_B = E_A + \beta_A \sigma_A, \quad g_\mathcal{E} = \beta_A E_a, \quad g_A = -\beta_A,$$

$$g_\mathcal{E}^T = \frac{dE_A}{dT} - \frac{E_A}{\sigma_A} \frac{d\sigma_A}{dT}, \quad g_A^T = \frac{1}{\sigma_A} \frac{d\sigma_A}{dT},$$

$$g_\mathcal{E}^R = g_\mathcal{E} P_A, \quad g_A^R = \frac{(g_B + g_A[\bar{A}])}{|\bar{A}|} P_A,$$

$$q_\mathcal{E} = \frac{\partial C_B}{\partial s}, \quad q_T = \frac{C}{C_B} \frac{\partial C_B}{\partial T}, \quad q_R = q_\mathcal{E} P_C,$$

$$P_C = \exp(b_c) |C - C_{BO}|^{n_c} (1 - \omega)^{-m_\omega},$$

$$\begin{aligned}
 P_A &= \exp(b_A) |\bar{A}|^{n_A} (1 - \omega)^{-m_\omega}, \\
 \alpha &= (\sigma_A / |\bar{A} - E_A \bar{\varepsilon}|)^{n_\alpha}, \\
 g_W &= \exp(b_W) |\bar{S}|^{n_W}, \\
 g_W^T &= \frac{W}{W_B} \frac{dW_B}{dT}, \\
 g_\omega &= \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_{ii} \geq 0, \\ \exp(b_\omega) |\sigma_{ii}|^{n_\omega}, & \text{если } \sigma_{ii} < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Окончательно прикладной вариант теории термовязкопластических процессов замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$G(T)$ ,  $K(T)$ ,  $\alpha_T(T)$  — упругие параметры;

$E_A(T)$ ,  $\sigma_A(T)$ ,  $\beta_A(T)$  — параметры анизотропного упрочнения;

$C_B(T, s)$  — функция изотропного упрочнения;

$W_B(T)$  — начальная энергия разрушения;

$n_\alpha(T)$  — параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

$b_C(T)$ ,  $b_A(T)$ ,  $n_C(T)$ ,  $n_A(T)$ ,  $m_\omega(T)$  — параметры изотропной и анизотропной ползучести;

$b_\omega(T)$ ,  $b_W(T)$ ,  $n_\omega(T)$ ,  $n_W(T)$  — параметры залечивания и охрупчивания.

#### Базовый эксперимент

Для определения материальных функций необходим следующий набор данных базового эксперимента при различных уровнях температуры.

Упругие параметры определяются традиционными методами.

Для упругопластических процессов необходимы:

- диаграмма одноосного пластического растяжения до деформации  $0.05 \div 0.1$ ;
- диаграмма одноосного пластического растяжения до деформации  $0.05 \div 0.1$  после предварительного сжатия до деформации  $0.01 \div 0.02$ ;
- циклические пластические диаграммы при одноосном растяжении-сжатии с постоянным размахом деформации  $0.01 \div 0.03$ .

Для описания процессов накопления повреждений и разрушения дополнительно необходимы:

- данные по малоциклового усталости при одноблочном жестком циклическом нагружении с постоянным размахом деформации  $0.01 \div 0.03$ ;
- данные по малоциклового усталости при двухблочном жестком циклическом нагружении с размахом деформации на первом блоке  $0.005 \div 0.015$  и на втором блоке  $0.02 \div 0.03$ . Или (и) наоборот на первом блоке  $0.02 \div 0.03$ , а на втором блоке  $0.005 \div 0.015$ .

Для описания упруговязкопластических процессов деформирования и накопления повреждений необходимы:

- данные по релаксации напряжения при постоянной деформации растяжения  $0.03 \div 0.05$ ;
- данные по зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения растяжения;
- диаграмма кратковременной ползучести при постоянном напряжении растяжения вплоть до разрушения.

Для описания процессов залечивания и охрупчивания необходимы:

- данные по длительной прочности при растяжении и сжатии;
- данные по малоциклового усталости с постоянным размахом деформации (порядка  $0.01 \div 0.02$ ) после ползучести при наборе различных уровней напряжения растяжения.

Расчетно-экспериментальный метод определения (идентификации) материальных функций по данным базового эксперимента изложен в работе [7].

### Термовязкопластические процессы сложного нагружения

Рассматриваются процессы сложного нагружения образцов из стали 30ХГСА при температуре 550°С по двузвенным ломаным траекториям деформации с различными скоростями деформирования от  $5 \cdot 10^{-5}$  до  $5 \cdot 10^{-3}$  мин<sup>-1</sup>.

При деформировании по программе 5 реализовывалось жесткое нагружение по траекториям (рисунок 1), имеющим одинаковый угол излома, но различные величины предварительной деформации на первом лучевом звене. Траектории программы 6 (рисунок 5) имеют одинаковую предварительную деформацию на первом лучевом звене, но разные углы излома. Деформирование по программам 5 и 6 проводится при одинаковой скорости деформирования, равной  $5 \cdot 10^{-4}$  мин<sup>-1</sup>. В программе 7 реализуется сложное нагружение по двузвенной ломаной траектории деформации (рисунок 8) с различными скоростями деформирования  $\dot{\varepsilon}_u = 5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-5}$  мин<sup>-1</sup>.

Ответные траектории напряжений для программ 5–7 приведены на рисунках 2, 6 и 9, скалярное запаздывание свойств материала для траекторий программ 5 и 7 показано на рисунках 3 и 10 соответственно. Векторные свойства (отклонение вектора напряжений от касательной к траектории деформаций) для траекторий программ 5–7 показаны соответственно на рисунках 4, 7 и 11. Результаты расчетов на основе прикладного варианта теории термовязкопластических процессов на рисунках 1–11 показаны сплошными кривыми, а результаты экспериментов [11] — светлыми и темными кружками и светлыми треугольниками.

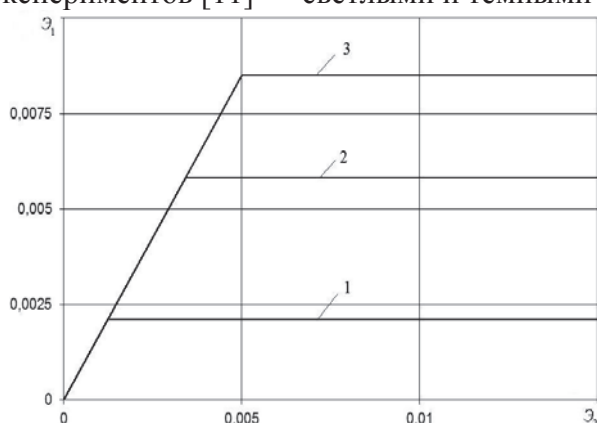


Рисунок 1. Траектории деформации (программа 5)

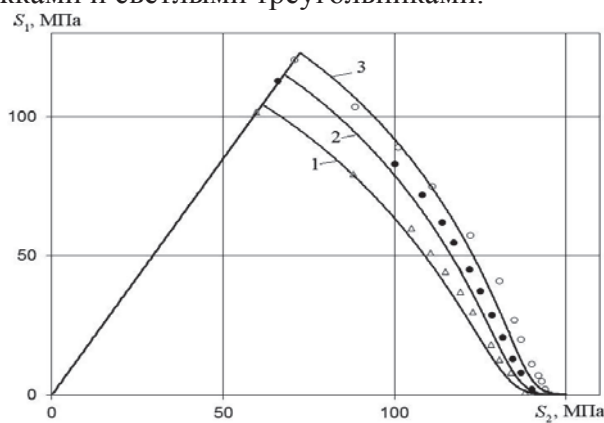


Рисунок 2. Ответные траектории напряжений (программа 5)

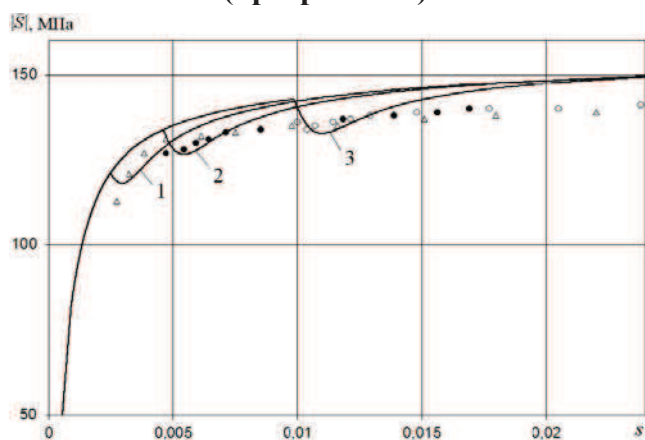


Рисунок 3 – Скалярные свойства (программа 5)

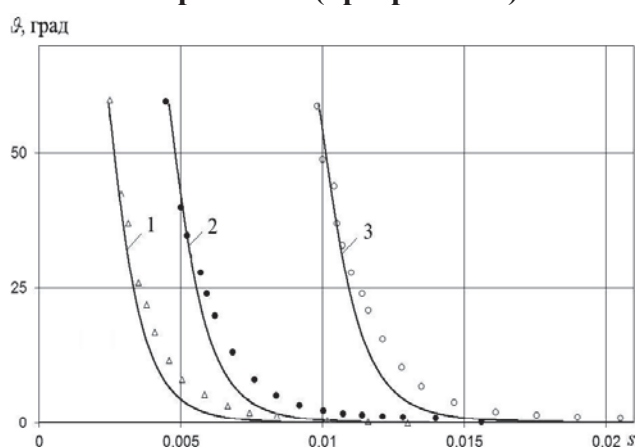
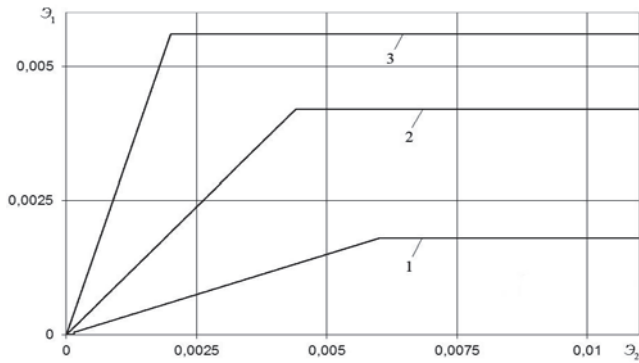
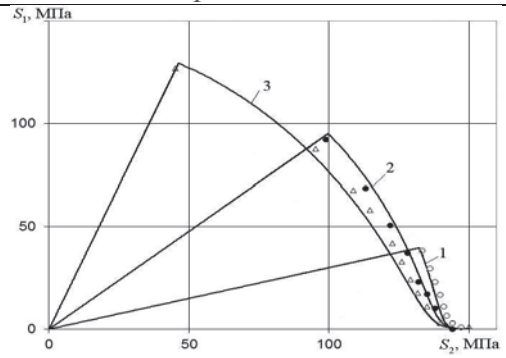


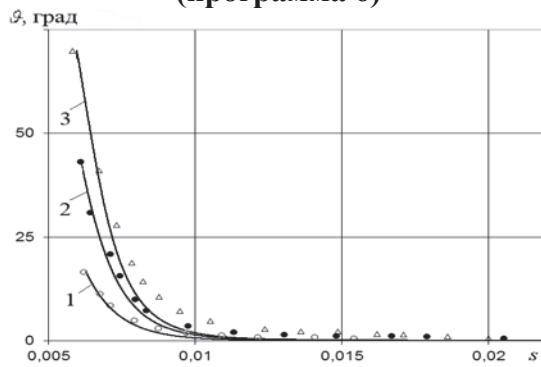
Рисунок 4 – Векторные свойства (программа 5)



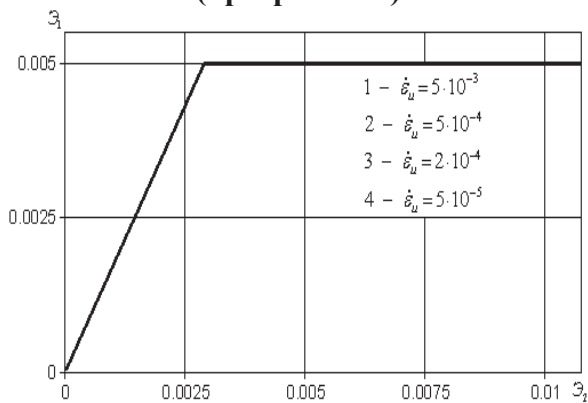
**Рисунок 5 – Траектории деформации (программа 6)**



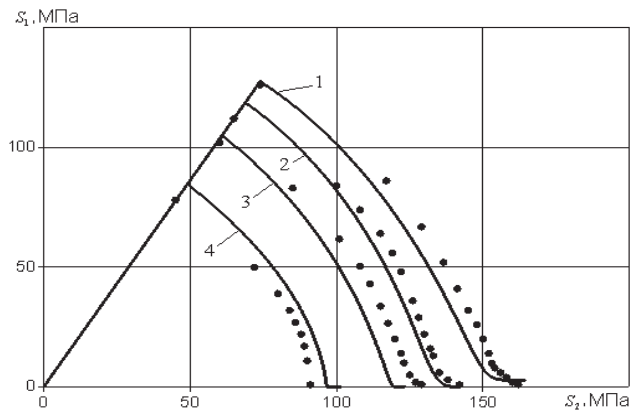
**Рисунок 6 – Ответные траектории напряжений (программа 6)**



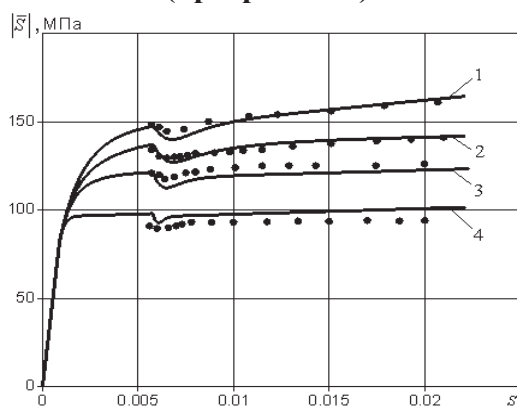
**Рисунок 7 – Векторные свойства (программа 6)**



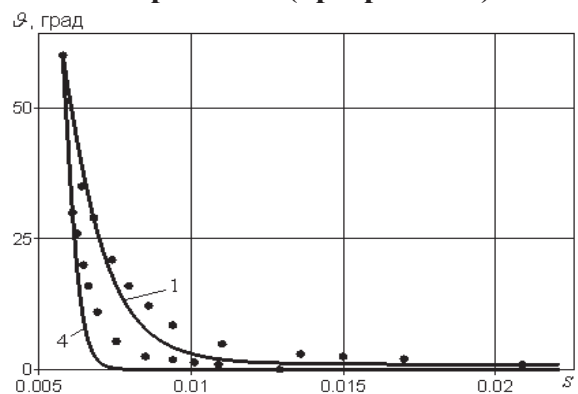
**Рисунок 8 – Траектория деформации (программа 7)**



**Рисунок 9 – Ответные траектории напряжений (программа 7)**



**Рисунок 10 – Скалярные свойства (программа 7)**



**Рисунок 11 – Векторные свойства (программа 7)**



Результаты расчетов и экспериментов [7] говорят о существенной зависимости ответных траекторий, скалярных и векторных свойств от скорости деформирования. Уменьшение скорости деформирования приводит к существенному снижению диаграммы деформирования и заметному снижению следа запаздывания векторных свойств. Наблюдается надежное соответствие расчетных и экспериментальных результатов — отличие не превышает 10% по скалярным свойствам и 10 градусов по векторным свойствам.

#### Заключение

Представленный здесь прикладной вариант и аппроксимации функционалов теории термовязкопластических процессов в развитии ранее разработанного варианта [4–6] упруго-пластических процессов сложного нагружения здесь распространен на неизотермические нагружения и процессы, развивающиеся в реальном времени. Приведенные первые результаты верификации прикладного варианта теории термовязкопластических процессов на траекториях сложного нагружения в виде двузвенных ломаных говорят об адекватном описании предложенной теорией процессов сложного нагружения, развивающихся в реальном времени в условиях высокой температуры.

#### Литература

1. Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории.-М.: Изд.АН СССР, 1963.- 271 с.
2. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990.-310 с.
3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах.- Л. :Машиностроение, 1990.- 224 с.
4. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упруго-пластических процессов// Известия Тул.ГУ. Естественные науки. Вып. 3.- Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. – С. 46-56.
5. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Вариант теории упруго-пластических процессов и аппроксимации функционалов пластичности// Проблемы прочности и пластичности. – 2011.- Вып. 73.- С. 5-12.
6. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Простейший вариант аппроксимации функционалов пластичности теории упруго-пластических процессов // Проблемы машиностроения и автоматизации.- 2012. - № 3. – С. 82-90.
7. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004.- 144 с.
8. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупруго-пластических сред с повреждениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 424 с.
9. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.-Л., Форест С. Нелинейная механика материалов / Пер. с фр. А.С. Кравчука; под ред. Л.Б. Гецова, Б.Е. Мельникова, А.Ю. Мусиенко, А.С. Семенова.- СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.- 398 с.
10. Кнетс И.В. Основные современные направления в математической теории пластичности.- Рига: Зинатне, 1971.- 147 с.
11. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций.- М.: Машиностроение, 1967.- 131 с.